ПМТФ, № 3, 1972

УДК 533.93

ОБ УРАВНЕНИИ ТЕРМОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ В ПЛАЗМУ

И. Н. Острецов, В. А. Петросов, А. А. Поротников, Б. Б. Родневич

(Москва)

Рассматривается уравнение термоэлектронной эмиссии с горячих катодов в присутствии низкотемпературной плазмы. Получена функция распределения для величины напряженности электрического поля на поверхности катода с учетом влияния индивидуальных полей отдельных ионов, движущихся в прикатодном слое. Найдена плотность тока термоэмиссии, обусловленная флуктуациями поля, которая оказалась существенно выше, чем вычисленная по формуле Ричардсона с поправкой Шоттки.

Классическая формула Ричардсона с поправкой Шоттки для плотности тока термоэмиссии

$$j_0 = AT^2 \exp\left[-\frac{e\varphi_0}{kT} + \frac{e\sqrt{eE}}{kT}\right] \tag{1}$$

где A — термоэмиссионная постоянная, T — температура катода, e — заряд электрона, φ_0 — работа выхода, k — постоянная Больцмана, E — напряженность поля на катоде, применима, если известна величина напряженности электрического поля у поверхности катода. В случае эмиссии электронов в вакуум поле E определяется как действующее в данный момент времени поле в данной точке катода. В случае эмиссии электронов в плазму для вычисления плотности тока также часто используют формулу (1), в которой под величиной E понимают среднее электрическое поле на поверхности катода, найденное из решения уравнения Пуассона в предположениях Маккоуна. Такая процедура нахождения плотности тока эмиссии в присутствии плазмы вызывает большие сомнения. В работе [1] было предложено при вычислении тока термоэмиссии по формуле (1) учитывать помимо среднего поля индивидуальные поля отдельных ионов, движущихся в прикатодной области. Остановимся на этом подробнее.

Между «горячим» катодом и нейтральной плазмой находится область нескомпенсированного объемного заряда ионов. Ионы, двигаясь к катоду, создают на его поверхности флуктуирующее электрическое поле, величина которого в каждой точке катода зависит от числа ионов, находящихся вблизи нее, и от их расположения. Подчеркнем, что на величину электрического поля в произвольной точке катода оказывают влияние только те ионы, заряд которых не скомпенсирован для этой точки, т. е. ионы, находящиеся в слое экранирования катода. В случае низкотемпературной плазмы, когда концентрация заряженных частиц находится в диапазоне от 10^{13} до 10^{18} $см^{-3}$, лишь небольшое число ионов будет определять величину и направление электрического поля в произвольной точке катода; тогда флуктуации электрического поля на поверхности катода будут значительными и использование величины среднего поля в формуле (1) весьма проблематично, тем более что зависимость j от E сильно нелинейная.

Чтобы вычислить плотность тока термоэмиссии, используя формулу (1), строго говоря, необходимо для произвольной точки катода знать зависимость напряженности электрического поля от времени $E(t)$. Если же поле E является случайной величиной, которая в каждый определенный момент времени может принимать значения от своей минимальной величины до максимальной E_*, то можно обойтись и без знания функции $E(t)$. Такой вероятностный подход, по-видимому, можно считать приемлемым, так как поле в произвольной точке катода создается ионами, координаты которых являются случайными величинами. Таким образом, для описания процесса термоэлектронной эмиссии в плазму необходимо знать функцию распределения электрического поля у поверхности катода $f(E)$.

Найдем функцию распределения $f(E)$ при следующих предположениях:

1) рассматриваемая точка катода находится далеко от боковых границ разряда, т. е. краевые эффекты не существенны;

2) поверхность катода плоская и без шероховатостей;

3) все ионы рекомбинируют на поверхности катода;

4) вероятность нахождения иона в любой фиксированной области прикатодного пространства пропорциональна объему этой области и не зависит от того, находятся там уже ионы или нет;

5) концентрация ионов в прикатодной области считается постоянной;

6) напряженность электрического поля в данной точке катода зависит только от положения «ближайшего» к этой точке иона.

Поместим в рассматриваемую точку катода начало координат, оси x и y расположим в плоскости катода, а ось z направим перпендикулярно ей в сторону плазмы.

Если в точке с координатами $\mathbf{r}(x, y, z)$ находится положительный ион с зарядом q, то в точке $(0, 0, 0)$ он создает с учетом своего зеркального изображения поле

$$\mathbf{E} = -\frac{q\mathbf{r}}{r^2 \cdot r} - \frac{q\mathbf{r}_1}{r_1^2 r_1}$$

Абсолютная величина составляющей поля вдоль оси z равна

$$E_z = \frac{2q}{r^2}\,\frac{z}{r}$$

Рассмотрим две поверхности S_1 и S_2, уравнения которых имеют вид

$$E = 2qz\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (2)$$

$$E - dE = 2qz\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) характеризуют поверхности с постоянными составляющими поля вдоль оси z. Объем тела, заключенного внутри поверхности S_1, равен

$$V_1 = \frac{4\pi}{15}\left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2} \qquad (4)$$

Объем тела, заключенного между поверхностями S_1 и S_2, равен

$$V_2 = \frac{2\pi}{5}\,\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}\,dE \qquad (5)$$

Чтобы составляющая напряженности электрического поля вдоль оси z была в диапазоне от E до $E - dE$, необходимо выполнение двух условий: нет ни одного иона внутри поверхности S_1 и есть один ион между поверхностями S_1 и S_2, т. е.

$$p\,(E - dE \leqslant E_z \leqslant E) = f(E)\,dE = p_1 p_2 \qquad (6)$$

где p_1 — вероятность того, что внутри поверхности S_1 нет ни одного иона, p_2 — вероятность того, что между поверхностями S_1 и S_2 есть один ион.

Рассмотрим куб, центр одной из граней которого совпадает с началом координат. Пусть характерный размер этого куба таков, что его объем V_0 значительно больше объема V_1, т. е.

$$V_1 / V_0 \ll 1 \tag{7}$$

Отношение V_1 / V_0 становится равным 0.1 уже при $E \sim 10^4$ *в/см*, т. е. при таких полях, когда они еще не оказывают влияние на термоэмиссию, в то время как размер куба не превышает величины порядка радиуса Дебая; при возрастании поля E соотношение (7) тем более будет выполняться. Пусть в объеме V_0 находится N ионов. Рассмотрим, как запишутся в этом случае вероятности p_1 и p_2

$$p_1 = (1 - V_1 / V_0)^N$$

В силу неравенства (7) и учитывая, что величина N связана с концентрацией ионов в прикатодной области соотношением

$$n = N / V_0 \tag{8}$$

а V_1 выражается по формуле (4), получим

$$p_1 = \exp\left(-N\frac{V_1}{V_0}\right) = \exp\left[-\frac{4\pi n}{15}\left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right] \tag{9}$$

Легко показать, что p_2 записывается в виде

$$p_2 = N\frac{V_2}{V_0}\left(1 - \frac{V_2}{V_0}\right)^{N-1}$$

С учетом (5) и (8) получим

$$p_2 = \frac{2\pi n}{5}\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}dE\left[1 - \frac{1}{V_0}\frac{2\pi}{5}\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}dE\right] \tag{10}$$

Перепишем соотношение (6), подставив туда выражения для p_1 и p_2 из (9) и (10)

$$f(E)\,dE = \exp\left[-\frac{4\pi n}{15}\left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right]\frac{2\pi n}{5}\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}dE\left[1 - \frac{2\pi}{5V_0}\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}dE\right]$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, окончательно получим искомую функцию распределения

$$f(E) = \frac{2\pi n}{5}\frac{(2q)^{3/2}}{E^{5/2}}\exp\left[-\frac{4\pi n}{15}\left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right] \tag{11}$$

Зависимость $f(E)$ для различных концентраций показана на фигуре.

Отметим, что распределения, аналогичные (11), можно получить из несколько иных соотношений. Так, в космической астрофизике часто встречается задача, где требуется найти функцию распределения ближайшего соседа к данной материальной точке $f(r)$ при известной концентрации частиц. Чандрасекаром [2] было получено это распределение

$$f(r) = 4\pi n r^2 \exp(-4\pi n r^3 / 3)$$

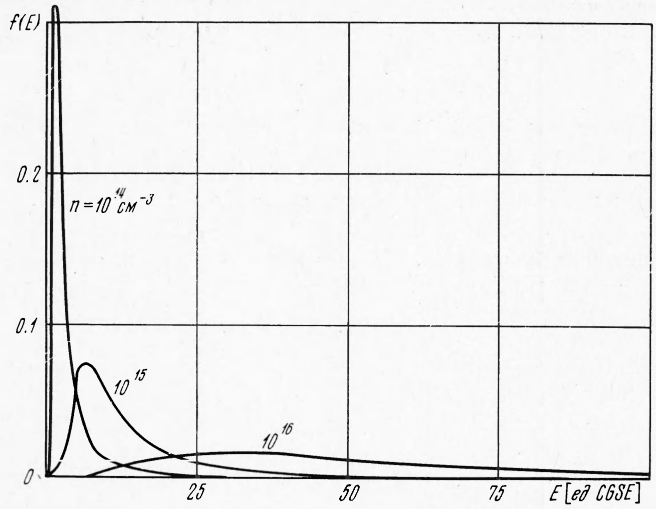
Если рассматривать случай заряженных частиц, то в данной точке ближайший сосед будет создавать электрическое поле

$$E = q / r^2$$

Тогда, используя аппарат теории вероятностей, можно получить

$$f(E) = 2\pi n \frac{q^{3/2}}{E^{5/2}} \exp\left[-\frac{4\pi n}{3}\left(\frac{q}{E}\right)^{3/2}\right] \tag{12}$$

Сравнение выражений (11) и (12) показывает, что в распределение (11) входит член $n2\sqrt{2}/5$ вместо n, т. е. в данном случае как бы происходит уменьшение эффективной концентрации частиц в $5/2\sqrt{2}$ раз (если бы не учитывалось влияние изображения иона, то уменьшение концентрации про-



изошло бы в 5 раз). Это объясняется тем, что рассматривалось распределение только нормальной к поверхности катода составляющей напряженности электрического поля, а не абсолютной величины; кроме того, учитывалось влияние частиц, расположенных лишь при $z > 0$, а не во всем пространстве. Все это приводит к тому, что эффективная концентрация $n_* = n2\sqrt{2}/5$ (без учета изображения иона $n_* = n/5$).

Обсудим вкратце предположения, при которых получена функция распределения $f(E)$. Предположение 1) справедливо для термоэмиссионных катодов при токах разряда порядка 1 *а* и выше, так как характерный размер пятна в этом случае намного больше толщины прикатодного слоя (точнее, области нескомпенсированного объемного заряда ионов). Предположение 2), вообще говоря, никогда не выполняется строго, но в работе [3] показано, что при длительном прогреве вольфрамовых электродов увеличение напряженности среднего поля, обусловленное наличием неровностей, становится равным примерно 10, по сравнению с гладкой поверхностью; в целом же картина над поверхностью катода в рассматриваемом случае не меняется, так как в отличие от среднего поля флуктуации остаются теми же. Предположение 3) не может принципиально повлиять на характер функции распределения; в случае учета отражения ионов от поверхности катода эффективная концентрация ионов в прикатодном слое возрастет. Предположение 4) достаточно хорошо выполняется вплоть до величины объема, сравнимого с эффективным объемом иона, подсчитанным через соответствующее кулоновское сечение, т. е. с $V \gtrsim 10^{-21}$ *см*^{3}. Предположение 5) должно достаточно хорошо выполняться на тех расстояниях, где величина прикатодного падения потенциала меньше температуры ионов в объеме плазмы. Так как в реальных условиях это отношение порядка нескольких единиц, то концентрация может измениться не более чем в $2 \div 3$ раза. Это несколько отразится на характере функции распределения для области малых полей, в области сильных полей изменений практически не будет. С другой стороны, возможны условия, когда это влияние может оказаться значительным. Поэтому область применимости предположения 5) требует уточнения. Предположение 6) хорошо выполняется для полей $E > 2 \cdot 10^4$ *в/см* при $n > 10^{18}$ *см*$^{-3}$, так как если подсчитать функцию распределения «второй» частицы $f_2(E)$, то оказывается, что $f_2(E) / f(E) < 0.1$ при $E > 2 \cdot 10^4$ *в/см*. Таким образом, распределение (11) достаточно хорошо описывает поведение нормальной составляющей электрического поля при $n = (10^{13} \div 10^{18})$ *см*$^{-3}$. Определим теперь среднее значение тока термоэлектронной эмиссии, подсчитанное по распределению (11) [1]

$$j = \int_0^{E^*} j_0(E) f(E)\, dE \tag{13}$$

После вычислений приближенно имеем

$$j = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right)\left[1 + \frac{4\pi nkT}{5E_*^2} \exp\left(\frac{e\sqrt{eE_*}}{kT}\right)\right]\left(1 + \frac{4kT}{e\sqrt{eE_*}}\right) \tag{14}$$

Представляет интерес зависимость j от среднего значения напряженности электрического поля $\langle E \rangle$

$$j = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right)\left[1 + \frac{3kT \langle E \rangle^{3/2}}{2\Gamma(1/3)\, e\sqrt{eE_*}^2} \exp\left(\frac{e\sqrt{eE_*}}{kT}\right)\right]\left(1 + \frac{4kT}{e\sqrt{eE_*}}\right) \tag{15}$$

где $\langle E \rangle$ определяется по формуле

$$\langle E \rangle = \int_0^{E_*} E f(E)\, dE = \left(\frac{4\pi n q^{3/2}}{15}\right)^{2/3} \Gamma(1/3) \tag{16}$$

В формулы (14) и (15) входит величина E_*, т. е. максимально возможное значение напряженности поля в данной точке. Оно зависит от того, на каком минимальном расстоянии r_* от поверхности катода ион еще отделим от него. В работе [4] его считают равным $2 \cdot 10^{-8}$ *см*. По оценкам, приведенным в [5], это расстояние можно считать равным 10^{-8} *см*. В работе [6] рассматривается расстояние r_*, равное длине волны Де-Бройля $0.9 \cdot 10^{-9}$ *см*. Расчеты по формуле (14) показали, что даже если взять наибольшее из рассмотренных значение r_*, что соответствует минимальному значению E_*, то токи эмиссии, извлекаемые из катода, оказываются значительно выше, чем вычисленные по формуле (1).

Таким образом, ввиду невозможности получения зависимости $E = E(t)$ для произвольной точки катода, так как напряженность поля в ней является случайной величиной, необходимо строить функцию распределения плотности вероятности $f(E)$ и плотность тока эмиссии с катода вы-

---

[1] В общем случае эмиссии электронов в плазму среднюю плотность тока можно вычислять, учитывая распределение электронов по энергиям $n(\mathscr{E})$ в металле и прозрачность барьера $\mathscr{D}(\mathscr{E}, E)$

$$j = e \int_0^{\infty} n(\mathscr{E})\, \mathscr{D}(\mathscr{E}, E)\, d\mathscr{E}$$