

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Д. Н. Шейдаков

Южный научный центр Российской академии наук, 344006 Ростов-на-Дону  
E-mail: sheidakov@mail.ru

На основе трехмерных уравнений нелинейной теории упругости решается задача об устойчивости прямоугольной плиты, испытывающей однородную деформацию двухосного растяжения в плоскости плиты. Лицевые грани плиты свободны от нагрузки, на боковых гранях выполняются специальные граничные условия, позволяющие разделить переменные в линеаризованных уравнениях равновесия. Для трех конкретных моделей несжимаемого материала построены критические кривые и определена область неустойчивости на плоскости параметров нагружения (кратностей удлинений материала плиты в невозмущенном состоянии равновесия). Результаты численных расчетов показывают, что для тонких плит размер и форма области неустойчивости при растягивающих напряжениях слабо зависят от соотношения длины, ширины и толщины плиты. На основе полученных результатов сформулирован простой приближенный критерий устойчивости упругой плиты при растягивающих нагрузках.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел.

**1. Невозмущенное состояние равновесия.** Рассмотрим однородную деформацию [1]

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 x_1, & X_2 &= \lambda_2 x_2, & X_3 &= \lambda_3 x_3, \\ \lambda_1 &= \text{const}, & \lambda_2 &= \text{const}, & \lambda_3 &= \text{const}, \\ 0 &\leq x_1 \leq a, & 0 &\leq x_2 \leq b, & |x_3| &\leq h/2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

упругой прямоугольной плиты, нагруженной по краям  $x_1 = 0, a$  и  $x_2 = 0, b$  распределенными нормальными усилиями интенсивностью  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. В соотношениях (1.1)  $x_1, x_2, x_3$  — декартовы координаты тела в недеформированном состоянии (лагранжевы координаты);  $X_1, X_2, X_3$  — эйлеровы декартовы координаты;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — кратности удлинений вдоль осей координат;  $a, b, h$  — длины сторон и толщина недеформированной плиты. Градиент деформации  $C$  равен

$$C = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — ортонормированный векторный базис декартовых координат. Из условия несжимаемости  $\det C = 1$  следует выражение кратности удлинения  $\lambda_3$  через параметры деформации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :  $\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$ .

Соответствующее (1.1) выражение для меры деформации Коши — Грина  $G$  имеет вид

$$G = C \cdot C^T = \sum_{k=1}^3 G_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad G_k = \lambda_k^2. \quad (1.3)$$

Для тензора напряжений Пиолы  $D$  справедливо соотношение

$$D = P \cdot C, \quad (1.4)$$

где  $P$  — тензор напряжений Кирхгофа, определяемый в случае несжимаемого изотропного материала по формуле [1]

$$P = 2W(G),G - \sigma G^{-1},$$

а при деформации двухосного растяжения плиты (1.1) равный

$$P = \sum_{k=1}^3 P_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k = (\chi_1 - \sigma \lambda_1^{-2}) \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + (\chi_2 - \sigma \lambda_2^{-2}) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + (\chi_3 - \sigma \lambda_3^{-2}) \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (1.5)$$

$$\chi_k = 2 \frac{\partial W(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $W(G_1, G_2, G_3)$  — удельная потенциальная энергия упругой плиты. Давление  $\sigma$  в невозмущенном состоянии определяется из условия отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях плиты и с учетом (1.5) равно

$$\sigma = \lambda_3^2 \chi_3. \quad (1.6)$$

Отнесенные к единице площади в недеформированной конфигурации интенсивности  $q_1$  и  $q_2$  распределенных нормальных усилий, действующих на краях плиты, определяются из (1.4) с использованием (1.2), (1.5) и (1.6):

$$q_1 = \mathbf{i}_1 \cdot D \cdot \mathbf{i}_1 \Big|_{x_1=0,a} = \lambda_1 \chi_1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1} \chi_3, \quad q_2 = \mathbf{i}_2 \cdot D \cdot \mathbf{i}_2 \Big|_{x_2=0,b} = \lambda_2 \chi_2 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1} \chi_3.$$

Легко показать, что для  $q_1$  и  $q_2$  справедливы также следующие энергетические соотношения:

$$q_1 = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}, \quad q_2 = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}. \quad (1.7)$$

**2. Линеаризованные уравнения равновесия.** Рассмотрим малое возмущение описанного выше состояния равновесия. Линеаризованные уравнения равновесия несжимаемого тела [1, 2], определяющие это возмущенное состояние, запишем в терминах недеформированной конфигурации:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \Theta = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}; \quad (2.1)$$

$$(C^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}) \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = w_1 \mathbf{i}_1 + w_2 \mathbf{i}_2 + w_3 \mathbf{i}_3; \quad (2.2)$$

$$\Theta = D^* = P^* \cdot C + P \cdot C^*, \quad C^* = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{w}, \quad D^* = \left( \frac{d}{d\eta} D(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) \right)_{\eta=0}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\Theta$  — линеаризованный тензор напряжений Пиолы;  $\overset{\circ}{\nabla}$  — набла-оператор в недеформированной конфигурации плиты;  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор в невозмущенном состоянии;  $\mathbf{w}$  — вектор добавочных перемещений.

На лицевых поверхностях плиты  $x_3 = \pm h/2$  граничные условия

$$\mathbf{i}_3 \cdot \Theta \Big|_{x_3=\pm h/2} = 0 \quad (2.4)$$

выражают отсутствие нагрузки в возмущенном состоянии.

Чтобы найти выражение для  $P^*$  в (2.3), используем тот факт, что тензоры  $P$  и  $G$  в изотропном теле соосны, т. е. их собственные векторы  $e_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) совпадают. В невозмущенном состоянии орты  $e_k$  и  $i_k$  совпадают. Из (1.3), (1.5) следует

$$P^* = \sum_{k=1}^3 (P_k^* e_k e_k + P_k e_k^* e_k + P_k e_k e_k^*); \quad (2.5)$$

$$G^* = \sum_{k=1}^3 (G_k^* e_k e_k + G_k e_k^* e_k + G_k e_k e_k^*). \quad (2.6)$$

Так как векторы  $e_k$  и  $e_k^*$  ( $k = 1, 2, 3$ ) взаимноортогональны ( $e_k \cdot e_k^* = 0$ ), из (2.5), (2.6) получаем

$$e_k \cdot P^* \cdot e_k = P_k^*; \quad (2.7)$$

$$e_k \cdot G^* \cdot e_k = G_k^*; \quad (2.8)$$

$$e_i \cdot P^* \cdot e_j = \frac{P_i - P_j}{G_i - G_j} e_i \cdot G^* \cdot e_j. \quad (2.9)$$

Здесь  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ .

Соотношения для  $P_k^*$  получим из (1.5):

$$P_k^* = \sum_{s=1}^3 \chi_{ks} G_s^* + q G_k^{-1} + \sigma G_k^{-2} G_k^*, \quad (2.10)$$

$$q = -\sigma^*, \quad \chi_{ks} = \frac{\partial \chi_k(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_s}, \quad k, s = 1, 2, 3.$$

Формулы (2.7), (2.9) дают представление всех компонент тензора  $P^*$  в базе  $e_k$  через компоненты  $G^*$ . Величины  $G_k^*$  в (2.10) находятся согласно (2.8), а сам тензор  $G^*$  равен

$$G^* = C \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{w}^T + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{w} \cdot C^T = \sum_{k,s=1}^3 \left( \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x_s} + \lambda_s \frac{\partial w_s}{\partial x_k} \right) i_k i_s. \quad (2.11)$$

С использованием (1.2), (1.5), (2.7)–(2.11) из (2.3) найдем компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы  $\Theta$  в базе  $i_k$ :

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \left( \chi_1 + \frac{\sigma}{\lambda_1^2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda_1 \chi_1^* + \frac{q}{\lambda_1}, & \Theta_{13} &= \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \left( \frac{\partial w_3}{\partial x_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \right), \\ \Theta_{12} &= \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_1 - \chi_2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \frac{\sigma}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \lambda_2^2 \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\partial w_2}{\partial x_1}, \\ \Theta_{21} &= \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_1 - \chi_2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \frac{\sigma}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \lambda_2^2 \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \frac{\partial w_1}{\partial x_2}, \\ \Theta_{22} &= \left( \chi_2 + \frac{\sigma}{\lambda_2^2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda_2 \chi_2^* + \frac{q}{\lambda_2}, & \Theta_{23} &= \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \left( \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right), \\ \Theta_{31} &= \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right), & \Theta_{32} &= \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right), \\ \Theta_{33} &= \frac{2\sigma}{\lambda_3^2} \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \lambda_3 \chi_3^* + \frac{q}{\lambda_3}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\chi_k^* = 2 \left( \lambda_1 \chi_{k1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \chi_{k2} \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \chi_{k3} \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Компоненты вектора добавочных перемещений  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  и линейризованную функцию гидростатического давления  $q$  будем искать в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, & w_2 &= W_2(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \\ w_3 &= W_3(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, & q &= Q(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \\ \gamma_1 &= \pi n/a, & \gamma_2 &= \pi m/b, & m, n &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.13)$$

что позволяет отделить переменные  $x_1$ ,  $x_2$  в уравнениях нейтрального равновесия (2.1), (2.2) и граничных условиях (2.4), сводя исследование устойчивости к решению линейной однородной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Функции (2.13) удовлетворяют следующим условиям на краях плиты (условиям первого рода):

$$\begin{aligned} w_2|_{x_1=0,a} &= 0, & w_3|_{x_1=0,a} &= 0, & \Theta_{11}|_{x_1=0,a} &= 0, \\ w_1|_{x_2=0,b} &= 0, & w_3|_{x_2=0,b} &= 0, & \Theta_{22}|_{x_2=0,b} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

С учетом (2.12), (2.13) линейризованные уравнения равновесия (2.1), (2.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} W_1'' - \left[ \left( \chi_1 + \frac{\sigma}{\lambda_1^2} + 2\lambda_1^2 \chi_{11} \right) \gamma_1^2 + \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \lambda_2^2 \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \gamma_2^2 \right] W_1 - \\ & - \left( \frac{\sigma}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{\chi_1 - \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2\chi_{12} \right) \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 W_2 + \left( \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} + 2\lambda_1^2 \chi_{13} \right) \frac{\lambda_3 \gamma_1}{\lambda_1} W_3' + \frac{\gamma_1}{\lambda_1} Q = 0, \\ & \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} W_2'' - \left[ \left( \chi_2 + \frac{\sigma}{\lambda_2^2} + 2\lambda_2^2 \chi_{22} \right) \gamma_2^2 + \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \lambda_2^2 \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \gamma_1^2 \right] W_2 - \\ & - \left( \frac{\sigma}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{\chi_1 - \chi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2\chi_{12} \right) \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 W_1 + \left( \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} + 2\lambda_2^2 \chi_{23} \right) \frac{\lambda_3 \gamma_2}{\lambda_2} W_3' + \frac{\gamma_2}{\lambda_2} Q = 0, \\ & - \left( \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} + 2\lambda_1^2 \chi_{13} \right) \frac{\lambda_3 \gamma_1}{\lambda_1} W_1' - \left( \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} + 2\lambda_2^2 \chi_{23} \right) \frac{\lambda_3 \gamma_2}{\lambda_2} W_2' + \\ & + 2 \left( \frac{\sigma}{\lambda_3^2} + \lambda_3^2 \chi_{33} \right) W_3'' - \left( \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \gamma_1^2 + \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \gamma_2^2 \right) W_3 + \frac{1}{\lambda_3} Q' = 0, \\ & \frac{1}{\lambda_3} W_3' - \frac{\gamma_1}{\lambda_1} W_1 - \frac{\gamma_2}{\lambda_2} W_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С использованием (2.12), (2.13) граничные условия (2.4) на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h/2$  запишем в скалярной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1^2 \chi_1 - \sigma}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} \left( W_1' + \frac{\lambda_3 \gamma_1}{\lambda_1} W_3 \right) = 0, & \frac{\lambda_2^2 \chi_2 - \sigma}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} \left( W_2' + \frac{\lambda_3 \gamma_2}{\lambda_2} W_3 \right) = 0, \\ & 2(\sigma/\lambda_3^2 + \lambda_3^2 \chi_{33}) W_3' - 2\lambda_3 (\lambda_1 \gamma_1 \chi_{13} W_1 + \lambda_2 \gamma_2 \chi_{23} W_2) + q/\lambda_3 = 0, & x_3 = \pm h/2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Легко показать, что краевая задача (2.15), (2.16) имеет два независимых класса решений. Один класс образован решениями, для которых прогиб  $W_3$  и линейризованная функция гидростатического давления  $Q$  являются нечетными функциями, а компоненты  $W_1$ ,  $W_2$

вектора возмущений — четными. Для решений другого класса, наоборот, компоненты  $W_1$ ,  $W_2$  являются нечетными функциями, а  $W_3$ ,  $Q$  — четными. В силу этого свойства краевой задачи (2.15), (2.16) при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь верхнюю половину плиты ( $0 \leq x_3 \leq h/2$ ). Из свойства четности и нечетности функций  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $Q$  следуют граничные условия при  $x_3 = 0$ :

$$W_1'|_{x_3=0} = W_2'|_{x_3=0} = W_3|_{x_3=0} = 0, \quad (2.17a)$$

если  $W_3$  — нечетная функция,

$$W_1|_{x_3=0} = W_2|_{x_3=0} = W_3'|_{x_3=0} = 0, \quad (2.17b)$$

если  $W_3$  — четная функция.

Следует отметить, что использование представлений

$$w_1 = W_1(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \quad w_2 = W_2(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \quad (2.18)$$

$$w_3 = -W_3(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \quad q = -Q(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2;$$

$$w_1 = W_1(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \quad w_2 = -W_2(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \quad (2.19)$$

$$w_3 = W_3(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \quad q = Q(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2;$$

$$w_1 = -W_1(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \quad w_2 = W_2(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \quad (2.20)$$

$$w_3 = W_3(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \quad q = Q(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2$$

также приводит к линейной однородной краевой задаче (2.15)–(2.17) для определения функций  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $Q$ . Решение вида (2.18) позволяет удовлетворить на краях плиты условиям второго рода (условиям скользящей заделки):

$$w_1|_{x_1=0,a} = 0, \quad \Theta_{12}|_{x_1=0,a} = 0, \quad \Theta_{13}|_{x_1=0,a} = 0, \quad (2.21)$$

$$w_2|_{x_2=0,b} = 0, \quad \Theta_{21}|_{x_2=0,b} = 0, \quad \Theta_{23}|_{x_2=0,b} = 0,$$

а решения (2.19), (2.20) — соответственно граничным условиям третьего рода

$$w_2|_{x_1=0,a} = 0, \quad w_3|_{x_1=0,a} = 0, \quad \Theta_{11}|_{x_1=0,a} = 0,$$

$$w_2|_{x_2=0,b} = 0, \quad \Theta_{21}|_{x_2=0,b} = 0, \quad \Theta_{23}|_{x_2=0,b} = 0$$

и четвертого рода

$$w_1|_{x_1=0,a} = 0, \quad \Theta_{12}|_{x_1=0,a} = 0, \quad \Theta_{13}|_{x_1=0,a} = 0,$$

$$w_1|_{x_2=0,b} = 0, \quad w_3|_{x_2=0,b} = 0, \quad \Theta_{22}|_{x_2=0,b} = 0.$$

**3. Результаты численных расчетов.** Линеаризованная краевая задача (2.15)–(2.17) решается конечно-разностным методом [3]. Эффективность метода проверялась на решении двумерной задачи устойчивости растянутого нелинейно-упругого прямоугольного бруса по отношению к малым плоским возмущениям. Эта задача получается из задачи (2.1)–(2.4) в случае использования представления (2.21) при  $\gamma_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Результаты численных расчетов сравнивались с аналитическим решением данной задачи [4]. Различие составило менее 0,01 %.

Критические кривые в плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , полученные в результате решения краевой задачи (2.15)–(2.17), обладают некоторой симметрией. В частности, кривые, соответствующие значениям  $\gamma_1 = \mu$ ,  $\gamma_2 = \nu$  и  $\gamma_1 = \nu$ ,  $\gamma_2 = \mu$  ( $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$  — некоторые

произвольные значения), переходят друг в друга в результате зеркального отражения относительно прямой  $\lambda_1 = \lambda_2$ , а критические кривые, полученные при  $\gamma_1 = \gamma_2$  ( $m = nb/a$ ), симметричны относительно этой прямой.

Расчет устойчивости прямоугольной плиты при двухосном растяжении выполнен для материала Бидермана [5, 6], удельная энергия деформации которого задается соотношением

$$W(G_1, G_2, G_3) = d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3,$$

$$d_0 \geq 0, \quad d_1 \geq 0, \quad d_3 \geq 0, \quad d_1 + d_3 \geq 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15d_1d_3} \geq 0$$

( $I_1 = \text{tr } G$ ;  $I_2 = (1/2)(\text{tr}^2 G - \text{tr } G^2)$ ), для степенного материала с потенциалом вида [7, 8]

$$W(G_1, G_2, G_3) = d(I_1 - 3)^\beta, \quad d > 0, \quad \beta > 1/2$$

и материала Огдена с потенциалом вида [9]

$$W(G_1, G_2, G_3) = d(\text{tr } G^\beta - 3), \quad d > 0, \quad \beta \neq 0.$$

Приведенные в данной работе результаты численных расчетов получены при следующих значениях констант: для материала Бидермана  $d_0 = 0$ ,  $d_1 = 27$ ,  $d_2 = -60$ ,  $d_3 = 80$ , для степенного материала  $d = 1$ ,  $\beta = 0,51$ , для материала Огдена  $d = 1$ ,  $\beta = 0,1$ . При таких значениях постоянных все три материала удовлетворяют условию Адамара [1, 6]. Следует учитывать, что умножение функции энергии  $W(G_1, G_2, G_3)$  на произвольную положительную постоянную не оказывает влияния на критическое соотношение параметров деформации  $\lambda_1, \lambda_2$ , поэтому в данной задаче удельную энергию можно считать определенной с точностью до произвольного положительного множителя.

Параметр  $\xi$  равен отношению толщины плиты  $h$  к длине наименьшей стороны  $\min\{a, b\}$  в недеформированном состоянии тела. В данной работе рассматривались только плиты с относительной толщиной  $\xi \leq 1/2$ .

Анализ устойчивости проводился для случая растягивающих осевых нагрузок ( $q_1 \geq 0$ ,  $q_2 \geq 0$ ). Используя (1.7), получим уравнения  $q_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0$  и  $q_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ , определяющие две кривые в плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , которые отсекают область сжимающих нагрузок. (На рис. 1–3 область, соответствующая сжимающим нагрузкам, заштрихована.)

На рис. 1, 2 приведены критические кривые (модель материала Бидермана) в плоскости параметров  $\delta_1 = \lambda_1 - 1$  и  $\delta_2 = \lambda_2 - 1$  для квадратной плиты, на краях которой выполняются условия первого рода (2.14), в случае, когда прогиб  $W_3$  является нечетной функцией. Для каждой кривой указано значение параметра  $n$  ( $\gamma_1 = \pi n/a$ ), которому она соответствует. На рис. 1, 2 видно, что с уменьшением толщины плиты критические кривые располагаются более плотно. Это явление обнаружено для всех рассмотренных материалов.

Для случая изгибного выпучивания (прогиб  $W_3$  — четная функция) критические кривые при  $\xi = 0,1$ ,  $a = b$  приведены на рис. 3. Согласно полученным результатам для тонких плит ( $\xi \leq 0,1$ ) отсутствуют изгибные моды низших порядков. Кроме того, область существования изгибных форм выпучивания вложена в область существования решений краевой задачи (2.15)–(2.17), для которых  $W_3$  является нечетной функцией. Следовательно, для построения области устойчивости при двухосном растяжении плиты достаточно исследовать только моды выпучивания, у которых  $W_3$  — нечетная функция, при этом не нужно находить изгибные моды неустойчивости. Результаты, полученные для других моделей материалов, подтверждают этот вывод.

На рис. 4 представлена область устойчивости для квадратной плиты (модель материала Бидермана) в случае граничных условий первого рода. Как показано на рис. 4,

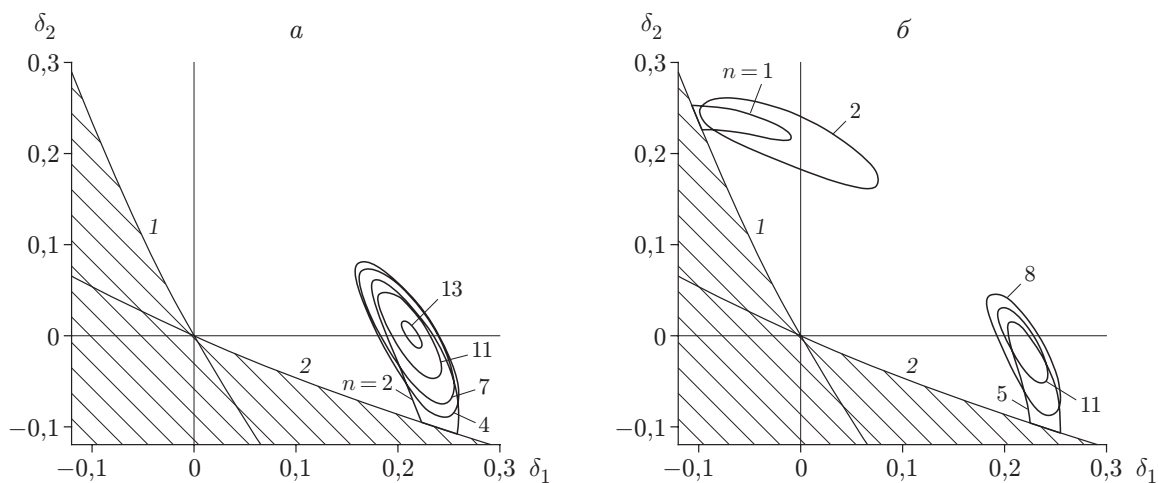


Рис. 1. Критические кривые для материала Бидермана ( $\xi = 0,1$ ):

$a - m = 1$ ;  $b - m = 3$ ;  $1 - q_1 = 0$ ;  $2 - q_2 = 0$

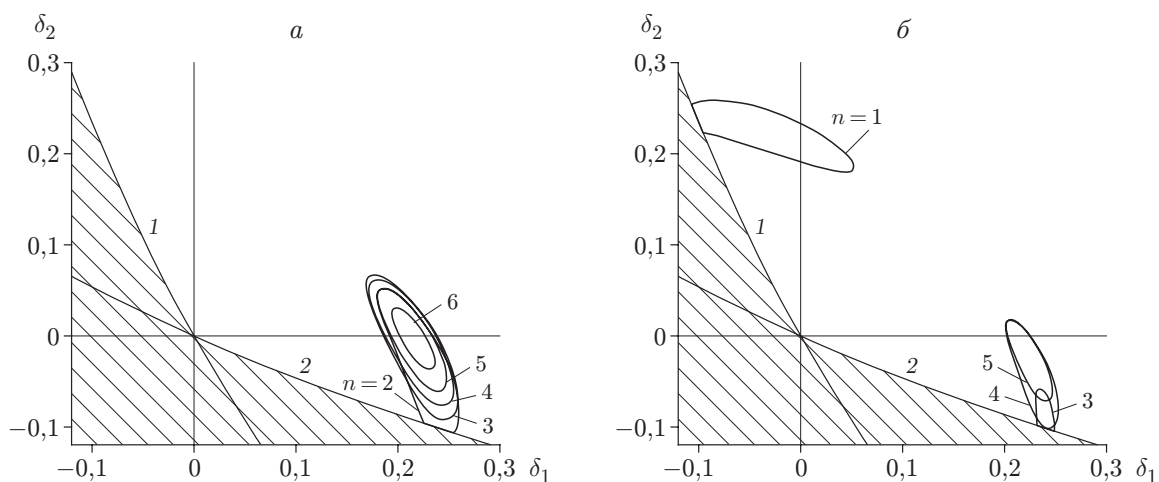


Рис. 2. Критические кривые для материала Бидермана ( $\xi = 0,2$ ):

$a - m = 1$ ;  $b - m = 2$ ;  $1 - q_1 = 0$ ;  $2 - q_2 = 0$

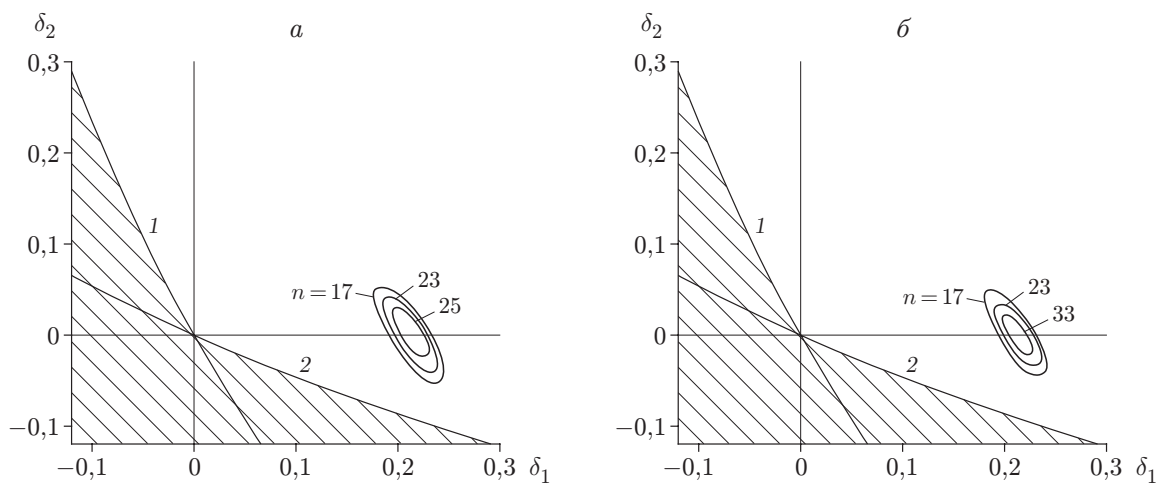


Рис. 3. Критические кривые для материала Бидермана при изгибном выпучивании:

$a - m = 1$ ;  $b - m = 3$ ;  $1 - q_1 = 0$ ;  $2 - q_2 = 0$

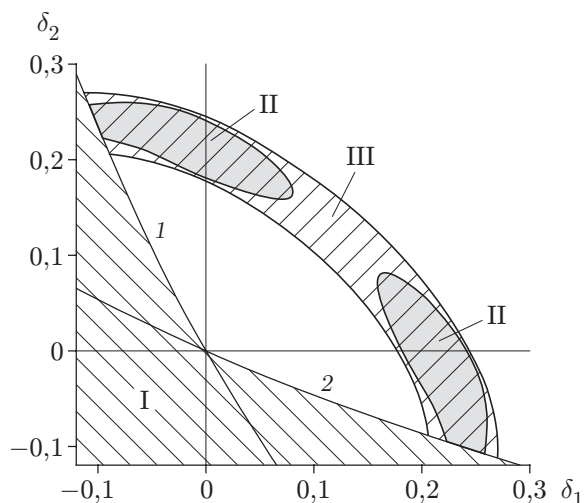


Рис. 4. Область устойчивости для материала Бидермана ( $\xi = 0,1$ ):  
 I — область, соответствующая сжимающим нагрузкам; II — область неустойчивости;  
 III — область, в которой нарушается условие выпуклости (4.1); 1 —  $q_1 = 0$ ; 2 —  $q_2 = 0$

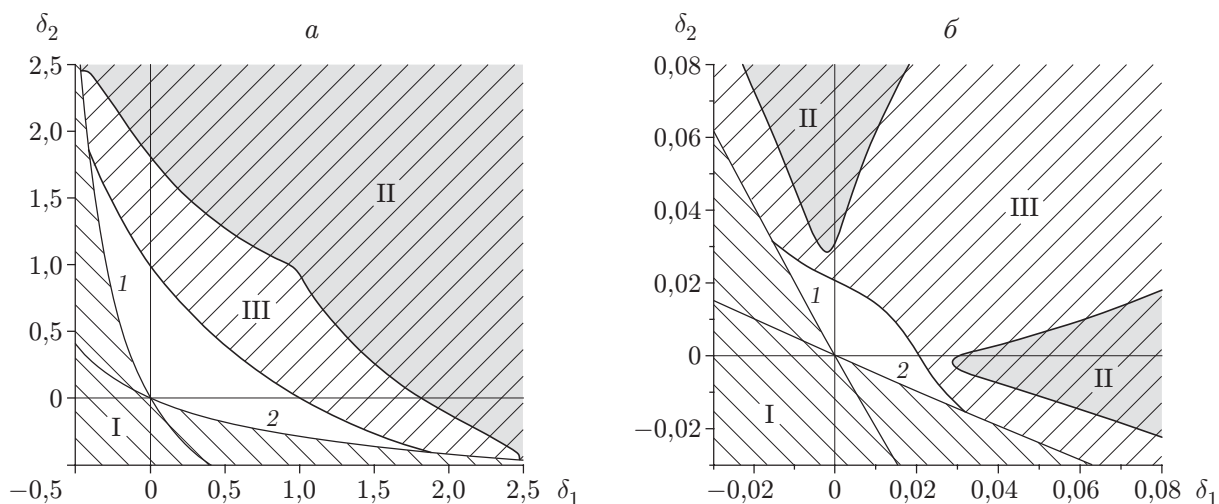


Рис. 5. Области устойчивости для материала Огдена (а) и степенного материала (б) (обозначения те же, что на рис. 4)

область устойчивости симметрична относительно прямой  $\lambda_1 = \lambda_2$ , что следует из отмеченной ранее симметрии решений краевой задачи (2.15)–(2.17). Расчеты показывают, что для тонких плит ( $\xi \leq 0,1$ ) размер и форма области устойчивости практически не зависят от толщины плиты, а также от соотношения длин сторон.

Области устойчивости при  $\xi = 0,1$ ,  $a = b$  для материала Огдена и степенного материала представлены на рис. 5.

Если на краях плиты заданы условия второго рода (скользящая заделка), то, как сказано выше, при решении линеаризованной краевой задачи используются представления (2.18) (если заданы условия третьего или четвертого рода, то используются представления (2.19) или (2.20) соответственно). При этом спектр критических кривых для  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  такой же, как у плиты, на краях которой выполняются граничные условия первого рода. В то же время решения вида (2.18)–(2.20), в отличие от (2.13), допускают существование плоских форм неустойчивости (когда одна из компонент вектора возмуще-



ний  $w$  равна нулю). Чтобы построить критические кривые, соответствующие этим модам выпучивания, нужно найти решение краевой задачи (2.15)–(2.17) при  $m = 0, n = 1, 2, \dots$  и  $m = 1, 2, \dots, n = 0$ . В результате проведенных расчетов установлено, что область устойчивости для тонкой плиты с граничными условиями первого рода почти не отличается от области устойчивости для плиты, на краях которой выполнены условия скользящей заделки либо условия третьего или четвертого рода. Перечисленные выше свойства области устойчивости для тонких плит ( $\xi \leq 0,1$ ) обнаружены у всех рассмотренных в работе моделей материалов.

**4. Критерий устойчивости.** Рассмотрим полную потенциальную энергию деформации плиты  $\Pi$  как функцию параметров  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\Pi(\lambda_1, \lambda_2) = \iiint_v W(G_1, G_2, G_3) dv.$$

Условие строгой выпуклости функции  $\Pi(\lambda_1, \lambda_2)$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda_1^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda_2^2} - \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right)^2 > 0. \quad (4.1)$$

На основании соотношений (1.7), а также того, что начальное (докритическое) напряженно-деформированное состояние является однородным, это условие можно представить в форме постулата Друкера [10]

$$dq_1 d\lambda_1 + dq_2 d\lambda_2 > 0.$$

Последнее условие эквивалентно неравенствам

$$\frac{\partial q_1}{\partial \lambda_1} > 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial q_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \lambda_2} \frac{\partial q_2}{\partial \lambda_1} > 0.$$

В случае двумерной задачи устойчивости ( $\lambda_2 = 1$ ) упругого прямоугольного бруса при растяжении существует теорема, доказанная в [4] для произвольного несжимаемого материала, согласно которой на возрастающем участке диаграммы растяжения  $q_1(\lambda_1)$  бифуркация равновесия растянутого бруса отсутствует. Так как в плоской задаче  $q_1(\lambda_1) = (abh)^{-1} \partial \Pi(\lambda_1) / \partial \lambda_1$ , то неравенство  $\partial q_1 / \partial \lambda_1 = (abh)^{-1} \partial^2 \Pi / \partial \lambda_1^2 > 0$ , т. е. условие выпуклости функции энергии  $\Pi(\lambda_1)$ , является достаточным условием устойчивости равновесия бруса при растяжении, что подтверждено результатами численных расчетов, полученными в данной работе. Ранее в задаче устойчивости растягиваемого и скручиваемого цилиндра показано, что точность критерия выпуклости потенциальной энергии вполне достаточна для практического использования [11].

В случае двухосного растяжения прямоугольной плиты представляет интерес сравнение области устойчивости деформации и области выпуклости энергии  $\Pi(\lambda_1, \lambda_2)$ . Для плиты, удовлетворяющей граничным условиям первого рода, эти области показаны на рис. 4, 5 для материалов Бидермана, Огдена и степенного материала. Видно, что в области, где выполняется условие выпуклости энергии  $\Pi$ , потери устойчивости не происходит (независимо от размеров плиты). Области, в которых нарушаются условия выпуклости и неустойчивости для тонких плит ( $\xi \leq 0,1$ ), мало отличаются от представленных на рис. 4, 5, но с ростом толщины различие размеров и формы этих областей увеличивается, так как область неустойчивости уменьшается при увеличении толщины, а размер и форма области выпуклости энергии не зависят от размеров плиты.

Результаты сравнения областей устойчивости и выпуклости энергии для других типов условий на краях плиты (условий второго (2.18), третьего (2.19) или четвертого (2.20) рода) качественно согласуются с результатами, полученными для плиты, в случае выполнения условий первого рода.

Следует отметить, что области устойчивости и выпуклости энергии имеет смысл сравнивать только при растягивающих краевых нагрузках ( $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ ). Действительно, как показывают расчеты, если хотя бы одна из нагрузок  $q_1, q_2$  является сжимающей, то потеря устойчивости в области выпуклости энергии  $\Pi(\lambda_1, \lambda_2)$  возможна. Например, квадратная плита ( $\xi = 0,1$ , модель материала Бидермана), на краях которой выполнены условия первого рода, при двухосном сжатии нагрузками одинаковой интенсивности ( $q_1 = q_2 < 0$ ) теряет устойчивость при деформации  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,9891$ , в то время как условие выпуклости (4.1) при  $\lambda_1 = \lambda_2 < 1$  выполняется всегда.

Таким образом, свойство выпуклости полной потенциальной энергии  $\Pi(\lambda_1, \lambda_2)$  является достаточным условием устойчивости при растягивающих краевых нагрузках и при решении практических задач может служить критерием устойчивости в случае двухосного растяжения прямоугольной плиты. Недостатком данного критерия является то, что область выпуклости полной потенциальной энергии и область устойчивости, полученная в результате решения линеаризованной краевой задачи (2.15)–(2.17), для некоторых моделей материалов могут существенно различаться.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
2. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 5. С. 848–852.
3. Зубов Л. М., Моисеенко С. И. Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 5. С. 78–84.
4. Зубов Л. М., Рудев А. Н. О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 786–798.
5. Бидерман В. Л. Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1958. Вып. 3. С. 40–87.
6. Зубов Л. М., Рудев А. Н. О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 6. С. 21–31.
7. Зубов Л. М., Рудев А. Н. Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 65–83.
8. Альгин В. А., Зубов Л. М. Об устойчивости упругого кольца из физически нелинейного материала // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. № 2. С. 14–16.
9. Ogden R. W. Non-linear elastic deformations. Dover: Mineola, 1997.
10. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.
11. Зубов Л. М., Шейдаков Д. Н. О влиянии кручения на устойчивость упругого цилиндра при растяжении // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 53–60.

*Поступила в редакцию 11/IV 2006 г.*