ПМТФ, № 6, 1971

УДК 536.46

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СТУПЕНЧАТОГО ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ

И. Г. Ассовский, А. Г. Истратов, В. Б. Либрович

(Москва)

Обычная для теории горения конденсированных систем постановка задачи состоит в том, что по заданным внешним воздействиям на систему (давление p, световой поток q, скорость эрозионного потока газов g и т. п.) требуется определить скорость горения u. Решение такой задачи (будем называть ее прямой) можно трактовать как нахождение достаточных условий для осуществления заданного изменения скорости горения. Наряду с прямой задачей представляет интерес обратная задача: нахождение условий, необходимых для осуществления заданного закона изменения скорости горения со временем $u(t)$.

В данной работе, в предположении модели горения Я. Б. Зельдовича [1], получено точное решение обратной задачи в случае, когда изменение скорости горения u со временем t задается в виде ступенчатого изменения скорости от стационарной величины u_0 при $t < t_0$ до стационарной величины u_1 при $t > t_0$.

Установлено, что вид закона изменения давления со временем $p(t)$, обеспечивающего ступенчатое изменение скорости горения $u(t)$, существенно зависит от разности между отношением скоростей $z = u_1 / u_0$ и критерием Я. Б. Зельдовича [2]

$$k = (T_1 - T_0)\left(\frac{\partial \ln u}{\partial T_0}\right)_p \qquad (0 < k < 1)$$

где T_0, T_1 — соответственно начальная температура и температура поверхности системы. Так, если $z > k$, то рассматриваемый режим горения устойчив в любой момент времени и может существовать бесконечно долго. Если же $0 < z \leqslant k$, то в некоторый момент $t = t_1$, $(t_1 > t_0)$ горение становится неустойчивым, причем потеря устойчивости наступает тем быстрее, чем меньше величина z отличается от k, и тем позже, чем больше величина $k - z$.

1. Формулировка задачи. Как было показано Я. Б. Зельдовичем и Б. В. Новожиловым [1-3], нестационарные процессы горения конденсированных систем могут быть с достаточной точностью рассчитаны путем решения уравнения теплопроводности в конденсированной фазе (k-фазе)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x \leqslant 0) \tag{1.1}$$

с начальными и граничными условиями

$$T(x, t = 0) = T_0(x), \quad T(-\infty, t) = T_0(-\infty), \quad T(0, t) = T_1 \tag{1.2}$$

и при условии, что скорость горения u и температура поверхности T_1 зависят от градиента температуры у поверхности

$$f = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$$

и внешних факторов по известным законам

$$u = u(f;\ p, g, \ldots), \qquad T_1 = T_1(f;\ p, g, \ldots) \tag{1.3}$$

Эти законы находятся из пересчета стационарных зависимостей скорости горения и температуры поверхности от начальной температуры k-фазы $T_0(-\infty)$ и параметров типа давления p, эрозионной скорости g и т. п. При решении прямых задач теории горения система уравнений (1.1) — (1.3) замыкается заданием зависимостей давления, эрозионного потока и т. д. от времени

$$p = p(t), \quad g = g(t), \ldots \tag{1.4}$$

В случае обратной задачи необходимо задать зависимость скорости горения от времени

$$u = u(t) \tag{1.5}$$

Как в прямой, так и в обратной задачах теории нестационарного горения решение уравнения теплопроводности нужно для нахождения лишь функциональной связи между температурой поверхности T_1, градиентом температуры у поверхности f и скоростью горения u в произвольный момент времени t

$$F\left(T(0, t); \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}; u(t); t\right) = 0 \tag{1.6}$$

В то же время само решение уравнения теплопроводности $T(x, t)$ несет в себе гораздо больше информации, являющейся в данном случае бесполезной. Это несоответствие, однако, можно легко преодолеть, применяя преобразование Фурье к уравнению (1.1) с условиями (1.2), как это показано в работе [4]. Получающееся в результате соотношение (1.6) имеет вид

$$T_1 - T_0(-\infty) - \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \int\limits_{-\infty}^{0} [T_0(x) - T_0(-\infty)] \exp\left[-(4\varkappa t)^{-1}\left(\int\limits_0^t u dt + x\right)^2\right] dx -$$
$$- \int\limits_0^t \exp\left[-\frac{U^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \frac{T_1 - T_0(-\infty)}{\sqrt{\pi\varkappa(t-t')}} \left[\frac{\varkappa f(t')}{T_1 - T_0(-\infty)} - u(t') + \frac{U}{2(t-t')}\right] dt' = 0 \tag{1.7}$$

где

$$U = \int\limits_{t'}^{t} u dt \tag{1.8}$$

В случае модели горения Я. Б. Зельдовича, когда $T_1 = \text{const}$, интегральное соотношение (1.7) можно упростить, учитывая, что

$$\int\limits_0^t \exp\left[-\frac{U^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa(t-t')}} \left[\frac{U}{2(t-t')} - u\right] dt' = -\operatorname{erf}\left[2^{-1}(\varkappa t)^{-1/2} \int\limits_0^t u dt\right],$$
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha \tag{1.9}$$

Тогда

$$1 + \operatorname{erf}\left[2^{-1}(\varkappa t)^{-1/2} \int\limits_0^t u dt\right] - \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{T_0(x) - T_0(-\infty)}{T_1 - T_0(-\infty)} \exp\left[-(4\varkappa t)^{-1} \times\right.$$
$$\left. \times \left(\int\limits_0^t u dt + x\right)^2\right] dx = \int\limits_0^t \exp\left[-\frac{U^2}{4\varkappa(t-t')}\right] \frac{\varkappa f(t')}{(T_1 - T_0(-\infty))\sqrt{\pi\varkappa(t-t')}} dt' \tag{1.10}$$

В таком виде соотношение (1.7) особенно удобно для решения обратных задач, так как в этом случае $u(t)$ и, соответственно, $U(t, t')$ (1.8) — известные функции времени, и интегральное уравнение (1.10) относительно f является уравнением Вольтерра первого рода. Подставляя найденную из этого уравнения функцию $f(t)$ в первое из уравнений (1.3), можно получить соотношение между давлением p, скоростью потока g и другими внешними параметрами

$$G(t, p, g, \ldots) = 0 \tag{1.11}$$

Это соотношение является необходимым условием осуществления заданного изменения скорости $u(t)$.

В случае, если все внешние факторы, за исключением одного, например p, фиксированы, соотношение (1.11) дает закон изменения давления $p(t)$, необходимый для данного изменения скорости горения $u(t)$.

2. Переходный режим. Будем искать закон изменения давления $p(t)$, при котором скорость горения в некоторый момент времени изменяется скачком от стационарного значения $u = u_0$ до стационарного значения $u = u_1$. Пусть момент времени, в который происходит скачок скорости, нулевой.

Тогда $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & \text{при } t \leqslant 0 \\ u_1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

При этом соответствующее распределение температуры в момент $t = 0$

$$T_0(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\exp\left(\frac{u_0}{\varkappa}x\right) \tag{2.2}$$

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \frac{u_0^2}{\varkappa}t, \qquad \xi = \frac{u_0}{\varkappa}x, \qquad \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \tag{2.3}$$

$$\varphi = \frac{\varkappa f}{u_0(T_1 - T_0)}, \qquad v = \frac{u}{u_0}, \qquad \eta = \frac{p}{p_0}$$

где p_0 — стационарное давление, соответствующее скорости u_0.

Подставив (2.2) и (2.1) в уравнение (1.10) и перейдя к новым переменным (2.3), получим

$$1 + \operatorname{erf}(^1/_2 z\sqrt{\tau}) - e^{-(z-1)\tau}\{1 - \operatorname{erf}[(1 - {}^1/_2 z)\sqrt{\tau}]\} = \tag{2.4}$$
$$= \int_0^\tau \exp\left[-\frac{z^2}{4}(\tau - \tau')\right]\frac{\varphi(\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}d\tau'$$

где

$$z = u_1 / u_0 \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов $\tau - \tau'$. Техника решения подобных уравнений с помощью преобразования Лапласа хорошо разработана [5].

Введем обозначения

$$G(\tau) = 1 + \operatorname{erf}(^1/_2 z\sqrt{\tau}) - e^{-(z-1)\tau}\{1 - \operatorname{erf}[(1 - {}^1/_2 z)\sqrt{\tau}]\} \tag{2.6}$$

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-{}^1/_4 z^2\tau} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.4) в этих обозначениях примет вид

$$G(\tau) = \int_0^\tau K(\tau - \tau')\,\varphi(\tau')\,d\tau' \tag{2.8}$$

Пусть

$$\int_0^\tau \varphi(\tau')\,d\tau' = \Phi(\tau) \tag{2.9}$$

Тогда, применяя к уравнению (2.8) преобразование Лапласа, получим алгебраическое соотношение для изображений

$$f(s) = \frac{1}{sk(s)}\,g(s) \tag{2.10}$$

где

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\Phi(\tau)\,d\tau \tag{2.11}$$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}G(\tau)\,d\tau \tag{2.12}$$

$$k(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}K(\tau)\,d\tau \tag{2.13}$$

Вычислив с помощью (2.7) $k(s)$, представим уравнение (2.10) в виде

$$f(s) = \left(\frac{1}{s}\,\frac{{}^1\!/_4 z^2}{\sqrt{s + {}^1\!/_4 z^2}} + \frac{1}{\sqrt{s + {}^1\!/_4 z^2}}\right) g(s) \tag{2.14}$$

Применяя теперь обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.14), получим выражение для оригинала $\Phi(\tau)$

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau \left[\frac{z}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\tau'}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}}\,e^{-{}^1\!/_4 z^2\tau'}\right] G(\tau - \tau')\,d\tau' \tag{2.15}$$

Дифференцируя (2.15) по времени τ и учитывая согласно (2.6), что $G(0) = 0$, получим выражение для градиента φ

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \left[\frac{z}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\tau'}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}}\,e^{-{}^1\!/_4 z^2\tau'}\right] G'(\tau - \tau')\,d\tau' \tag{2.16}$$

Вычислив из (2.6) $G'(\tau - \tau')$ и подставив в (2.16), можно с помощью несложных преобразований получить достаточно простое выражение для градиента температуры $\varphi(\tau)$

$$\varphi(\tau) = {}^1\!/_2 z\,[1 + \operatorname{erf}({}^1\!/_2 z\sqrt{\tau})] + (1 - {}^1\!/_2 z)\,e^{-(z-1)\tau}\{1 - \operatorname{erf}[(1 - {}^1\!/_2 z)\sqrt{\tau}]\}, \tag{2.17}$$

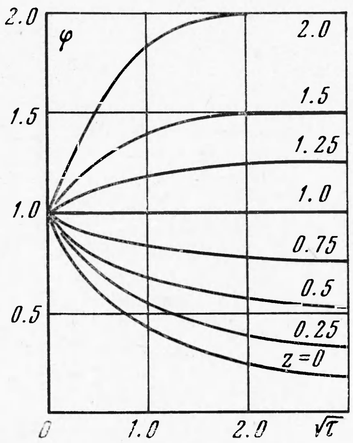
$$\tau \geqslant 0$$

Отметим, что формула (2.17) независимо и другим способом была получена Г. М. Махвиладзе [6].

На фиг. 1 изображено семейство кривых $\varphi(\tau)$ при различных значениях параметра z. Все кривые обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} &\varphi(\tau) \to 1 \quad \text{при } \tau \to 0 \text{ и любом } z \\ &\varphi(\tau) \to z \quad \text{при } \tau \to +\infty \end{aligned} \tag{2.18}$$

Таким образом, при изменении скорости горения скачком от $v = 1$ до $v = z$ градиент температуры у поверхности k-фазы φ меняется непрерывно и монотонно и с течением времени выходит на стационарный режим $\varphi = z$, соответствующий стационарному уровню скорости горения $v = z$.



Фиг. 1

3. Закон изменения давления. Чтобы получить соответствующий закон изменения давления, необходимо задаться каким-либо видом соотношения между скоростью горения v, давлением η и градиентом φ согласно (1.3). Предполагая экспоненциальную зависимость скорости горения от начальной температуры и степенную от давления $u \sim \sim p^{\nu} e^{\alpha T_0}$, получим, что

$$v = \exp\left(k\left(1 - \varphi / v\right)\right)\eta^{\nu} \tag{3.1}$$

где

$$k = \alpha(T_1 - T_0) \qquad (0 < k < 1)$$

Подставляя в (3.1) условие $v = z$ и выражение для φ, из (2.5) получим для давления

$$\psi \equiv \ln(\eta^{\nu}) = kz^{-1}\varphi(z, \tau) + \ln z - k \tag{3.2}$$

Исследуем характер поведения кривых (3.2). При любом z кривые $\psi(z, \tau)$ — монотонные функции времени, поскольку монотонны градиенты $\varphi(z, \tau)$, и с течением времени выходят на стационарный режим $\psi = \ln z$. При стремлении времени τ к нулю справа согласно (2.7) кривые $\psi(z, \tau)$ стремятся к предельным значениям

$$\psi_0(z) \equiv \psi(z, +0) = (kz^{-1} - k + \ln z) \tag{3.3}$$

Среди всех значений $\psi_0(z)$ есть минимальное, которое достигается при $z = k$

$$\min_z \psi_0(z) = \psi_0(k) = 1 - k + \ln k < 0 \tag{3.4}$$

График начальных скачков давлений в зависимости от скачка скорости $\psi_0(z)$ представлен на фиг. 2. Каждому начальному скачку $\psi_0(z)$ ($\infty > \psi_0 \geqslant 1 - k + \ln k$), за исключением $\psi_0(k)$, соответствуют две кривые изменения давления $\psi_1(z_1, \tau)$ и $\psi_2(z_2, \tau)$, одна из которых соответствует $z_1 < k$, другая — $z_2 > k$. В связи с этим семейство кривых давлений $\psi(z, \tau)$ можно разбить на два подсемейства (фиг. 3). Подсемейство кривых $\psi_2(z, \tau)$ ($z > k$) характеризуется тем, что в начальный момент времени $\tau = +0$ (так же как и в дальнейшем) большему значению скорости z соответствует большее значение давления ψ. Подсемейство $\psi_1(z, \tau)$ ($z \leqslant k$) состоит из кривых, имеющих в момент времени $\tau = +0$ значение ψ_0, тем большее, чем меньше величина z. Кривую давления $\psi(k, \tau)$ следует отнести ко второму семейству по причинам, которые будут ясны из дальнейшего.

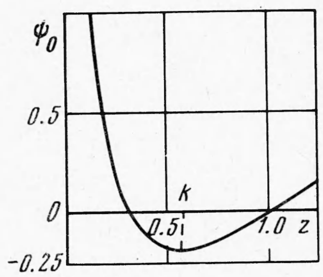
Подсемейство кривых $\psi_1(z, \tau)$ имеет огибающую, которая определяется из системы уравнений

$$\psi = kz^{-1}\varphi(z, \tau) + \ln z - k \qquad (3.5)$$
$$\psi_z' = kz^{-1}\varphi_z'(z, \tau) - kz^{-2}\varphi(z, \tau) + z^{-1} = 0$$

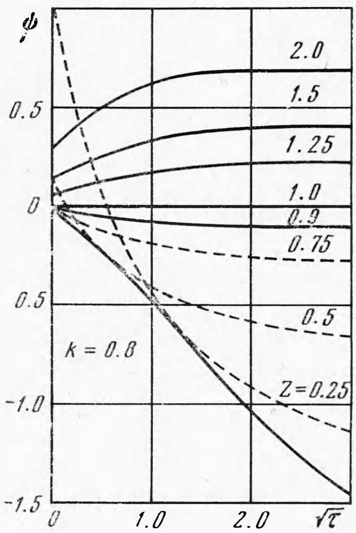
Для этого необходимо из второго уравнения системы (3.5) выразить z как функцию τ и подставить полученное выражение $z(\tau)$ в первое уравнение

$$\psi^* = \frac{k}{z(\tau)}\varphi(z(\tau), \tau) + \ln z(\tau) - k \qquad (3.6)$$

Однако явное выражение для огибающей ψ^* в любой момент времени получить затруднительно,



Фиг. 2



Фиг. 3

так как второе уравнение системы (3.5) относительно z является трансцендентным

$$\frac{k}{z^2}\left\{\frac{z}{k} + z\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, e^{-1/_4 z^2\tau} - e^{(1-z)\tau}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\left(1-\frac{z}{2}\right)\sqrt{\tau}\right)\right]\left(\tau\frac{z^2}{2} - \tau z + 1\right)\right\} = 0 \qquad (3.7)$$

Поэтому ограничимся исследованием поведения огибающей при достаточно малых и больших временах. При малых временах $\tau \ll 1$ асимптотическое выражение для давления ψ имеет вид

$$\psi = kz^{-1}[1 - 2(1-z)\sqrt{\pi^{-1}\tau} + (1-z)(1 - {}^1/_2 z)\tau] + \ln z - k \qquad (3.8)$$

При этом из второго уравнения (3.5) находим $z(\tau)$

$$z(\tau) = k[1 - 2\sqrt{\pi^{-1}\tau} + (1 - {}^1/_2 k^2)\tau] \qquad (3.9)$$

а из первого уравнения (3.5) — асимптотическое выражение для огибающей

$$\psi^* = (1 - k + \ln k) - (1-k)\,2\sqrt{\pi^{-1}\tau} + (1 - 2\pi^{-1} + {}^1/_2 k^2 - {}^3/_2 k)\tau \qquad (3.10)$$

Как видно из (3.8) и (3.9), в момент $\tau = +0$ огибающая ψ^* касается кривой давления ψ, соответствующей $z = k$, а в дальнейшем имеет касание с кривыми, соответствующими $z < k$ (т. е. с кривыми первого подсемейства $\psi_1(z, \tau)$. При этом касание кривых $\psi_1(z, \tau)$ с огибающей наступает тем позже, чем меньше величина z, которой они соответствуют. Та же картина сохраняется и на больших временах $\tau \gg 1$. На больших временах справедливо асимптотическое выражение для ψ_1

$$\psi = \ln z + \frac{k}{z} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-1/4 z^2 \tau} \frac{1 - z}{z^2 (1 - 1/2 z)^2}, \qquad z \neq 0 \tag{3.11}$$

Из второго уравнения (3.5) получаем $z(\tau)$

$$z(\tau) = 2C / \sqrt{\tau} \tag{3.12}$$

где константа C определяется из уравнения

$$Ce^{C^2} = k / 2\sqrt{\pi} \tag{3.13}$$

Подставляя (3.12) в первое уравнение (3.5), получаем выражение для огибающей на больших временах

$$\psi^* = \ln\left(\frac{2C}{\sqrt{\tau}}\right) + \frac{1}{2C^2} \tag{3.14}$$

Как следует из (3.12), (3.14), огибающая, а также сами кривые давлений вблизи огибающей при больших временах меняются подобно известным автомодельным режимам [2, 7], при которых

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^\nu \sim \frac{D}{\sqrt{t}}$$

Скорость горения при этом постоянна, в то время как в упомянутых автомодельных режимах $u(t) \sim 1 / \sqrt{t}$.

4. **Устойчивость нестационарных режимов.** Как было указано выше, решением обратной задачи нестационарной теории горения является (в частном случае) закон изменения давления $\psi(\tau)$, который при заданных начальных условиях $\theta_0(\xi)$ обеспечивает изменение скорости горения по заданному закону $v(\tau)$. Таким образом

$$\psi(\tau) = \psi(v(\tau), \theta_0(\xi), \tau) \tag{4.1}$$

Допустим, что указанные величины получили малые приращения $\delta\psi(\tau)$, $\delta v(\tau)$, $\delta\theta_0(\xi)$, тогда, варьируя выражение (4.1), получим соотношение между приращениями

$$\delta\psi(\tau) = \psi_v'(\delta v) + \psi_{\theta_0}'(\delta\theta_0) \tag{4.2}$$

где ψ_v' и ψ'_{θ_0} являются первыми вариациями функционала ψ. Соотношение (4.2) позволяет ответить на вопрос будет ли данный процесс устойчив к возмущениям какой-либо из переменных ψ, v или $\theta_0(\xi)$.

Рассмотрим устойчивость исследованного выше режима. Предположим, что начальное распределение температуры не испытывает возмущений, а давление получило малое возмущение $\delta\psi(z, \tau)$. Тогда скорость горения получит возмущение $\delta z(\tau)$, которое согласно (3.2) и (4.2) зависит от $\delta\psi$ следующим образом:

$$\delta z(\tau) = \left[\frac{k}{z} \varphi_z'(z, \tau) - \frac{k}{z^2} \varphi(z, \tau) + \frac{1}{z}\right]^{-1} \delta\psi \tag{4.3}$$

Режим $z(\tau)$ будет устойчивым по Ляпунову к возмущениям $\delta\psi(\tau)$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|\delta\psi\| < \delta(\varepsilon)$, то

$\|\delta z(\tau)\| \leqslant \varepsilon$. Выберем в качестве нормы функции максимальное значение модуля функции $\|f(\tau)\| = \max\limits_{\tau} |f(\tau)|$. Тогда условие устойчивости для $z(\tau)$ будет выполнено, если множитель в (4.3) будет ограничен по модулю. Это требование выполняется для кривых второго подсемейства $\psi_2(z, \tau)$, $(z > k)$ и не выполняется для кривых первого подсемейства $\psi_1(z, \tau)$, так как в этом случае коэффициент $(kz^{-1}\varphi_z - kz^{-2}\varphi + z^{-1})^{-1}$ становится неограниченным в момент касания кривой $\psi_1(z, \tau)$ огибающей $\psi^*(\tau)$.

Поступила I II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11, 12.
2. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
3. Новожилов Б. В. Нестационарное горение порохов, имеющих переменную температуру поверхности. ПМТФ, 1967, № 1.
4. Новожилов Б. В. Уравнение для нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1970, № 4.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Физматгиз, 1960, стр. 104.
6. Махвиладзе Г. М. О нестационарном горении твердого топлива в потоке газообразного окислителя. ПМТФ, 1971, № 4.
7. Либрович В. Б., Новожилов Б. В. Автомодельные решения в теории нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1971, № 4.