

УДК 532.59:539.3:534.1

КОСОЕ НАБЕГАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА УПРУГУЮ ПОЛОСУ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследовано косое набежание волн малой амплитуды на упругую полосу, плавающую на свободной поверхности жидкости. Определены коэффициенты отражения и прохождения волн, а также вертикальные смещения и деформации пластины. Показано, что все эти характеристики существенно зависят от угла падения волны, ее частоты и ширины пластины. Получены приближенные решения для коэффициентов отражения и прохождения.

Поведение тонкой упругой пластины, плавающей на взволнованной водной поверхности, интенсивно изучалось в связи с исследованием изгибно-гравитационных волн в жидкости с ледяным покровом (обзор [1, 2]). В последние годы интерес к данной задаче возрос также благодаря разработке проектов плавучих островов и платформ различного назначения [3]. Обычно рассматривается прямоугольная форма этих искусственных сооружений с большим отношением длины к ширине — примерно 10 : 1. Вдали от угловых точек можно предположить, что поведение пластины приближенно описывается решением задачи о набегаании поверхностных волн на бесконечную по длине упругую полосу постоянной ширины. Положим, что жидкость является идеальной и несжимаемой, имеет постоянную глубину и безгранична по горизонтальным направлениям, течение в жидкости — потенциальное. Внешнее волнение считается плоским и регулярным, амплитуда поверхностной волны, а также изгибные колебания упругой пластины — малыми. Частные случаи рассматриваемой задачи о косом падении волн на кромку полубезграничной пластины и нормальном падении на полосу конечной ширины исследованы соответственно в [4, 5].

Пусть на свободной поверхности слоя жидкости глубиной H плавает упругая бесконечно длинная пластина шириной L и толщиной h . Осадка пластины предполагается пренебрежимо малой. Из области свободной поверхности бассейна под углом к левой кромке пластины набегают прогрессивная волна с частотой ω . Система координат выбрана так, что начало координат расположено на дне бассейна под левой кромкой пластины, горизонтальная ось x перпендикулярна кромкам пластины, ось y параллельна им, ось z направлена вертикально вверх.

Набегающая волна распространяется под углом θ к оси x и определяется потенциалом скоростей

$$\Phi_0(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(x, z) \exp[i(\omega t - \beta y)],$$

где $\varphi_0 = iag \operatorname{ch}(k_0 z) / (\omega \operatorname{ch}(k_0 H)) \exp(-i\alpha x)$; $(\alpha, \beta) = k_0(\cos \theta, \sin \theta)$; $\mathbf{x} = (x, y, z)$; a — амплитуда волны; g — ускорение силы тяжести; волновое число k_0 — положительный вещественный корень уравнения

$$\omega^2 = gk_0 \operatorname{th}(k_0 H). \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00897) и интегративного проекта № 43 СО РАН.

Здесь и далее во всех выражениях, содержащих множитель $\exp(i\omega t)$, физический смысл имеет только вещественная часть.

Рассматриваются установившиеся волны, и в связи с бесконечной длиной упругой пластины потенциал скоростей возмущенного движения жидкости ищется в виде

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x, z) \exp[i(\omega t - \beta y)]. \quad (2)$$

Для определения $\varphi(x, z)$ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (x < 0, \quad x > L, \quad z = H); \quad (4)$$

$$\left[D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right)^2 + 1 - \mu \omega^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (0 < x < L, \quad z = H); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0), \quad (6)$$

где $D = Eh^3/(12\rho g(1 - \nu^2))$; $\mu = \rho_1 h/(\rho g)$. Здесь E , ρ_1 , ν — модуль нормальной упругости, плотность и коэффициент Пуассона пластины; ρ — плотность воды. Предполагается, что пластина контактирует с водой во всех точках и во все моменты времени. На кромках пластины выполняются условия свободного края, заключающиеся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta^2 \varphi \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (2 - \nu)\beta^2 \varphi \right] = 0 \quad (x = 0^+, \quad x = L^-, \quad z = H). \quad (7)$$

Для решения задачи (3)–(7) используем способ сопряжения [6], при котором область S , занятая жидкостью, разбивается на три части: S_1 ($-\infty < x < 0$), S_2 ($0 < x < L$), S_3 ($L < x < \infty$); в каждой из них $\varphi(x, z)$ обозначим через $\varphi_j(x, z)$ ($j = 1, 3$). Далее перейдем к безразмерным переменным, выбрав за масштаб длины глубину бассейна H , а за масштаб времени $\sqrt{H/g}$.

Функции φ_j будем искать в виде разложения по собственным функциям соответствующих краевых задач:

$$\varphi_1 = [E_0 \exp(-i\alpha x) + A_0 \exp(i\alpha x)] Y_0(k_0, z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\alpha_n x) Y_1(k_n, z); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = [B_0 \exp(-iq_0 x) + C_0 \exp(iq_0 x)] Y_0(r_0, z) + \sum_{m=1}^4 G_m \exp(s_m x) \cos(p_m z) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \exp(-q_n x) + C_n \exp(q_n x)] Y_1(r_n, z); \quad (9) \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = F_0 \exp(-i\alpha x) Y_0(k_0, z) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp(-\alpha_n x) Y_1(k_n, z), \quad (10)$$

где $E_0 = ia\sqrt{\Lambda_0(k_0)}/(\omega \operatorname{ch} k_0)$; k_n ($n = 1, 2, \dots$) — вещественные корни уравнения

$$\omega^2 = -k_n \operatorname{tg} k_n; \quad (11)$$

$\alpha_n = \sqrt{k_n^2 + \beta^2}$; r_0 — вещественный корень уравнения

$$\omega^2 = \frac{(1 + \delta r^4)r \operatorname{th} r}{1 + \gamma r \operatorname{th} r}; \quad (12)$$

$$q_0 = \sqrt{r_0^2 - \beta^2}, \quad (13)$$

$\delta = D/H^4$, $\gamma = \mu g/H$. Уравнение (12) имеет также бесконечное число чисто мнимых корней $\pm ir_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $q_n = \sqrt{r_n^2 + \beta^2}$ и четыре комплексных корня $\pm \sigma \pm i\lambda$ ($\sigma > 0$, $\lambda > 0$). Значения p_m равны $\pm \lambda \mp i\sigma$, $s_m = \sqrt{p_m^2 + \beta^2}$. Пронумеруем значения s_m следующим образом: $s_{1,2} = c \pm id$, $s_{3,4} = -c \pm id$ ($c > 0$, $d > 0$). Функции Y_0, Y_n ($n = 1, 2, \dots$) имеют вид

$$Y_0(\xi, z) = \frac{\operatorname{ch}(\xi z)}{\sqrt{\Lambda_0(\xi)}}, \quad \Lambda_0(\xi) = \int_0^1 \operatorname{ch}^2(\xi z) dz = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2\xi)}{4\xi},$$

$$Y_1(\xi, z) = \frac{\cos(\xi z)}{\sqrt{\Lambda_1(\xi)}}, \quad \Lambda_1(\xi) = \int_0^1 \cos^2(\xi z) dz = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\xi)}{4\xi}.$$

Свойства собственных значений и собственных функций подробно изучены в [4, 7]; кратко укажем их основные свойства. Собственные функции в областях S_1 и S_3 ортогональны и представляют собой полную систему для потенциала, удовлетворяющего уравнению (3) и граничным условиям (4), (6). В безразмерных переменных согласно уравнению (1) $k_0 \approx \omega$ при $\omega \rightarrow 0$ и $k_0 \approx \omega^2$ при $\omega \rightarrow \infty$. Корни k_n уравнения (11) таковы, что $(n - 1/2)\pi < k_n < n\pi$ и $k_n \rightarrow n\pi$ для больших n . В области S_2 собственные функции неортогональны, однако также представляют собой полную систему. Вещественный корень уравнения (12) $r_0 \approx \omega$ при $\omega \rightarrow 0$ и $r_0 \approx \omega^{1/2}(\gamma/\delta)^{1/4}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Корни r_n удовлетворяют неравенствам $(n - 1/2)\pi < r_n < (n + 1/2)\pi$ и $r_n \rightarrow n\pi$ для больших n . Один из комплексных корней уравнения (12) при $\omega = 0$ равен $\sigma + i\lambda = (1 + i)2^{-1/2}\delta^{-1/4}$. Моды, связанные с k_n и r_n , носят название краевых, а моды, определяемые комплексными корнями p_m ($m = \overline{1, 4}$) и обусловленные изгибной жесткостью льда, — растущими или затухающими прогрессивными волнами в зависимости от знака $\operatorname{Re}(s_m)$. Во введенной нумерации растущими являются моды, определяемые s_1 и s_2 , а затухающими — s_3 и s_4 . Мода, связанная с r_0 , является прогрессивной волной при вещественных значениях q_0 в (13). Однако при $r_0 < \beta$ значение q_0 становится мнимым, что соответствует краевой моде. Значение угла $\theta = \theta_0$, где

$$\theta_0 = \arcsin(r_0/k_0), \quad (14)$$

называется критическим, так как имеет место полное отражение падающей прогрессивной волны от пластины. Аналогичное явление наблюдается и при косом набегании поверхностных волн на прямоугольную донную траншею [8].

В силу непрерывности движения жидкости в области S на границах областей S_j ставятся условия согласования давления и горизонтальной скорости, из которых следует

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (x = 0, \quad 0 \leq z \leq H); \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \quad (x = L, \quad 0 \leq z \leq H). \quad (16)$$

Используя метод редукции, бесконечные ряды в (8)–(10) заменим конечными суммами с числом членов N . Условия согласования (15), (16) выполняются в интегральном смысле,

т. е. они последовательно умножаются на функции $Y_0(k_0, z)$, $Y_0(r_0, z)$, $Y_1(k_n, z)$, $Y_1(r_n, z)$ ($n = 1, 2, \dots$) и интегрируются в интервале $0 \leq z \leq H$. Постоянные A_0 , A_n , F_0 , F_n удобно выразить через остальные неизвестные комплексные постоянные, в итоге задача сводится к решению $2N + 6$ линейных уравнений, которое выполняется численно.

При исследовании дифракции волн на пластине часто используется приближение, в котором не учитываются краевые волны, т. е. бесконечные суммы в представлениях (8)–(10). Решение такой задачи значительно проще, так как сводится к системе только шести линейных уравнений.

В пределе при $L \rightarrow \infty$ рассматриваемая задача соответствует косому набеганию поверхностных волн на кромку полубезграничной пластины. В этом случае область S разбивается на две части: S_1 ($x < 0$) и S_2 ($x > 0$). Представление для φ_1 по-прежнему имеет вид (8), а для φ_2 в (9) следует опустить члены с коэффициентами C_0 , G_1 , G_2 , C_n . На границе областей S_1 и S_2 должны выполняться условия согласования (15). Для решения этой задачи также использован метод интегральной склейки, и задача сведена к системе $3 + N$ линейных уравнений. Для получения приближенного решения, не учитывающего краевые волны, следует решить систему трех линейных уравнений.

После вычисления всех неизвестных постоянных в (8)–(10) можно определить волновое движение жидкости и деформации пластины. Для полосы конечной ширины коэффициенты отражения R и прохождения T , характеризующие соответственно отраженную от полосы и прошедшую через нее поверхностные прогрессивные волны, равны

$$R = A_0/E_0, \quad T = F_0/E_0 \quad (17)$$

и удовлетворяют энергетическому соотношению

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \quad (18)$$

Для полубезграничной пластины введем обозначение R_1 для коэффициента отражения, который определяется аналогично R в (17), и T_1 для коэффициента прохождения незатухающей прогрессивной изгибно-гравитационной волны в пластине

$$T_1 = \frac{r_0 B_0 \operatorname{sh} r_0}{k_0 E_0 \operatorname{sh} k_0} \sqrt{\frac{\Lambda_0(k_0)}{\Lambda_0(r_0)}}.$$

В [4] приведено энергетическое соотношение

$$|R_1|^2 + Q|T_1|^2 = 1, \quad (19)$$

где

$$Q = \frac{\operatorname{Re}(q_0)k_0^2 \operatorname{sh}(2k_0)[2r_0(\delta r_0^4 + 1 - \gamma\omega^2) + \operatorname{sh}(2r_0)(5\delta r_0^4 + 1 - \gamma\omega^2)]}{\operatorname{Re}(\alpha)r_0^2 \operatorname{sh}(2r_0)[2k_0 + \operatorname{sh}(2k_0)]}.$$

В [9] аналогично методу решения оптических задач выведены соотношения, связывающие коэффициенты отражения и прохождения для пластин конечной и бесконечной ширины при нормальном падении волн в приближении однократного рассеяния. Распространяя эти соотношения на случай косоугольного набегания волн, получим

$$R = R_1 - \frac{R_1^* T_1^2 (1 - |R_1|^2)}{(T_1^*)^2 \exp(2iq_0 L) - T_1^2 (R_1^*)^2}, \quad T = \frac{|T_1|^2 (1 - |R_1|^2) \exp[i(\alpha + q_0)L]}{(T_1^*)^2 \exp(2iq_0 L) - T_1^2 (R_1^*)^2}, \quad (20)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Как указано в [9], это приближение справедливо только тогда, когда ширина пластины велика по сравнению с длиной изгибно-гравитационной волны $l_r = 2\pi/r_0$. Аналогично жесткой пластине [6] существует дискретный спектр частот, при которых $R = 0$ (так называемые окна прозрачности). Увеличение

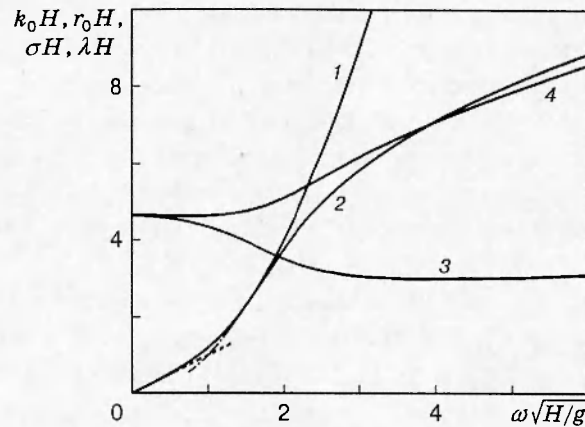


Рис. 1

длины пластины при фиксированных остальных параметрах приводит к полному прохождению набегающей волны с интервалом $\Delta L = \pi/q_0$ при вещественном значении q_0 .

Вертикальные смещения пластины $\eta(x, y, t)$ аналогично (2) можно записать в виде

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \{ \zeta(x) \exp [i(\omega t - \beta y)] \}.$$

Используя соотношение $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=H}$, получим $\zeta(x) = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \varphi_2(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=H}$.

Тензор деформаций ϵ представляет собой матрицу

$$\epsilon = \frac{h}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

для которой в каждый момент времени могут быть определены собственные значения, соответствующие главным деформациям. Максимальная деформация ϵ_m вычисляется как наибольшая по абсолютной величине из двух главных деформаций при изменении ωt в интервале от 0 до 2π . Наряду с максимальной деформацией будет вычислена также нормальная деформация ϵ_n , равная $\frac{h}{2} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|$. При нормальном падении набегающей волны $\epsilon_n = \epsilon_m$.

Численные расчеты выполнены для значений параметров, соответствующих ледяному покрову и наиболее часто используемых в указанной выше литературе (далее вернемся к размерным переменным): $E = 6 \cdot 10^9$ Па, $H = 100$ м, $\rho = 1025$ кг/м³, $h = a = 1$ м, $\rho_1 = 922,5$ кг/м³, $\nu = 0,3$. При этих значениях $\delta = 5,47 \cdot 10^{-4}$, $\gamma = 9 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 1 представлены кинематические характеристики прогрессивных волн: кривая 1 показывает поведение волнового числа $k_0 H$ для гравитационной волны, кривая 2 — волнового числа $r_0 H$ для изгибно-гравитационной волны, кривые 3 и 4 — соответственно значения σH и λH . При заданном значении δ для $\omega = 0$ $\sigma H = \lambda H \approx 4,62$. Штриховая линия представляет зависимость $\omega = k_0 \sqrt{g} H$ для длинных волн, штрихпунктирная — высокочастотное приближение $\omega = \sqrt{g} k_0$. Видно, что поведение k_0 достаточно хорошо описывается этими двумя приближениями. Высокочастотное поведение r_0 не показано, так как в силу малости значений δ и γ оно имеет место только при $\omega \gg 1$.

На рис. 2, а, б изображены коэффициенты отражения соответственно при $\theta = 0$ и $\theta = 30^\circ$ (при $\omega \sqrt{H/g} < 1$ в этих случаях $|R|$ и $|R_1|$ меньше 0,01). Кривые 1, 2, 7 со-

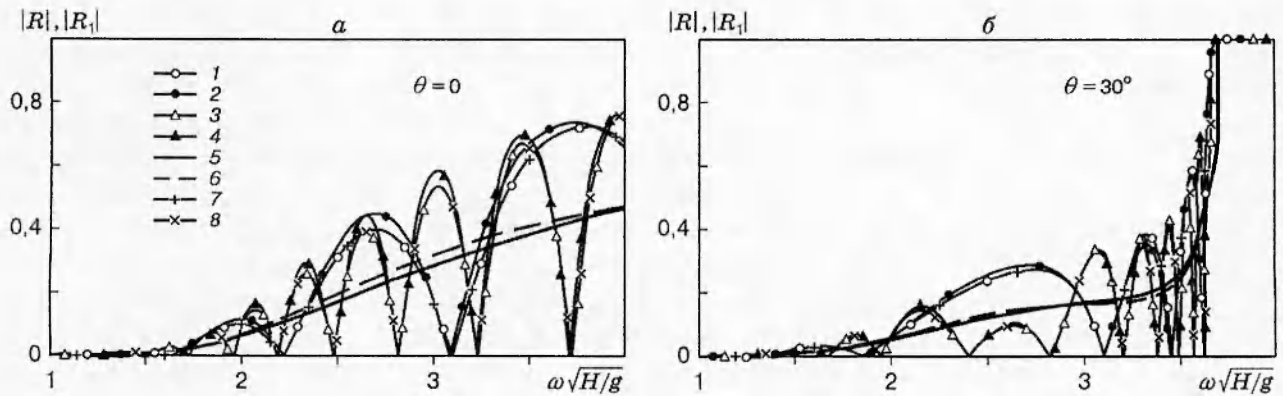


Рис. 2

ответствуют полосе шириной $L/H = 2$, кривые 3, 4, 8 — $L/H = 5$, кривые 5, 6 — полубезграничной пластине ($L \rightarrow \infty$). Кривые 1, 3, 5 представляют численное решение с учетом $N = 20$ краевых мод, кривые 2, 4, 6 — приближенное решение без краевых мод. С учетом краевых мод погрешность выполнения энергетических соотношений (18) и (19) соответственно для полосы конечной и бесконечной ширины не превышала 1%. Видно, что приближенное решение, не учитывающее краевые волны, достаточно хорошо описывает поведение коэффициента отражения, а также, согласно (18) и (19), коэффициента прохождения для достаточно длинных волн. Приближенные значения (20), показанные кривыми 7, 8, хорошо согласуются с полным решением (кривые 1, 3). Интересной особенностью косога набегания волн является усиление колебательного поведения коэффициента отражения при приближении к частоте, соответствующей критическому углу (согласно (14) $\theta_0 = 30^\circ$ при $\omega\sqrt{H/g} \approx 3,67$).

Характеристики деформации пластины представлены на рис. 3, 4 для нормального и косога ($\theta = 30^\circ$) набегания волн соответственно при $\omega\sqrt{H/g} = 2,4$ (длина набегающей волны $l_k = 2\pi/k_0 \approx 109$ м, период волны $\tau = 2\pi/\omega \approx 8,4$ с). На рис. 3, а, б, 4, а, б показаны амплитуды вертикальных смещений $|\zeta|/a$ и нормальных деформаций ε_n вдоль пластины. Кривые 1-3 соответствуют $L/H = 2; 5; \infty$. При нормальном падении волн

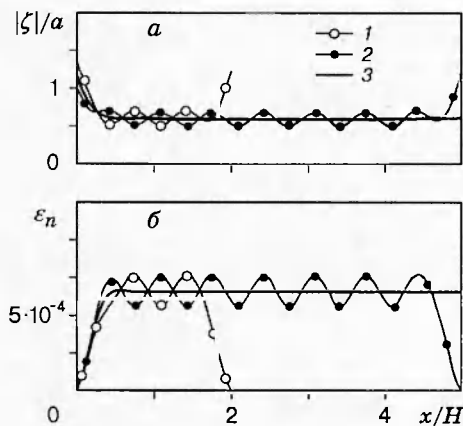


Рис. 3

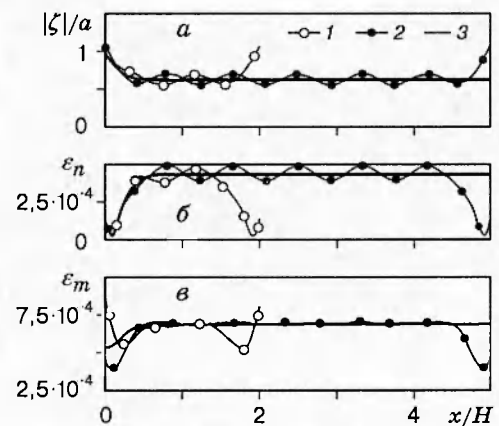


Рис. 4

на пластину конечной ширины амплитуды вертикальных смещений и деформаций имеют немонотонное поведение вдоль пластины, причем максимальные значения вертикальных смещений достигаются на концах пластины. Аналогичное поведение указанных характеристик отмечено в [3]. Выполненные расчеты для параметров, указанных в [3], показали удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Значения ϵ_n на краю пластины равны нулю в силу граничных условий (7). При косом набегании на рис. 4,6 показано также распределение максимальных деформаций ϵ_m .

Интересной особенностью косоугольного набегания волн на пластину конечной ширины в окрестности критического угла является возможность появления максимальных вертикальных смещений не на краях пластины, а в средней ее части.

При полном отражении набегающей волны упругие деформации пластины наблюдаются только на передней кромке и поведение их не зависит от ширины пластины. Подробные исследования для полубезграничной пластины даны в [4].

Точность проведенных расчетов проверялась путем последовательного увеличения числа краевых мод, для целей данной работы достаточно положить $N = 20$.

Выполненные исследования могут быть использованы также для определения спектральных характеристик гидроупругих деформаций пластины при задании конкретного спектра ветровых волн аналогично [5, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Squire V. A., Dugan J. P., Wadhams P., et al. Of ocean waves and sea ice // Annual Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
2. Букатов А. Е., Завьялов Д. Д. Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 3. С. 121–126.
3. Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // Appl. Ocean Res. 1995. V. 17, N 5. P. 301–310.
4. Fox C., Squire V. A. On the oblique reflexion and transmission of ocean waves at shore fast sea ice // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347, N 1682. P. 185–218.
5. Meylan M., Squire V. A. The response of ice floes to ocean waves // J. Geophys. Res. 1994. V. 99, N C1. P. 891–900.
6. Стурова И. В. Распространение плоских поверхностных волн над подводным порогом и погруженной пластиной // ПМТФ. 1991. № 3. С. 55–62.
7. Fox C., Squire V. A. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice // J. Geophys. Res. 1990. V. 95, N C7. P. 11629–11639.
8. Kirby J. T., Dalrymple R. A. Propagation of obliquely incident water waves over a trench // J. Fluid Mech. 1983. V. 133. P. 47–63.
9. Meylan M., Squire V. A. Finite-floe wave reflection and transmission coefficients from a semi-infinite model // J. Geophys. Res. 1993. V. 98, N C7. P. 12537–12542.
10. Fox C., Squire V. A. Strain in shore fast ice due to incoming ocean waves and swell // J. Geophys. Res. 1991. V. 96, N C3. P. 4531–4547.

Поступила в редакцию 14/XI 1997 г.