

УДК 539.374

DOI: 10.15372/PMTF202315249

ЗАДАЧА ГАДОЛИНА О ПРОЦЕССЕ СБОРКИ ДВУХСЛОЙНОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТРУБЫ

А. А. Буренин, А. В. Ткачева

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

E-mails: aaburenin@yandex.ru, 4nansi4@mail.ru

Приводится решение задачи Гадолина об эволюции напряженных состояний в технологическом процессе горячей посадки цилиндрической трубы на другую трубу. Материалы деталей сборки описываются математической моделью упруговязкопластического тела. На контактной поверхности материалов сборки задается закон трения. В качестве условия пластического течения принимается условие максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса), в котором предел текучести существенно зависит от локальной температуры. Расчеты изменяющихся со временем температурных напряжений проводятся последовательными шагами по времени в зависимости от достигнутого распределения температуры. Результаты расчетов остаточных напряжений и сформированного натяга в сборке сравниваются со значениями, полученными при численно-аналитическом решении одномерной задачи. Указаны различия характера изменения натяга в торцевой области конструкции, возникающие при проведении расчетов без учета сингулярности в краевых условиях.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, сборка с натягом, горячая посадка, температурные напряжения

Введение. В основу технологии сборки цилиндрических деталей способом горячей посадки положено предложение А. В. Гадолина [1] изготавливать стволы орудий двухслойными. Такие орудийные стволы выдерживают повышенные давления пороховых газов, что позволяет увеличить прицельную дальность стрельбы. В процессе горячей посадки холодная охватываемая деталь сборки помещается в предварительно нагретую охватывающую деталь, внутренний радиус которой в нагретом состоянии приближенно равен внешнему радиусу охватываемой детали. После остывания сборки возникает достаточно прочное соединение. В отечественной литературе задача термомеханики, описывающая данный процесс сборки с натягом, называется задачей Гадолина [2, 3]. Сборка двухслойных преднапряженных стволов орудий является примером сборки деталей способом горячей посадки. Данный технологический прием соединения цилиндрических деталей широко применяется в машиностроении, а операция горячей посадки остается одной из наиболее значимых в ряду технологий сборки с натягом.

Расчет создаваемого натяга (значений нормального напряжения на поверхности соприкосновения) в сборке и распределения напряжений по ее элементам после горячей посадки является сложной задачей. Ранее величина натяга оценивалась в результате решения соот-

Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН.

© Буренин А. А., Ткачева А. В., 2023

ветствующей задачи теории термоупругости [4, 5]. Вследствие сложности расчетов способностью материалов испытывать необратимые деформации пренебрегалось, несмотря на то что в силу наличия значительных температурных градиентов в сборке напряжения обычно достигают предела текучести. Развитие приближенных методов расчетов позволило получить ряд решений задачи Гадолина в упругопластической постановке [6–13], которые в основном являются решениями одномерной задачи теории температурных напряжений. Согласно принципу Сен-Венана рассчитанные в одномерных условиях остаточные напряжения в сборке незначительно отличаются от соответствующих значений в центральных областях, а в деформированных областях деталей сборки, примыкающих к ее торцам, отличаются существенно. В настоящей работе проверяется данное утверждение. Как правило, точные решения механических задач строятся на каждом временном шаге только с помощью кусочно-линейных пластических потенциалов. В работах [9, 10, 13] использовалось условие пластического течения максимальных касательных напряжений (условие Треска — Сен-Венана), в [3, 12] — условие максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского — Ивлева [14, 15]). При этом область пластического течения разделяется на несколько эволюционирующих подобластей, в которых напряжения достигают разных граней и ребер поверхности текучести в пространстве главных напряжений. Такие подобласти области пластичности могут появляться и исчезать как при нагружении, так и при разгрузке и остывании сборки. В случае двумерных задач в процессе приближенных численных расчетов отследить подобные изменения в расчетной области очень трудно.

Если пластический потенциал представляется в виде гладкой функции напряжений, как в случае максимальных октаэдрических напряжений (условие пластичности Мизеса [14, 15]), то область пластического течения не делится на подобласти. В этом случае отсутствует численно-аналитическое решение одномерной задачи.

В работе [16] изучались одномерные температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластического течения (пластического потенциала). Показано, что если использовать в расчетах условие пластического течения Ишлинского — Ивлева, то в каждый рассчитываемый момент времени радиальное напряжение принимает максимальное значение. То же напряжение оказывается наименьшим, если вычисления основываются на условии Треска — Сен-Венана. В расчетах, основанных на гладком условии пластического течения Мизеса, радиальное напряжение в каждый момент времени равно полусумме его значений, полученных с использованием кусочно-линейных пластических потенциалов. На основе этого результата [16] приближенно рассчитаем радиальные напряжения в сборке, используя условия пластичности Мизеса [14], и сравним их с полусуммой точных значений этих напряжений, полученных при решении одномерных задач с использованием классических кусочно-линейных пластических потенциалов.

Приближенные расчеты проводятся для вычисления распределения температурных напряжений в элементах сборки в каждый момент времени процесса горячей посадки. Особого внимания требуют расчеты в торцевых областях. Согласно данным [17–21] натяг в сборке, практически постоянный по ее длине, существенно увеличивается по мере приближения к торцу. Однако этот результат получен с помощью известных коммерческих пакетов прикладных программ [18, 19] либо с помощью разработанного программного кода [17, 21] и таким способом закрепляется в технологической практике [19]. Авторы данной работы считают такое утверждение несостоятельным.

В настоящей работе в осесимметричной постановке решается задача Гадолина о сборке двухслойной трубы способом горячей посадки. На контактной поверхности элементов сборки допускается относительное осевое смещение материалов сопрягаемых деталей. Торцевые плоскости полагаются свободными.

1. Математическая модель термдеформирования. Считаем, что испытываемые материалом в процессе его нагружения деформации d являются малыми и представляют собой сумму упругих e и пластических p составляющих:

$$d = e + p = (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})/2. \quad (1)$$

Здесь d — полные деформации; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений. Законы сохранения импульса и энергии запишем в форме [22]

$$\nabla \cdot \sigma = 0; \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \sigma : \varepsilon. \quad (3)$$

Уравнение равновесия (2) следует из уравнения движения, если в нем не учитываются силы инерции и массовые силы. В уравнении баланса внутренней энергии (3) $\xi = \xi(d, s)$ — плотность распределения внутренней энергии; $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла; ρ — плотность, ε — тензор скоростей деформаций Эйлера; t — текущее время. Термодинамический потенциал $\xi(d, s)$ является функцией параметров состояния (деформаций и плотности распределения энтропии s). Введем термодинамический потенциал $\psi = \psi(e, p, T) = \xi(e, p, T) - sT$, где $T = \partial \xi / \partial s$ — абсолютная температура. Будем считать, что плотность распределения данного термодинамического потенциала не зависит от пластических деформаций: $\psi = \psi(e, T)$, т. е. $\psi(e, T)$ — свободная энергия Гельмгольца. Тогда консервативная и диссипативная составляющие процесса деформирования разделяются и из (3) непосредственно следует [22]

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi(e, T)}{\partial e}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{T} \sigma : \varepsilon^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + \frac{1}{T} \mathbf{q}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) = \frac{d d}{dt} = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{de}{dt} + \frac{dp}{dt}, \quad \varepsilon^p = \frac{dp}{dt}.$$

Если в качестве закона теплопроводности принять его простейшую форму Фурье и для термодинамического потенциала $\psi = \psi(e, T)$ ограничиться простейшей квадратичной зависимостью, то из (4), (5) следуют соотношение определяющего закона Дюамеля — Неймана и уравнение теплопроводности соответственно:

$$\sigma = (\lambda \operatorname{tr} e - 3\alpha T_0 K \theta) I + 2\mu e; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} e^e - \sigma : \varepsilon^p) + w(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

где

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu,$$

λ, μ — параметры Ламе; I — единичный тензор; T_0 — температура деформируемого материала в его свободном состоянии (комнатная температура); α, a, δ — коэффициент линейного расширения, температуропроводность и коэффициент связанности соответственно; c — удельная теплоемкость; Δ — оператор Лапласа; $w(\mathbf{x}, t)$ — источник внутреннего тепла; $\mathbf{x}$ — радиус-вектор материальной точки тела. Часто количество тепла, производимого за счет деформирования, пренебрежимо мало по сравнению с количеством тепла, участвующего в процессе теплообмена. Тогда уравнение теплопроводности (7) упрощается:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t). \quad (8)$$

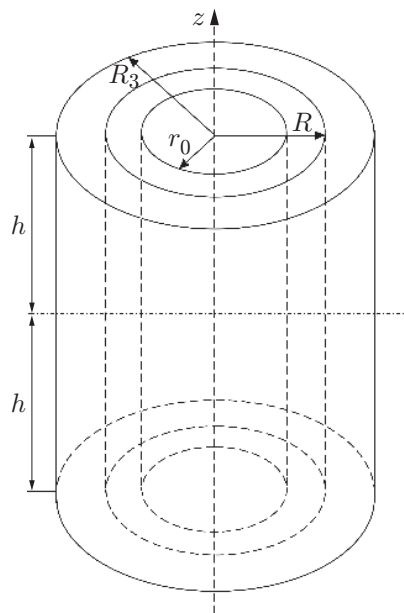


Рис. 1. Сборка в процессе посадки

Согласно (8) распределение температуры по деформируемому материалу можно считать независимо от процесса его деформирования. Данная несвязанная теория, называемая теорией температурных напряжений, используется в дальнейших расчетах.

Пластические деформации в материале накапливаются только в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружения (текучности) $f(\sigma, k) = 0$, где $k = k(\theta)$ — предел текучести деформируемого материала, соответствующий локальной температуре $\theta(\mathbf{x}, t)$. В соответствии с принципом максимума Мизеса [14, 15] функция $f(\sigma, k)$ является пластическим потенциалом, определяющим ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon^p = \frac{dp}{dt} = \varphi \frac{\partial f(\sigma, k)}{\partial \sigma}, \quad \varphi > 0. \quad (9)$$

В качестве условия пластического течения (уравнения поверхности нагружения) будем использовать обобщенное условие максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса [14])

$$f(\sigma, k) \equiv (\tau - \zeta \varepsilon^p) : (\tau - \zeta \varepsilon^p) - \frac{8}{3} k^2 = 0, \quad \tau = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma I. \quad (10)$$

Здесь ζ — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению. Зависимость предела текучести от температуры принимаем в форме

$$k = k(\theta) = k_0 y, \quad (11)$$

где

$$y = \left(\frac{\theta_r - \theta}{\theta_r} \right)^2, \quad \theta_r = \frac{T_r - T_0}{T_0},$$

T_r — температура плавления материала.

2. Сборка способом горячей посадки. Температурная задача. Рассмотрим процесс сборки двухслойной трубы. Каждая из двух деталей сборки также является трубой длиной $2h$ (рис. 1). При этом охватываемая деталь сборки имеет поперечные размеры $r_0 \leq r \leq R_1$, охватывающая — $R_2 \leq r \leq R_3$. Охватывающая труба нагревается до

температуры $T = T_*$, после чего в нее помещается охватываемая труба, температура которой равна комнатной температуре: $T = T_0$. Геометрические размеры $r = R_1$ и $r = R_2$ подбираются таким образом, чтобы непосредственно после начала процесса перераспределения тепла в элементах сборки последние имели общую контактную поверхность $r = R$ ($R_1 = R_2 = R$) (см. рис. 1). Прочное соединение образуется после остывания сборки. Материалы деталей сборки могут быть одинаковыми, но могут и значительно различаться. Как правило, $R \ll h$, однако возможна также горячая посадка для получения составного диска $R \gg h$. В данной работе рассматривается случай $R \ll h$.

С учетом отсутствия внутренних источников тепла уравнение теплопроводности (8) запишем в цилиндрической системе координат (r, φ, z) в виде

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} = a_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} \right). \quad (12)$$

Здесь $m = 1$ для охватываемой трубы, $m = 2$ для охватывающей. Начальными условиями для уравнения (12) являются условия

$$\begin{aligned} \theta_1(r, z, 0) &= 0, & r_0 \leq r \leq R, & -h \leq z \leq h, \\ \theta_2(r, z, 0) &= \theta_*, & R \leq r \leq R_3, & -h \leq z \leq h, \\ \theta_* &= T_0^{-1}(T_* - T_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Вследствие наличия теплообмена между деталями сборки и окружающей средой необходимо задать граничные условия для (12). При $t > 0$ на поверхности контакта $r = R$ имеем

$$\theta_1(R, z, t) = \theta_2(R, z, t), \quad \chi_1 \frac{\partial \theta_1(R, z, t)}{\partial r} = \chi_2 \frac{\partial \theta_2(R, z, t)}{\partial r}, \quad -h \leq z \leq h. \quad (14)$$

Согласно (14) переходным процессом ударно-теплового нагружения деталей сборки при их начальном контакте пренебрегается. В (14) χ_1, χ_2 — теплопроводность материалов сопрягаемых деталей сборки. На свободных поверхностях сборки зададим теплоотдачу в окружающую среду:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial \theta_1(r_0, z, t)}{\partial r} &= \beta_1 \theta_1(r_0, z, t), & \chi_2 \frac{\partial \theta_2(R_3, z, t)}{\partial r} &= \beta_2 \theta_2(R_3, z, t), & -h \leq z \leq h, \\ \chi_1 \frac{\partial \theta_1(r, \pm h, t)}{\partial z} &= \beta_1 \theta_1(r, \pm h, t), & r_0 \leq r \leq R, \\ \chi_2 \frac{\partial \theta_2(r, \pm h, t)}{\partial z} &= \beta_2 \theta_2(r, \pm h, t), & R \leq r \leq R_3. \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) принято, что теплоотдача в окружающую среду пропорциональна локальной температуре и коэффициенты теплоотдачи β_1, β_2 являются постоянными. Очевидно, что на плоскости симметрии сборки ($z = 0$) выполняется равенство

$$\frac{\partial \theta_1(r, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial \theta_2(r, 0, t)}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, для определения распределения температуры в элементах сборки в каждый момент времени имеем нестационарную задачу теплопроводности для уравнения (12) с начальными и краевыми условиями (13)–(15). Далее будем предполагать, что такое распределение в каждый момент времени технологического процесса известно (расчитано) вплоть до момента полного остывания сборки.

3. Сборка способом горячей посадки. Термомеханическая задача. С учетом геометрии рассматриваемой задачи Гадолина о сборке двухслойной трубы основными зависимыми переменными являются компоненты вектора перемещений $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$, $\sigma_{rz}(r, z, t)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r, z, t)$, $\sigma_{zz}(r, z, t)$. В рассматриваемом случае полные деформации связаны с перемещениями зависимостями

$$d_{rr} = u_{r,r}, \quad d_{zz} = u_{z,z}, \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, \quad d_{rz} = (u_{r,z} + u_{z,r})/2.$$

На свободных поверхностях формирующейся двухслойной трубы напряжения отсутствуют:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(r_0, z, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_3, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(r_0, z, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(R_3, z, t) = 0, \quad -h \leq z \leq h, \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r, h, t) = \sigma_{zz}^{(1)}(r, -h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(r, h, t) = \sigma_{rz}^{(1)}(r, -h, t) = 0, \quad r_0 \leq r \leq R, \\ \sigma_{zz}^{(2)}(r, h, t) = \sigma_{zz}^{(2)}(r, -h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(2)}(r, h, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(r, -h, t) = 0, \quad R \leq r \leq R_3. \end{aligned}$$

На контактной поверхности $r = R$ радиальные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений непрерывны:

$$u_r^{(1)}(R, z, t) = u_r^{(2)}(R, z, t), \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R, z, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R, z, t).$$

Проскальзывание материала на контактной поверхности ограничено возникающим трением скольжения. Если напряжения в материалах контактирующих деталей сборки не превышают предела текучести, то такие условия можно задать, следуя закону трения Кулона. При этом можно учесть вязкое трение проскальзывания:

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R, z, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t), \quad u_z^{(1)}(R, z, t) = u_z^{(2)}(R, z, t), \quad |\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t)| \leq g(z, t); \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{(1)}(R, z, t) = -\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t) = f(z, t)|\sigma_{rr}^{(2)}(R, z, t)| + \gamma(z, t)|v_z^{(1)}(R, z, t) - v_z^{(2)}(R, z, t)|, \\ |\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t)| > g(z, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь ограничение Прандтля для сухого трения покоя $g(z, t)$, параметр (коэффициент) трения скольжения Кулона $f(z, t)$ и коэффициент вязкого трения $\gamma(z, t)$ — задаваемые параметры трения. Эти параметры зависят от времени t и пространственной координаты z , поскольку являются функциями локальной температуры $\theta(z, t)$. Принимаем данную зависимость в форме

$$g(z, t) = g_0 y, \quad f(z, t) = f_0 y, \quad \gamma(z, t) = \gamma_0 y, \quad y = \left(\frac{\theta_r - \theta}{\theta_r} \right)^2, \quad \theta_r = \frac{T_r - T_0}{T_0}. \quad (18)$$

Здесь g_0 , f_0 , γ_0 — значения параметров трения при комнатной температуре T_0 ($\theta = 0$); θ_r — безразмерная температура плавления, наименьшая для материалов сопрягаемых деталей.

Граничные условия (16), (17) справедливы до тех пор, пока на части поверхности $r = R$ не будет выполнено условие (10) и не появится вязкопластическое течение материала охватывающей детали сборки. При этом при формулировке закона трения (16), (17) возникают определенные трудности. Согласно экспериментальным данным при пластическом течении материала в окрестности неподвижной жесткой шероховатой подложки касательное напряжение сопротивления перемещению (напряжение трения) практически не зависит от нормального давления и может задаваться пропорциональным пределу текучести на сдвиг (закон Зибеля). В рассматриваемом случае подложка (охватываемая деталь сборки) является не жесткой, а упругой. Поэтому исключить влияние нормального к поверхности контакта напряжения σ_{rr} на касательную компоненту σ_{rz} , возникающую за счет трения, невозможно. Проведенные численные расчеты показывают, что в двумерном случае в отличие от одномерного условия пластического течения на контактной поверхности

выполняются не одновременно на всей поверхности $r = R$. Упругопластическая граница не является цилиндрической поверхностью. Условие пластического течения на поверхности $r = R$ выполняется в течение ограниченного промежутка времени. Через некоторое время после образования области пластического течения от поверхности $r = R$ охватывающей детали отделяется разгружающая упругопластическая граница, а область течения отделяется от контактной поверхности. Контакт на поверхности сопряжения $r = R$ вновь становится упругим. Отмеченные особенности контактного взаимодействия деталей сборки при моделировании процесса посадки являются результатом проведенных расчетов. В расчетах получена зависимость параметров трения от температуры на поверхности скольжения при выполнении условий (16)–(18). В данном случае считаем, что закон трения, принимаемый в виде (16)–(18), не вносит значительных ошибок при моделировании технологической операции.

Согласно (16)–(18) в краевых условиях задачи на поверхностях $z = \pm h$ и $r = R$ вблизи линии их пересечения присутствует сингулярность: на плоскостях $z = \pm h$ напряжение $\sigma_{rz} = 0$, в то время как на цилиндрической поверхности $r = R$ данная компонента тензора напряжений отлична от нуля. При постановке краевых задач механики деформируемых тел такая ситуация возникает достаточно часто. Разработаны специальные методы расчетов [23–25], исключаяющие влияние сингулярностей при задании граничных условий на получаемые результаты. Однако известны расчеты, в которых подобная или иная сингулярность при задании граничных условий не учитывается и как следствие результаты расчетов оказываются ошибочными. Приведем примеры расчетов [17–21], результаты которых ошибочны и противоречат результатам расчетов, полученным в данной работе. Ошибочные результаты получаются при использовании известных коммерческих пакетов прикладных программ [18, 19] либо собственных программных кодов [17, 21]. Следует отметить, что при расчетах деформирования недостаточно используется метод, который основан на быстрых разложениях зависимых переменных задачи и не учитывает наличие некоторых сингулярностей. Основы этого метода разработаны в [26, 27], а применение его к задачам механики деформирования с сингулярностями в форме угловых точек обсуждается в [28].

Для рассматриваемой задачи имеется возможность исключить в расчетах отмеченную сингулярность с помощью следующего приема. Изменим закон трения (17), (18), определив параметры трения (18) с помощью зависимостей

$$g(z, t) = g_0 y \psi^\pm(z, \delta), \quad f(z, t) = f_0 y \psi^\pm(z, \delta), \quad \gamma = \gamma_0 y \psi^\pm(z, \delta), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^+(z, \delta) &= 1 - ((z - h + \delta)/\delta)^2, & h - \delta \leq z \leq h, \\ \psi^-(z, \delta) &= (z + h)(z + h - 2\delta)/\delta^2, & -h \leq z \leq -h + \delta. \end{aligned}$$

Вследствие обращения в нуль параметров трения (19) на поверхности $r = R$ при $z = \pm h$ получаем равенство нулю напряжений $\sigma_{rz}^{(1)}(R, \pm h, t)$ и $\sigma_{rz}^{(2)}(R, \pm h, t)$ на этой поверхности вблизи линий пересечения ее с плоскостями $z = \pm h$. В результате сингулярность исключается. Этот прием можно использовать также при решении других задач механики, в которых детали конструкции контактируют между собой нежестко, т. е. не запрещается их относительное перемещение.

В рассматриваемом случае цилиндрических координат уравнения равновесия (2) записываются в виде

$$\sigma_{rr,r}^{(m)} + \sigma_{rz,z}^{(m)} + r^{-1}(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}) = 0, \quad \sigma_{rz,r}^{(m)} + \sigma_{zz,z}^{(m)} = 0. \quad (20)$$

С учетом (12) зависимости закона Дюамеля — Неймана (6) представляются в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(u_{r,r}^{(m)} - p_{rr}^{(m)}) + \lambda_m(r^{-1}u_r^{(m)} + u_{z,z}^{(m)} - p_{zz}^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(r^{-1}u_r^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)}) + \lambda_m(u_{r,r}^{(m)} + u_{z,z}^{(m)} - p_{rr}^{(m)} - p_{zz}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m, \\ \sigma_{zz}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(u_{z,z}^{(m)} - p_{zz}^{(m)}) + \lambda_m(u_{r,r}^{(m)} + r^{-1}u_r^{(m)} - p_{rr}^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m, \\ \sigma_{rz}^{(m)} &= 2\mu_m((u_{r,z}^{(m)} + u_{z,r}^{(m)})/2 - p_{rz}^{(m)}).\end{aligned}\quad (21)$$

С момента посадки $t = 0$ развивается процесс теплообмена между деталями сборки, при этом увеличиваются температурные напряжения. На начальном этапе процесс деформирования описывается теорией термоупругости, пластические деформации в материалах сборки отсутствуют. В зависимостях (21) компоненты тензора пластических деформаций следует положить равными нулю. Они увеличиваются только при достижении напряжениями поверхности нагружения (текучести) (10). В рассматриваемом случае цилиндрической системы координат пластические деформации начинают увеличиваться при выполнении условия, следующего из (10):

$$(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)})^2 + (\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)})^2 + 6(\sigma_{rz}^{(m)})^2 = 8k^2/3. \quad (22)$$

Соотношения (22) служат начальным условием возникновения области вязкопластического течения. В результате численных расчетов установлено, что, так же как и в одномерной задаче [3, 9], условие (22) выполняется впервые либо на свободной поверхности $r = r_0$ охватываемой детали сборки, либо в материале охватывающей детали на поверхности сопряжения $r = R$. Конкретная поверхность определяется геометрическими размерами деталей сборки и термомеханическими свойствами материалов, из которых изготовлены данные детали.

Область вязкопластического течения и обратимого (термоупругого) деформирования разделяется упругопластическими границами. Граничную поверхность, движущуюся в область обратимого деформирования, будем называть нагружающей упругопластической границей. При движении этой поверхности увеличивается область вязкопластического течения в процессе нагружения. Упругопластическую границу будем называть разгружающей, если при ее движении в область течения за ней остается область разгрузки с постоянными во времени пластическими деформациями. Так же как и нагружающие границы, разгружающие упругопластические границы начинают движение от граничной поверхности $r = r_0$ или $r = R$ в материалах охватываемого и охватывающего элементов сборки соответственно. Данный результат проведенных численных экспериментов совпадает с выводами, следующими из точных решений подобных одномерных задач при использовании условий пластического течения при максимальных касательных напряжениях (условий Треска — Сен-Венана) [9, 10]. Если в расчетах используются условия пластического течения при максимальных приведенных напряжениях (условия Ишлинского — Ивлева), то разгружающая упругопластическая граница образуется на границе областей обратимого и необратимого деформирования, двигаясь в направлении, противоположном направлению движения последней [3, 12]. Следовательно, для рассматриваемого пластического течения при условии максимальных октаэдрических напряжений получаем тот же результат, соответствующий пластическому течению при принятии условия максимальных касательных напряжений.

В процессе нагружения области вязкопластического течения могут развиваться в обоих элементах сборки. Движение упругопластической границы от одной из поверхностей $r = r_0$ или $r = R$ не препятствует возникновению такой же граничной поверхности на другой поверхности. Такая же последовательность возникновения и исчезновения областей

вязкопластического течения характерна для разгружающих упругопластических границ. В численных расчетах температурных напряжений следует учитывать моменты появления и исчезновения областей вязкопластического течения, т. е. моменты возникновения и слияния нагружающих и разгружающих упругопластических границ.

Ассоциированный с пластическим потенциалом (10) закон пластического течения (9) позволяет записать соотношения

$$\varepsilon_m^p = \varphi_m \frac{\partial f(\sigma^{(m)}, k)}{\partial \sigma^{(m)}} = 2\varphi_m(\tau^{(m)} - \zeta \varepsilon_m^p), \quad \varepsilon_m^p = \frac{2\varphi_m}{1 + 2\zeta\varphi_m} \tau^{(m)},$$

$$\left(1 - \zeta \frac{2\varphi_m}{1 + 2\zeta\varphi_m}\right) \tau^{(m)} : \tau^{(m)} = \frac{8}{3} k_m^2. \quad (23)$$

Из (23) следует

$$\varphi_m = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{\Sigma_m^2}{4k_m^2} - 1 \right), \quad \varepsilon_m^p = \frac{1}{\zeta} \frac{\Sigma_m^2 - 4k_m^2}{\Sigma_m^2} \tau^{(m)},$$

$$\Sigma_m^2 = \frac{3}{2} \tau^{(m)} : \tau^{(m)} = \frac{3}{2} [(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)})^2 + (\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)})^2 + 6(\sigma_{rz}^{(m)})^2]. \quad (24)$$

С помощью зависимостей (24) последовательными шагами по времени Δt начиная с момента образования области вязкопластического течения рассчитываются параметры напряженно-деформированного состояния в данной области. Основными уравнениями при таких расчетах являются уравнения равновесия (20) и зависимости закона Дюамеля — Неймана (21). Распределение температуры в сборке считается известным (найденным предварительно). Если $\tilde{p}_{rr}^{(m)}$, $\tilde{p}_{\varphi\varphi}^{(m)}$, $\tilde{p}_{zz}^{(m)}$, $\tilde{p}_{rz}^{(m)}$ — рассчитанные в рассматриваемый момент времени необратимые деформации, то для следующего момента времени используем зависимости

$$p_{rr}^{(m)} = (2\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)})\varphi_m\Delta t + \tilde{p}_{rr}^{(m)}, \quad p_{\varphi\varphi}^{(m)} = (2\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)})\varphi_m\Delta t + \tilde{p}_{\varphi\varphi}^{(m)},$$

$$p_{zz}^{(m)} = (2\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)})\varphi_m\Delta t + \tilde{p}_{zz}^{(m)}, \quad p_{rz}^{(m)} = 12\sigma_{rz}^{(m)}\varphi_m\Delta t + \tilde{p}_{rz}^{(m)}. \quad (25)$$

Соотношения (25) являются следствием ассоциированного закона пластического течения при выборе в качестве пластического потенциала условий максимальных октаэдрических напряжений (условий Мизеса).

Первоначально термоупругое деформирование описывается в каждый момент времени уравнениями равновесия (20) при подстановке в них зависимостей (21), в которых компоненты пластических деформаций следует положить равными нулю. Соотношения (24), (25) используются только в расчетах для областей вязкопластического течения.

Начало расчетов соответствует моменту посадки. Расчет проводится последовательными шагами по времени. Начальное термоупругое деформирование описывается уравнениями равновесия (20) при подстановке в них зависимостей (21), в которых компоненты пластических деформаций полагаются равными нулю. В областях разгрузки такие компоненты присутствуют, но не изменяются со временем. Совокупность этих компонент формируется в ходе расчетов вязкопластического течения и используется при расчетах разгрузочных состояний.

В каждый рассматриваемый момент времени область расчетов ($r_0 \leq r \leq R_3$, $-h \leq z \leq h$) покрывается осесимметричной сеткой с числом узлов $n + 1$ по r и числом узлов $k + 1$ по z ($n = 1000$, $k = 6000$). Систему дифференциальных уравнений заменяем ее конечно-разностным аналогом, включая в него граничные условия. Сначала рассчитываем распределение температуры, используя конечно-разностный аналог уравнения теплопроводности

и метод прогонки. Имея дискретные значения температуры в узлах сетки, составляем разностные уравнения в перемещениях. Поскольку для областей обратимого деформирования, вязкопластического течения и областей разгрузки эти уравнения различаются, на каждом шаге расчетов необходимо отслеживать области зарождения течений, положение упругопластических границ, схлопывание пластических областей. Важным является момент времени, в который преодолевается порог трения на всей контактной поверхности и начинается скольжение согласно условиям (17), (18). В рассматриваемом случае в процессе посадки $\sigma_{rr}(R, z, t) < 0$, поэтому в контактных условиях отсутствует особенность и (16)–(18) рассматриваются только в качестве граничных условий для непрерывных распределений температурных напряжений. Необходимо отслеживать возникновение вторичных (обратных) пластических течений в материалах деталей сборки [3, 10, 12] при их остывании, несмотря на то что в рассматриваемых примерах при $T_* = 600^\circ\text{C}$ такие течения не возникали. Для того чтобы имели место вторичные течения, охватывающую деталь сборки следует нагреть до более высокой температуры. Данный алгоритм подробно описан в работах [3, 9, 10, 12] и не имеет существенных отличий от классических алгоритмов [29, 30].

4. Результаты расчетов. Алгоритмом проведенных расчетов предусматривается вывод результатов на любом временном шаге вычислений, что позволяет отследить изменения напряженных состояний в материалах деталей сборки и увеличение необратимых деформаций в них. В решениях задачи Гадолина наибольший интерес представляют распределение итоговых остаточных напряжений в создаваемой сборке и сформированный в нем натяг ($\sigma_{rr}(R, z)$).

Распределение остаточных напряжений по радиусу сборки представлено на рис. 2. Детали сборки имеют одинаковую толщину и изготовлены из одного и того же материала. Расчеты проводились при следующих параметрах задачи: $f_0 = 0,3$, $\beta_0 = 0,8\sqrt{\rho k_0}$, $g_0 = 0,06k_0$. Значения термомеханических параметров материалов сопрягаемых деталей, используемые в расчетах, приведены в таблице. Температуру охватывающей детали сборки принимаем равной $T_* = 600^\circ\text{C}$.

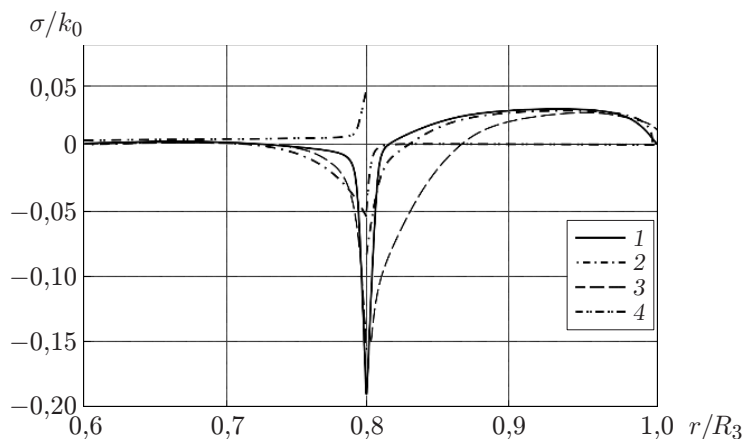


Рис. 2. Распределения по координате r остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{\varphi\varphi}$ (2), σ_{zz} (3), σ_{rz} (4) в материале сборки сталь — сталь

Значения термомеханических параметров материалов, используемых в расчетах

Материал	k_0 , Па	λ , Па	μ , Па	$\alpha \cdot 10^{-6}$	$a \cdot 10^{-6}$, м ² /с	χ , Вт/(м·К)	T_p , °C	β , Вт/(м·К)
Сталь	360	97,06	82,68	11,1	17,35	67,78	1400	7,5
Дюраль	255	41,53	27,70	22,9	50,00	188,00	660	10,0

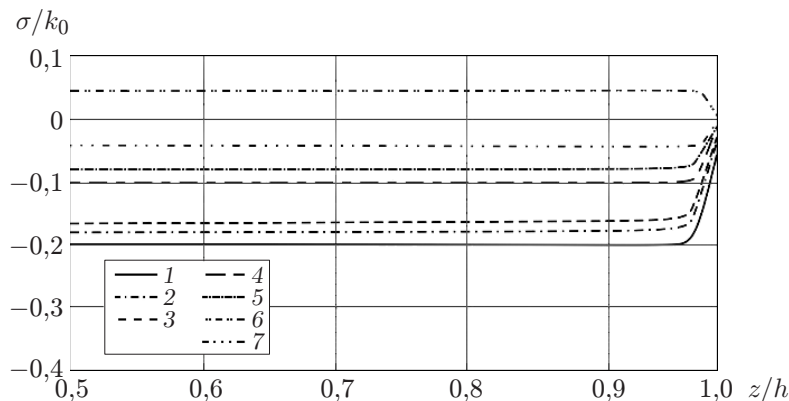


Рис. 3. Распределения по координате z остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{zz}^{(1)}$ (2), $\sigma_{zz}^{(2)}$ (3), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ (4), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ (5), $\sigma_{rz}^{(1)}$ (6), $\sigma_{rz}^{(2)}$ (7) в материале сборки сталь — сталь

На рис. 3 представлено распределение остаточных напряжений на поверхности контакта $r = R$ вдоль осевой координаты z .

Остаточные напряжения практически неизменны по длине сборки (см. рис. 3), за исключением области в окрестности торца, где они резко уменьшаются. Однако натяг в сборке сохраняется и при $z = h$ ($\sigma_r(R, h) < 0$). Отмечается только существенное его уменьшение при значении z , стремящемся к $z = h$. Величина натяга остается практически постоянной по длине сборки, за исключением областей вблизи торцов. Представляется важным провести сравнение полученных данных с результатами расчетов для одномерной задачи, когда длина сборки бесконечна или ее торцы полагаются жесткими. В этом случае при использовании в расчетах кусочно-линейных пластических потенциалов (условий пластического течения) получаем практически точное решение. Оказалось, что в рассматриваемом случае рассчитанный натяг в сборке больше натяга в условиях пластических деформаций при использовании в расчетах условия пластического течения при максимальных касательных напряжениях (условие Треска — Сен-Венана) [9] и меньше натяга, возникающего в одномерном случае в условиях максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского — Ивлева) [3]. Данный результат согласуется с выводами работы [16], в которой показано, что радиальные остаточные напряжения в упругопластической трубе при условии пластического течения Мизеса являются полусуммой напряжений, возникающих при условиях пластичности Треска — Сен-Венана и Ишлинского — Ивлева.

Уменьшение натяга при уменьшении постоянной f_0 в законе сухого трения скольжения показано на рис. 4. Заметим, что уменьшение значения коэффициента f_0 с 0,3 (см. рис. 2) до 0,1 (см. рис. 4) приводит к уменьшению остаточных температурных напряжений в материале деталей сборки. Это характерно для всех рассматриваемых случаев независимо от геометрии сборки и выбранных материалов сопрягаемых деталей.

Изменение значений параметров g_0 , β_0 незначительно влияет на остаточные напряжения, в то время как изменение значений коэффициента сухого трения f_0 оказывает существенное влияние на них. Это обусловлено тем, что процесс сборки начинается при больших градиентах температуры и трение покоя преодолевается в момент времени, близкий к моменту начала технологической операции. Проскальзывание обусловлено, главным образом, тепловым расширением (сжатием) материалов деталей сборки. При этом различие скоростей проскальзывания при значениях параметров g_0 и β_0 , используемых в расчетах, оказывается несущественным. Сухое трение скольжения, вызывающее рост касательных напряжений на контактной поверхности, оказывает значительное влияние на процесс возникновения остаточных напряжений (ср. рис. 2–5) и натяга в сборке.

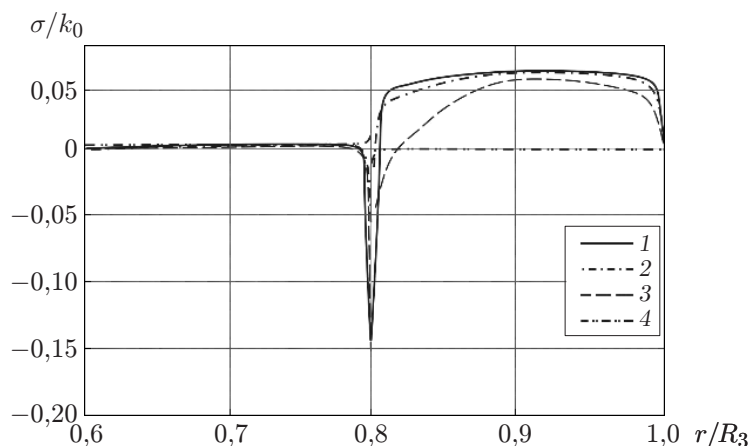


Рис. 4. Распределения по координате r остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{\varphi\varphi}$ (2), σ_{zz} (3), σ_{rz} (4) в материале сборки сталь — сталь

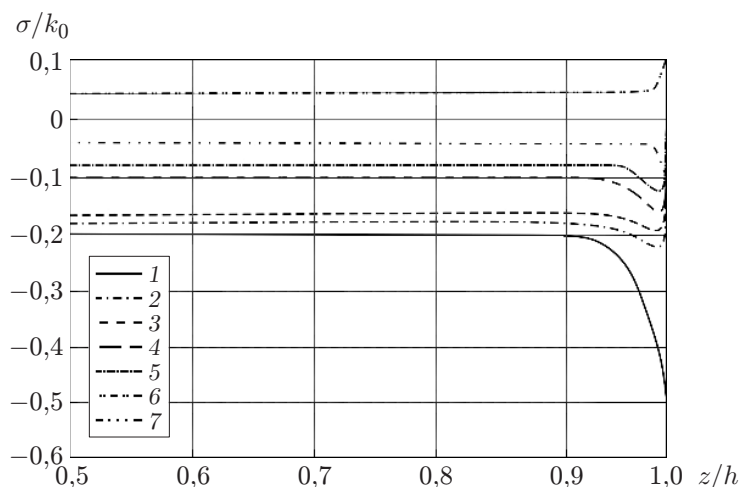


Рис. 5. Распределения по координате z остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{zz}^{(1)}$ (2), $\sigma_{zz}^{(2)}$ (3), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ (4), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ (5), $\sigma_{rz}^{(1)}$ (6), $\sigma_{rz}^{(2)}$ (7) в материале сборки сталь — сталь

Как отмечено выше, в ряде публикаций [17–21] обращается внимание на увеличение натяга в сборках различной геометрии по мере приближения к их торцам. Эти выводы противоречат результатам, полученным в данной работе (см. рис. 2), что, возможно, объясняется пренебрежением в расчетах отмеченной сингулярностью на линии пересечения поверхностей $r = R$ и $z = \pm h$. Для проверки этого предположения положим $\psi^\pm \equiv 0$ в зависимостях (19). Результаты расчетов приведены на рис. 5.

Пренебрежение сингулярностью при задании граничных условий на поверхностях $r = R$ и $z = \pm h$ приводит к увеличению натяга в торцевых областях (см. рис. 5). В работах [19, 21] указано, что сингулярность не учитывается, в [17, 22] об этом свидетельствуют приведенные графические зависимости. Результаты расчетов, представленные на рис. 5, ошибочные. Они качественно отличаются от представленных на рис. 3. Таким образом, выводы, сделанные в работах [17–21], также следует считать ошибочными, что обусловлено изначально неверной постановкой задачи, допускающей выраженную сингулярность при постановке граничных условий на поверхностях $r = R$ и $z = \pm h$.

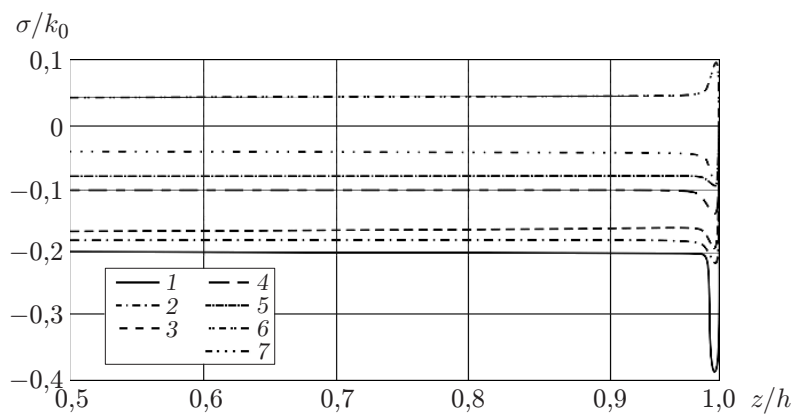


Рис. 6. Распределения по координате z остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{zz}^{(1)}$ (2), $\sigma_{zz}^{(2)}$ (3), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ (4), $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ (5), $\sigma_{rz}^{(1)}$ (6), $\sigma_{rz}^{(2)}$ (7) в материале сборки сталь — сталь

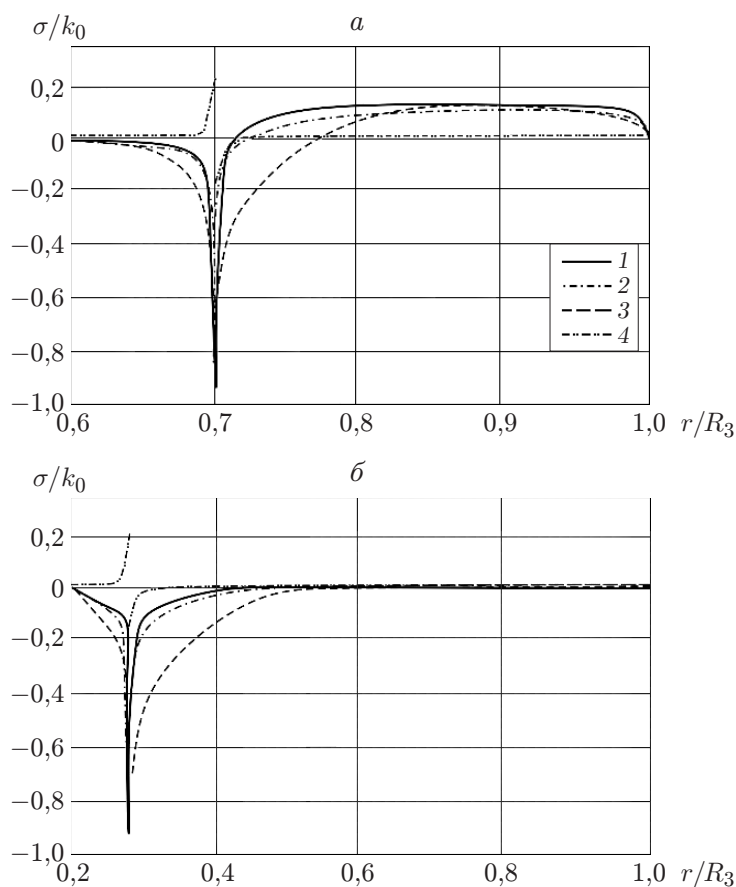


Рис. 7. Распределения по координате r остаточных напряжений σ_{rr} (1), $\sigma_{\varphi\varphi}$ (2), σ_{zz} (3), σ_{rz} (4) в материале сборки дюраль — сталь при $R/R_3 = 0,7$ (a) и $R/R_3 = 0,3$ (б)

Параметр δ в (19) характеризует влияние граничных условий в плоскостях $z = \pm h$ на рассчитываемые значения температурных напряжений (принцип Сен-Венана [31]) в материалах сборки. Зависимости, представленные на рис. 2–4, построены при значениях $\delta = 0,1h$ и незначительно отличаются от соответствующих зависимостей при $\delta = 0,05h$. Однако при $\delta = 0,01h$ (рис. 6) отмечается увеличение остаточных напряжений и натяга в сборке в торцевой области. Следовательно, при $\delta < 0,05h$ влияние сингулярности в граничном условии не устраняется с помощью предложенного приема. Из распределений остаточных напряжений, представленных на рис. 7, следует, что при различной геометрии сборок и различных материалах сопрягаемых деталей эти напряжения изменяются.

С уменьшением толщины охватываемой трубы и увеличением толщины охватывающей трубы натяг в сборке увеличивается. Когда размеры охватывающей трубы $R_3 \gg R > r_0$ значительны, на ее поверхности $r = R_3$ остаточные напряжения близки к нулю.

Заключение. Теория неустановившихся температурных напряжений используется при моделировании ряда технологических операций современного машиностроения (литья [32], консолидации расплавов [33, 34], сварки [35], поверхностного упрочнения металлоизделий [36] и др.). В таких технологиях имеется возможность пренебречь теплотворной способностью деформирования, считая количество тепла, получаемого за счет необратимого деформирования, пренебрежимо малым по сравнению с количеством тепла, получаемого от внешних источников. В ряде подобных технологических операций является оправданным предположение о малости деформации. Однако при использовании технологий интенсивного формоизменения, когда деформации невозможно считать малыми, невозможно применять теорию температурных напряжений и моделировать процесс деформирования в рамках связанных задач [37, 38] термопластичности с учетом больших упругопластических деформаций.

Следует отметить, что задачи моделирования промышленных технологий являются задачами о деформировании, когда тепловые и механические нагрузки меняются со временем. Расчеты проводятся последовательными шагами по времени с момента начала операции до момента ее завершения, при этом на каждом шаге оценивается состояние деформируемого тела. Примером подобных расчетов является решение рассмотренной в данной работе осесимметричной задачи о сборке двухслойной трубы конечной длины. Существуют программные продукты, в том числе коммерческие, позволяющие провести указанные расчеты. Однако небрежная постановка граничных условий может приводить к получению не только количественных, но и качественных погрешностей.

При выполнении операции по сборке цилиндрических конструкций способом горячей посадки рекомендуется не проводить предварительную обработку поверхностей сопряжения соединяемых деталей (зачистка, дорнование и др.), поскольку шероховатость этих поверхностей приводит к увеличению натяга в сборке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гадолин А. В. Теория орудий, скрепленных оброчами // Артиллер. журн. 1861. № 12. С. 1033–1071.
2. Попов А. А., Четобеев Д. А., Бухалов В. И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 804–812.
3. Буренин А. А., Ткачева А. В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Сер. Механика. 2020. № 3. С. 20–31.
4. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.

5. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963.
6. **Mack W.** Thermal assembly of on elastic — plastic hub a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.* 1993. V. 63. P. 42–50.
7. **Bengeri M., Mack W.** The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mech.* 1994. V. 103. P. 243–257.
8. **Kovacs A.** Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Period. Polytech. Ser. Mech. Engng.* 1996. V. 40, N 2. P. 103–112.
9. **Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.** К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Вычисл. механика сплош. сред.* 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259.
10. **Буренин А. А., Ткачева А. В.** О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2019. № 3. С. 86–99.
11. **Буренин А. А., Каинг М., Ткачева А. В.** К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Дальневост. мат. журн.* 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146.
12. **Буренин А. А., Матвеев В. П., Ткачева А. В.** Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // *Учен. зап. Комс. н/А гос. техн. ун-та.* 2018. Т. 1, № 3. С. 31–41.
13. **Дац Е. П., Ткачева А. В.** Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ.* 2016. Т. 57, № 3. С. 208–216.
14. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
15. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
16. **Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.** Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2018. № 1. С. 32–43.
17. **Pedersen N. L.** On optimization of interference fit assembly // *Structur. Multidisciplin. Optim.* 2016. V. 54. P. 349–359. DOI: 10.1007/s00158-016-1419-0.
18. **Erena D., Vázquez J., Navarro C., Talemí R.** Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // *Tribology Intern.* 2020. V. 151. 106443. DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106443.
19. **Bertini L., Santus C.** Fretting fatigue tests on shrink-fit specimens and investigations into the strength enhancement induced by deep rolling // *Intern. J. Fatigue.* 2015. V. 81. P. 179–190. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2015.08.007.
20. **Özel A., Temiz Ş., Aydın M. D., Şen S.** Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method // *Materials Design.* 2005. V. 26. P. 281–289. DOI: 10.1016/j.matdes.2004.06.014.
21. **Потянихин Д. А., Дубенко Е. М.** Расчет напряженно-деформированного состояния заклепочного соединения, полученного с помощью азотного охлаждения заклепки // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния.* 2018. № 3. С. 134–144.
22. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
23. **Пеньков В. Б., Поликарпов М. В.** Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния.* 2020. № 1. С. 34–44.

24. Рукавишников В. А. Существование и единственность R_v -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 848–856.
25. Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах упругости за счет градиентных эффектов // Докл. АН. 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591.
26. Чернышов А. Д. Метод угловых суперпозиций (краевые задачи механики и прикладной математики). Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2009.
27. Чернышов А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 13–24.
28. Горяйнов В. В., Попов М. И., Чернышов А. Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 113–130.
29. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1971.
30. Годунов С. К. Разностные схемы. Введение в теорию / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. М.: Наука, 1977.
31. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
32. Чернышов Е. А. Теоретические основы литейного производства. Теория формирования отливки / Е. А. Чернышов, А. И. Евстегнеев. М.: Машиностроение, 2015.
33. Багмутов В. П., Захаров И. Н. Моделирование процессов формирования кристаллических зон в ходе затвердевания крупного слитка // Сталь. 2006. № 6. С. 53–58.
34. Скобло С. Я. Слитки для крупных поковок / С. Я. Скобло, Е. А. Казачков. М.: Металлургия, 1985.
35. Фролов В. В. Теория сварочных процессов. М.: Высш. шк., 1988.
36. Дудкина Н. Г., Захаров И. Н. Исследования микротвердости поверхностного слоя углеродистых сталей после электромеханической обработки // Металлы. 2004. № 4. С. 64–70.
37. Бегун А. С., Ковтанюк Л. В. Вязкоупругое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристенного трения // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 5. С. 89–99.
38. Севастьянов Г. М., Буренин А. А. Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 6. С. 149–161.

*Поступила в редакцию 27/І 2023 г.,
после доработки — 17/ІІІ 2023 г.
Принята к публикации 27/ІІІ 2023 г.*