

УДК 532.592

## ВНУТРЕННИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГЛУБОКОВОДНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Н. И. Макаренко<sup>\*,\*\*</sup>, Ж. Л. Мальцева<sup>\*,\*\*</sup>,  
Е. Г. Морозов<sup>\*\*\*</sup>, Р. Ю. Тараканов<sup>\*\*\*</sup>, К. А. Иванова<sup>\*\*\*\*</sup>

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

\*\* Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
630090 Новосибирск, Россия

\*\*\* Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

\*\*\*\* Институт математики, CH-8057 Цюрих, Швейцария  
E-mails: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru, egmorozov@mail.ru,  
rtarakanov@gmail.com, ivanova.kseniya15@gmail.com

В рамках модели двухслойной слабостратифицированной жидкости рассматривается длинноволновое приближение, описывающее бегущие уединенные волны. Показано, что волновые режимы реализуются вблизи границы параметрической области сдвиговой неустойчивости расслоенного течения. Это позволяет объяснить механизм интенсивного перемешивания в придонных глубоководных слоях.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, слабая стратификация, уединенные волны.

DOI: 10.15372/PMTF20190206

**Введение.** Нелинейные модели первого и второго приближений теории мелкой воды для двухслойной жидкости [1–3] обладают рядом свойств, учитывающих специфику распространения внутренних волн в стратифицированной среде. В частности, в модели первого приближения [1] основные эволюционные уравнения могут стать негиперболическими, что характеризует возникновение сдвиговой неустойчивости на границе раздела слоев. Стационарные модели второго приближения [2, 3] описывают распространение уединенных внутренних волн в сдвиговых течениях двухслойной жидкости. В данной работе рассматривается модель внутренних стационарных волн в слабостратифицированной жидкости, являющаяся обобщением длинноволнового приближения для двухслойной жидкости [2–5] и аналогичных приближений, учитывающих непрерывную стратификацию внутри слоев [6–8]. В рамках предлагаемой модели охарактеризована параметрическая область уединенных волн и установлено, что такие волновые режимы могут реализовываться вблизи границы области сдвиговой неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Данная маргинальная устойчивость нелинейных волновых структур может объяснять механизм образования экстремально длинных вихревых серий в глубоководных придонных течениях [9, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 17-08-00085, 18-01-00648) и в рамках Междисциплинарной программы СО РАН П.1 (проект № 2). Подготовка и обработка экспериментальных данных выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-17-10149).

© Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л., Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю., Иванова К. А., 2019

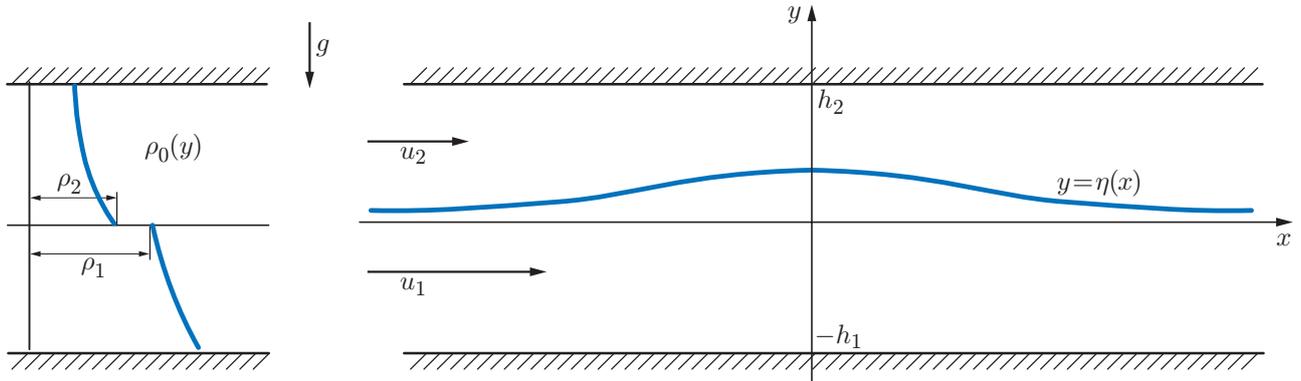


Рис. 1. Схема движения жидкости

**1. Исходные уравнения.** Рассматривается двумерное стационарное течение двухслойной жидкости в области, ограниченной горизонтальным дном  $y = -h_1$  и непроницаемой крышкой  $y = h_2$  (рис. 1). Предполагается, что в отсутствие волнового движения неизвестная граница раздела слоев  $y = \eta(x)$  находится в состоянии равновесия:  $y = 0$ . Для течений с уединенными волнами вектор скорости жидкости  $(u, v)$  в  $j$ -м слое ( $j = 1, 2$ ) при  $x \rightarrow \pm\infty$  должен стремиться к постоянному вектору  $(u_j, 0)$  ( $u_j$  — фазовая скорость волны относительно соответствующего слоя). Выражение для плотности жидкости в невозмущенном течении задается в виде

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_1 e^{-N_1^2 y/g}, & -h_1 < y < 0, \\ \rho_2 e^{-N_2^2 y/g}, & 0 < y < h_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $N_j$  — частота Брента — Вайсяля, постоянная внутри  $j$ -го слоя; величины  $\rho_2 < \rho_1$  являются предельными (сверху и снизу) значениями плотности на поверхности раздела. Указанная выше стратификация, моделирующая тонкий слой скачка плотности внутри непрерывно стратифицированной жидкости, определяется безразмерными параметрами Буссинеска  $\sigma_1, \sigma_2$  и числом Атвуда  $\mu$ :

$$\sigma_j = \frac{N_j^2 h_j}{g}, \quad \mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}.$$

Фазовые скорости волны характеризуются плотностными числами Фруда  $F_j$  и числами Лонга  $\lambda_j$ :

$$F_j^2 = \frac{\rho_j u_j^2}{g(\rho_1 - \rho_2)h_j}, \quad \lambda_j = \frac{N_j h_j}{\pi u_j} \quad (j = 1, 2),$$

которые связаны соотношениями

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi \sigma_1 (1 + \mu)}{\mu F_1^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\pi \sigma_2}{\mu F_2^2}. \quad (2)$$

Кроме того, в задаче имеется безразмерный геометрический параметр  $r = h_1/h_2$  — отношение толщин невозмущенных слоев.

Движение жидкости определено, если в каждом слое известна функция тока  $\psi_j$  для поля скоростей  $u = \psi_{jy}, v = -\psi_{jx}$ . Используя в качестве линейного масштаба толщину  $h_1$  невозмущенного нижнего слоя, а в качестве масштаба для функции тока  $\psi_j$  — расход жидкости в соответствующем слое, введем безразмерные переменные

$$(x, y, \eta) = \frac{h_1}{\pi} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}), \quad \psi_j = \frac{u_j h_j}{\pi} \bar{\psi}_j \quad (j = 1, 2).$$

Тогда функция тока должна быть решением краевой задачи для нелинейного уравнения Дюбрей-Жакоутэн — Лонга (см. [11]) в нижнем слое

$$\begin{aligned} \psi_{1xx} + \psi_{1yy} + \lambda_1^2(\psi_1 - y) &= \sigma_1(\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - 1)/2 \quad (-\pi < y < \eta(x)), \\ \psi_1(x, -\pi) &= -\pi, \quad \psi_1(x, \eta(x)) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь и далее черта в обозначениях безразмерных величин  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\psi}_j$  опущена). В верхнем слое аналогичные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{2xx} + \psi_{2yy} + \lambda_2^2(\psi_2 - ry) &= \sigma_2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - r)/2 \quad (\eta(x) < y < \pi/r), \\ \psi_2(x, \eta(x)) &= 0, \quad \psi_2(x, \pi/r) = \pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Из требования непрерывности давления всюду в области двухслойного течения следует условие, связывающее значения производных  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на границе раздела:

$$2\eta = F_2^2(\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2 - r^2) - F_1^2(\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 - 1) \quad (y = \eta(x)). \quad (5)$$

В силу уравнений (3), (4) граничное условие (5) равносильно интегральному соотношению

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\eta} e^{-\sigma_1 \psi_1} \left[ \frac{1}{2} \mu F_1^2 (\psi_{1y}^2 - \psi_{1x}^2 + 1) + \frac{1 + \mu}{\pi} \left( \psi_1 - y - \frac{e^{\sigma_1 \psi_1} - 1}{\sigma_1} \right) \right] dy + \\ + \int_{\eta}^{\pi/r} e^{-\sigma_2 \psi_2} \left[ \frac{1}{2r^3} \mu F_2^2 (\psi_{2y}^2 - \psi_{2x}^2 + r^2) + \frac{1}{\pi r} \left( \psi_2 - ry - \frac{e^{\sigma_2 \psi_2} - 1}{\sigma_2} \right) \right] dy = C, \end{aligned} \quad (6)$$

где константа интегрирования  $C$  определяется из условия вверх по потоку (т. е. вычисляется на решении  $\psi_1 = y$ ,  $\psi_2 = ry$ ,  $\eta = 0$ , соответствующем безволновому режиму двухслойного течения). Соотношение (6) представляет собой интегральный закон сохранения потока горизонтального импульса жидкости, записанный с использованием функции тока. Динамическое граничное условие в форме (5) целесообразно использовать для анализа дисперсионных свойств волнового движения, а интеграл (6) более предпочтителен при построении нелинейной длинноволновой асимптотики.

**2. Дисперсионные свойства.** Для построения карты волновых режимов в плоскости чисел Фруда  $(F_1, F_2)$  рассмотрим линейную задачу о малых возмущениях одномерного кусочно-постоянного течения стационарными волновыми пакетами  $\eta(x) = a e^{ikx}$ ,  $\psi_1 = y + W_1(y) e^{ikx}$ ,  $\psi_2 = ry + W_2(y) e^{ikx}$  с безразмерным волновым числом  $k$ . Введем вспомогательные волновые числа  $\varkappa_j$ , полагая

$$\varkappa_j^2 = \lambda_j^2 - k_j^2 - (\pi \sigma_j / 2)^2 \quad (j = 1, 2; \quad k_1 \stackrel{\text{def}}{=} rk, \quad k_2 \stackrel{\text{def}}{=} k). \quad (7)$$

Линеаризация уравнений (3)–(5) при заданных параметрах стратификации  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\mu$  приводит к дисперсионному соотношению

$$\Delta(k; F_1, F_2) \equiv F_1^2(\varkappa_1 \operatorname{ctg} \varkappa_1 + \pi \sigma_1 / 2) + F_2^2(\varkappa_2 \operatorname{ctg} \varkappa_2 - \pi \sigma_2 / 2) - 1 = 0, \quad (8)$$

из которого с учетом равенств (2), позволяющих исключить числа Лонга  $\lambda_j$  с помощью введенных выше обозначений (7), следует связь волнового числа  $k$  с числами Фруда  $F_1$ ,  $F_2$ . Спектр линейных стационарных волн образуют точки  $F = (F_1, F_2)$ , для которых дисперсионное соотношение (8) имеет, по крайней мере, один вещественный корень  $k$ . Указанное спектральное множество двоякосимметрично относительно осей координат плоскости чисел Фруда, так как дисперсионная функция  $\Delta$  четна по каждому из параметров  $F_1$ ,  $F_2$ .

В зависимости от количества корней, соответствующих точкам этого спектра, в нем выделяется последовательность вложенных модальных областей. В силу самосопряженности рассматриваемой спектральной задачи число действительных корней уравнения (8) может меняться только при переходе пары мнимых волновых чисел на вещественную ось через точку  $k = 0$ . Следовательно, границы модальных областей, описываемые уравнением  $\Delta(0; F_1, F_2) = 0$ , определяются ветвями кривой

$$F_1^2 \left[ \frac{\pi\sigma_1}{2} + \sqrt{\frac{\pi\sigma_1(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \left(\frac{\pi\sigma_1}{2}\right)^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\pi\sigma_1(1+\mu)}{\mu F_1^2} - \left(\frac{\pi\sigma_1}{2}\right)^2} \right] + \\ + F_2^2 \left[ \sqrt{\frac{\pi\sigma_2}{\mu F_2^2} - \left(\frac{\pi\sigma_2}{2}\right)^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\pi\sigma_2}{\mu F_2^2} - \left(\frac{\pi\sigma_2}{2}\right)^2} - \frac{\pi\sigma_2}{2} \right] = 1. \quad (9)$$

Отметим, что в отличие от последнего равенства в исходном дисперсионном соотношении (8) присутствуют как тригонометрическая, так и гиперболическая вещественные ветви функции комплексного котангенса, которые аналитически продолжают друг друга при достижении значения  $\varkappa_1 = 0$  или  $\varkappa_2 = 0$ . Согласно равенствам (7) смена ветвей происходит в том случае, если выполнено, по крайней мере, одно из соотношений

$$\lambda_1^2 = rk^2 + (\pi\sigma_1/2)^2, \quad \lambda_2^2 = k^2 + (\pi\sigma_2/2)^2.$$

Данные равенства сходны с дисперсионными соотношениями для мод внутренних волн в экспоненциально стратифицированных слоях жидкости  $-h_1 < y < 0$  и  $0 < y < h_2$ , подвижная граница между которыми заменена на жесткую стенку  $y = 0$ . Указанные дисперсионные соотношения получаются из формул (7), если в них положить  $\varkappa_j = m\pi$  ( $j = 1, 2$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Необычным является факт, что критические для смены ветвей значения  $\varkappa_j = 0$  соответствуют несуществующей нулевой моде с номером  $m = 0$ . Подобным образом дисперсионное соотношение (8) учитывает влияние старших мод внутренних волн на главную моду, описывающую распространение волн вдоль тонкого пикноклина, моделируемого слоем скачка плотности на профиле (1). На рис. 2 показана структура спектра главной моды в плоскости чисел Фруда  $(F_1, F_2)$ . На рис. 2,а представлена картина спектра в общем случае  $N_1 \neq 0$ ,  $N_2 \neq 0$ , на рис. 2,б для сравнения показана структура спектра главной моды в случае, когда жидкость в нижнем слое имеет постоянную плотность  $\rho_1$  (в этом случае  $N_1 = 0$  и, соответственно,  $\sigma_1 = 0$ ).

Переход к пределу  $\sigma_1 \rightarrow 0$ ,  $\sigma_2 \rightarrow 0$  от кусочно-экспоненциальной стратификации к кусочно-постоянной существенно корректирует структуру и форму спектра. Для двухслойной системы с плотностями слоев  $\rho_1$  и  $\rho_2$  дисперсионное соотношение имеет известный вид  $F_1^2 rk \operatorname{cth} rk + F_2^2 k \operatorname{cth} k = 1$ , поэтому в данном случае имеется только одна волновая мода, спектральная область которой заполняет единичный круг  $F_1^2 + F_2^2 \leq 1$ . Однако указанный предельный переход не является равномерным относительно чисел Фруда, поскольку в уравнении (9) малые параметры  $\sigma_j$  содержатся при ведущих степенях  $F_j$ . Погранслойные явления проявляются в том, что при всех сколь угодно малых  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  спектр остается некомпактным множеством вследствие наличия в нем узких полос толщиной порядка  $\sqrt{\sigma_j}$ , простирающихся до бесконечности вдоль координатных осей плоскости  $(F_1, F_2)$ . Эти полосы содержат все спектральные области старших мод внутренних волн, которые исчезают в пределе двухслойной стратификации.

Другой предельный случай имеет место, когда число Атвуда  $\mu$  также мало и имеет одинаковый порядок с параметрами Буссинеска  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Это означает, что малый скачок плотности в слабом пикноклине сравним с суммарными перепадами плотности по всей глубине прилегающих слоев. Такая ситуация типична для придонных течений в океане

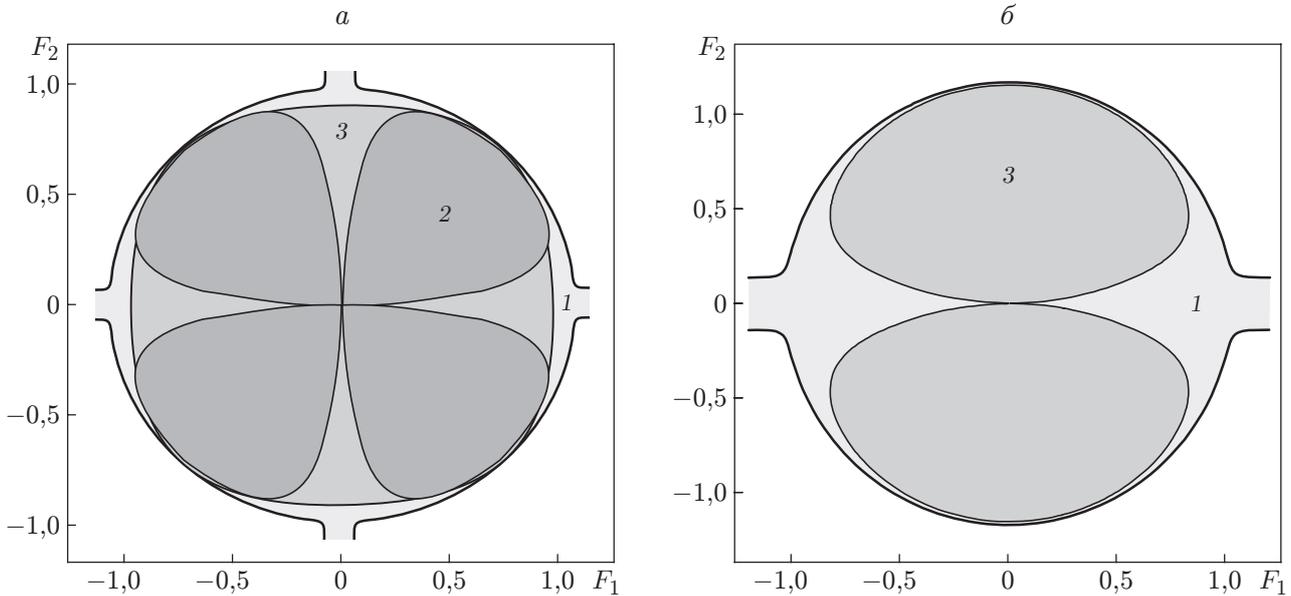


Рис. 2. Структура спектра главной волновой моды:

*a* — в случае экспоненциальной стратификации в обоих слоях ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,000\,08$ ,  $\mu = 0,003$ ), *б* — в случае, когда плотность жидкости в нижнем слое постоянна ( $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0,000\,08$ ,  $\mu = 0,003$ ); 1 — тригонометрические ветви дисперсионной функции  $\Delta$  в формуле (8), 2 — гиперболические ветви, 3 — тригонометрическая и гиперболическая ветви дисперсионной функции  $\Delta$  в (8)

вследствие экстремально слабой глубоководной стратификации. При этом переход к пределу осложнен тем, что во всех дисперсионных уравнениях содержатся отношения малых параметров  $\sigma_1/\mu$  и  $\sigma_2/\mu$ . Принимая в качестве исходного предположение, что при  $\mu \rightarrow 0$  данные отношения стремятся к единице, и переходя к этому пределу в уравнении (9), в результате получаем следующее уравнение для границ модальных областей:

$$\sqrt{\pi} F_1 \operatorname{ctg}(\sqrt{\pi}/F_1) + \sqrt{\pi} F_2 \operatorname{ctg}(\sqrt{\pi}/F_2) = 1. \quad (10)$$

Соответствующая структура спектра линейных волн приведена на рис. 3, *a* (показаны спектры первых трех мод). Следует отметить, что в этом предделе все модальные области в плоскости  $(F_1, F_2)$  остаются неограниченными. В спектре волн одно из чисел Фруда  $F_j$  может быть большим при умеренном значении другого числа Фруда за счет большой величины скачка скорости  $|u_1 - u_2|$  на границе раздела в основном течении, что может вызвать развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Известно, что для двухслойных течений с постоянными плотностями в слоях эта неустойчивость не проявляется в длинноволновом диапазоне мод, несущих основную часть энергии, если выполнено неравенство [3, 12]

$$|u_1 - u_2| < \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)/(\rho_1 \rho_2)}. \quad (11)$$

Формулировка данного критерия в безразмерных переменных приводит к неравенству

$$|\sqrt{r} F_1 - F_2| < \sqrt{1 + r},$$

из которого следует оценка положения границ области устойчивости основного течения в параметрической плоскости чисел Фруда.

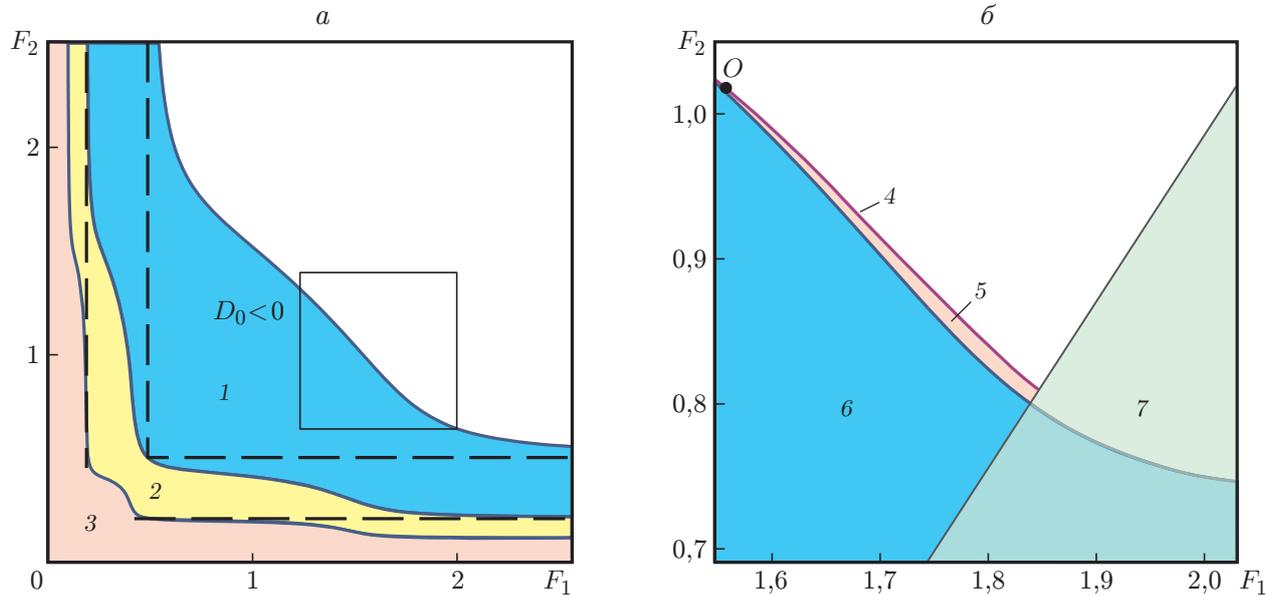


Рис. 3. Карта волновых режимов в плоскости  $(F_1, F_2)$ , описываемых уравнением (13):

$a$  — спектры первых трех мод (1–3) линейных волн,  $b$  — параметрическая область нелинейных волн (увеличенный фрагмент рис. 3, $a$ ); 4 — плавный бор, 5 — уединенные волны, 6 — линейные волны, 7 — область неустойчивости Кельвина — Гельмгольца

**3. Длинноволновое приближение.** Полагая параметры Буссинеска  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\mu$  малыми величинами одного порядка, примем  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 = \sigma_2 = \mu$  и будем использовать  $\sigma$  в качестве моделирующего параметра. При выводе модели длинноволнового приближения используется асимптотическое представление функций тока в виде

$$\psi_j(x, y) = \psi_j^{(0)}(\xi, y) + \sigma \psi_j^{(1)}(\xi, y) + O(\sigma^2) \quad (j = 1, 2), \tag{12}$$

где  $\xi = \sqrt{\sigma} x$  — медленная переменная. Коэффициенты разложения (12) находятся в результате интегрирования получаемой из (3), (4) рекуррентной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной  $y$ , в которые  $\xi$  входит в качестве параметра. В частности, коэффициенты низшего порядка выражаются через функцию  $\eta$  по формулам

$$\psi_1^{(0)} = y - \eta \frac{\sin \lambda_1(\pi + \eta)}{\sin \lambda_1(\pi + \eta)}, \quad \psi_2^{(0)} = ry - r\eta \frac{\sin \lambda_2(\pi - r\eta)}{\sin \lambda_2(\pi - r\eta)},$$

где согласно (2) можно приближенно положить  $\lambda_j = 1/(\sqrt{\pi} F_j)$ . Подставляя ряды (12) в интегральное соотношение (6) и оставляя в нем слагаемые с точностью до величин порядка  $O(\sigma^2)$ , получаем уравнение второго приближения теории мелкой воды для функции  $\eta$ , описывающей искомую форму границы раздела:

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \eta^2 \frac{D(\eta; F_1, F_2)}{Q(\eta; F_1, F_2)}. \tag{13}$$

Здесь

$$D(\eta; F_1, F_2) = \sqrt{\pi} F_1 \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi + \eta}{\sqrt{\pi} F_1} \right) + \sqrt{\pi} F_2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi - r\eta}{\sqrt{\pi} F_2} \right) + \frac{1}{3} (1 - r)\eta - 1,$$

$$2Q(\eta; F_1, F_2) = (\pi F_1^2 - 2\sqrt{\pi} F_1 \eta \operatorname{ctg} \alpha_1 + \eta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) \left( \frac{\eta + \pi}{\sin^2 \alpha_1} - \sqrt{\pi} F_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 \right) + \\ + \left( \frac{\pi F_2^2}{r^2} - 2 \frac{\sqrt{\pi} F_2}{r} \eta \operatorname{ctg} \alpha_2 + \eta^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 \right) \left( \frac{\pi - r\eta}{\sin^2 \alpha_2} - \sqrt{\pi} F_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 \right),$$

где  $\alpha_1 = (\pi + \eta)/(\sqrt{\pi} F_1)$ ;  $\alpha_2 = (\pi - r\eta)/(\sqrt{\pi} F_2)$ . Решения уравнения (13) типа уединенных волн описываются квадратурами

$$x = \pm \int_{\eta}^a \sqrt{\frac{Q(s; F_1, F_2)}{D(s; F_1, F_2)} \frac{ds}{s}}, \quad (14)$$

где амплитуда волны определяется простым корнем  $s = a$  функции  $D(s; F_1, F_2)$ , ближайшим к точке  $s = 0$ . Параметрическая область уединенных волн задается той частью плоскости  $(F_1, F_2)$ , для которой подкоренная функция  $Q/D$  в (14) положительна всюду в интервале между точками  $s = 0$  и  $s = a$ . Заметим, что в силу непрерывности функция  $Q$  остается положительной в окрестности значения  $s = 0$ , поскольку в этой точке для нее имеем

$$2Q(0; F_1, F_2) = \left[ \left( \frac{\pi F_1}{\sin \alpha_1} \right)^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha_1}{2\alpha_1} \right) \right] \Big|_{\alpha_1 = \sqrt{\pi}/F_1} + \\ + \left[ \left( \frac{\pi F_2}{r \sin \alpha_2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha_2}{2\alpha_2} \right) \right] \Big|_{\alpha_2 = \sqrt{\pi}/F_2} > 0.$$

Следовательно, для существования вещественных решений вида (14) необходимо выполнение неравенства

$$D(0; F_1, F_2) = \sqrt{\pi} F_1 \operatorname{ctg}(\sqrt{\pi}/F_1) + \sqrt{\pi} F_2 \operatorname{ctg}(\sqrt{\pi}/F_2) - 1 > 0.$$

Сравнение этого неравенства с формулой (10) показывает, что режимы типа уединенных волн реализуются в области, сверхкритической по отношению к спектру линейных волн. Внешней границей области существования уединенных волн служит кривая, являющаяся диаграммой решений типа плавного бора для уравнения (13). Указанные решения получаются для чисел Фруда  $F_1, F_2$ , для которых имеется двукратный ненулевой корень  $s = a$  функции  $D(s; F_1, F_2)$ . Диаграмма бора касается границы спектра линейных волн в точке  $O$ , соответствующей нулевой амплитуде волны  $a = 0$  и являющейся точкой бифуркации, по мере удаления от которой амплитуда бора медленно увеличивается. Уединенные волны, реализующиеся для точек  $(F_1, F_2)$  вблизи диаграммы плавного бора (см. рис. 3), имеют уплощенные вершины типа плато. При этом амплитуда волны является ограниченной, но может неограниченно возрастать эффективная масса жидкости, вовлеченной в движение в протяженной столообразной волне. Малая ширина параметрической области существования уединенных волн свидетельствует об их слабой амплитудной дисперсии в рассматриваемой гидродинамической системе.

Волны малой амплитуды могут быть приближенно описаны в явном виде с использованием упрощенного слабонелинейного варианта уравнения (13), имеющего вид

$$\left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \eta^2 \frac{D_0 + D_1\eta + D_2\eta^2}{Q(0; F_1, F_2)}, \quad (15)$$

где  $D_0, D_1, D_2$  — первые три коэффициента в разложении аналитической функции  $D(\eta; F_1, F_2)$  по степеням  $\eta$ . По этим коэффициентам однозначно определяются вещественные корни  $a_j(F_1, F_2)$  ( $j = 1, 2$ ) квадратного трехчлена в числителе правой части (15), и профиль уединенной волны дается формулой

$$\eta(x) = a \frac{1 - \operatorname{th}^2 kx}{1 - \theta^2 \operatorname{th}^2 kx}, \quad k = \frac{a\sqrt{3/q_0}}{2\theta},$$

где  $q_0 = Q(0; F_1, F_2)$ ;  $a = a_1$ ;  $\theta^2 = a_1/a_2 < 1$ . Плавный бор (внутренний фронт) соответствует кратному корню  $a = a_1 = a_2$  и имеет профиль функции гиперболического тангенса

$$\eta(x) = \frac{a}{2} (1 + \operatorname{th} kx), \quad k = \frac{a\sqrt{3/q_0}}{2}.$$

Частичное наложение параметрической области уединенных волн на зону неустойчивости Кельвина — Гельмгольца приводит к тому, что рассматриваемые волны могут служить генератором сдвиговой неустойчивости течений вследствие локального увеличения сдвига скорости, индуцированного проходящей волной. Этот вывод следует из устанавливаемого теорией двухслойной мелкой воды [1] нелинейного критерия устойчивости, который по форме аналогичен неравенству (11). Данный критерий формулируется с использованием переменной разности  $|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|$  средних по глубине скоростей жидкости  $\bar{u}_j(x, t)$  в слоях и переменных толщин слоев  $\bar{h}_1(x, t) = h_1 + \eta(x, t)$ ,  $\bar{h}_2(x, t) = h_2 - \eta(x, t)$ . В этих обозначениях неравенство (11) является условием гиперболичности нелинейных уравнений гидростатической модели двухслойной мелкой воды. Согласно данному условию стратифицированное течение может оказаться локально неустойчивым в результате потери гиперболичности эволюционных уравнений в окрестности вершины уединенной волны, даже если набегающий кусочно-постоянный поток перед волной удовлетворял этому условию устойчивости. Указанный механизм неустойчивости течения, индуцированной нелинейной волной, наблюдался в лабораторных экспериментах [13, 14].

**4. Внутренние волны в придонных стратифицированных течениях в разломе Романш.** В 2010–2013 гг. проведены натурные экспериментальные исследования [9, 15–17] на научно-исследовательских судах “Академик Иоффе” и “Академик Сергей Вавилов” в разломе Романш (экваториальная часть Атлантического океана). Этот разлом в Срединно-Атлантическом хребте является естественным каналом, обеспечивающим перенос глубинных холодных вод антарктического происхождения из западной Атлантики в восточные бассейны экваториальной зоны океана [18]. Приток холодной ( $0,501^\circ\text{C}$ ) донной воды в разлом Романш происходит на глубине 4500 м через два русла в западной и южной частях входного каньона. Ширина верхней части южного канала, ориентированного меридионально, составляет 7 км, глубина — 400 м, ширина узкой донной части приближенно равна 200 м. Струи течения в поперечном сечении южного канала показаны на рис. 4,а. На рис. 4,б приведены вертикальные профили продольной скорости потока в южном канале (штриховые линии соответствуют положению станций судового зондирования 2509, 2511 и 2513). Скорости потока в южном канале, измеренные с борта судна непосредственно над порогом (4550 м), превышали 20 см/с; далее по склону, где донная вода стекает вниз на расстояние, равное 100 м, скорости придонного течения достигали 45 см/с. Температурная стратификация морской воды показана на рис. 4,б. Аномально большие вертикальные градиенты температуры обнаружены между глубинами 4300 и 4500 м, что свидетельствует о сильном перемешивании воды в этой области. Стационарная донная станция, установленная на глубине 4720 м для регистрации параметров потока в придонном слое толщиной 350 м, работала автономно в течение 6 мес и зафиксировала цуги интенсивных внутренних волн вдоль изотермы  $0,85^\circ\text{C}$  [9]. Указанная изотерма отделяет нижний слой тяжелой холодной воды от расположенного выше слоя менее холодной воды. Внутренние волны возникают в результате нестационарных процессов, происходящих в области непосредственно за донным порогом, где была выполнена станция судового зондирования 2509 [16] (см. рис. 4,б). Распространение внутренних волн сопровождалось возникновением экстремально длинных серий вихрей Кельвина — Гельмгольца, интенсивность которых менялась со временем под действием приливной модуляции. На рис. 5 показаны рассчитанный по формуле (14) гладкий профиль широкой уединенной волны ти-

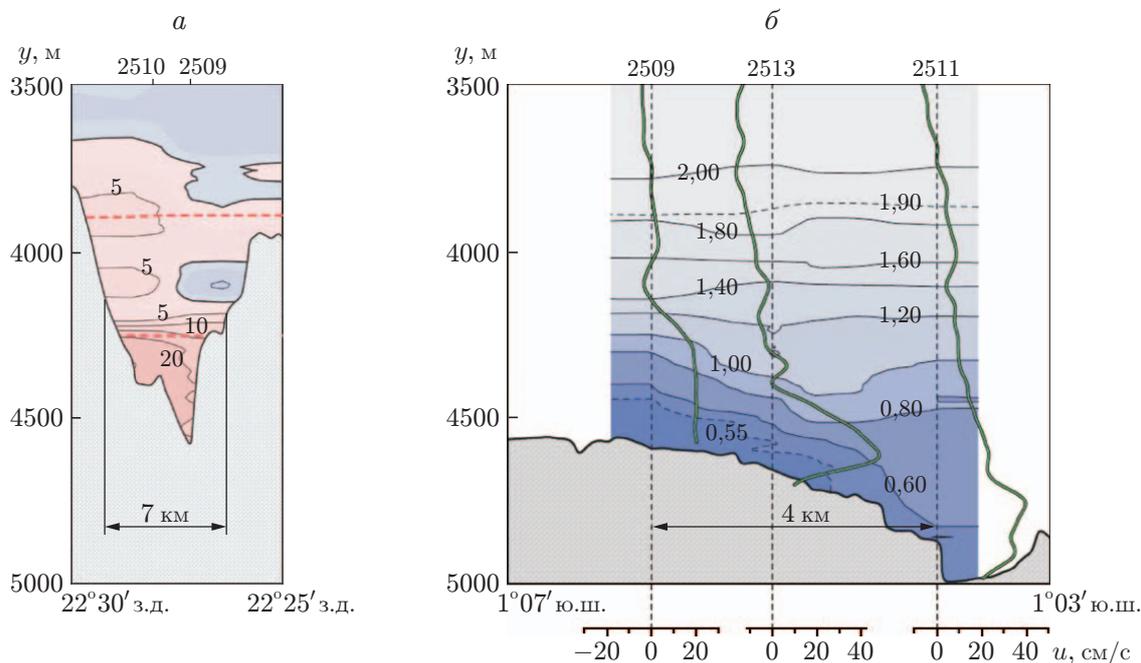


Рис. 4. Течение в южном русле входного каньона в разломе Романш: *a* — распределение скорости  $u$  (см/с) в поперечном сечении; *b* — распределение потенциальной температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) в продольном сечении (жирные линии — профили продольной скорости, штриховые — положение станций зондирования 2509, 2511, 2513)

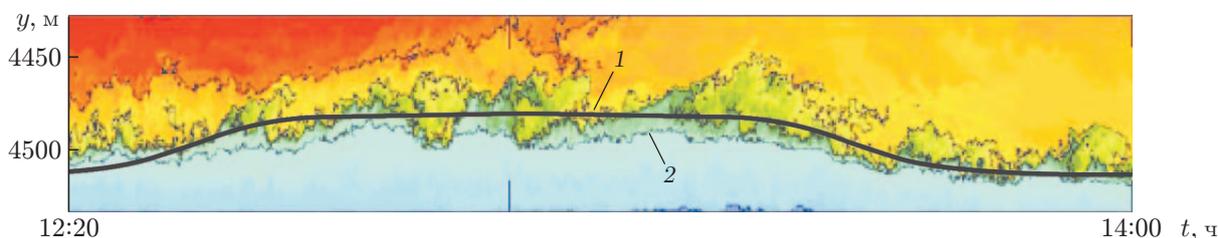


Рис. 5. Расчетный профиль уединенной внутренней волны типа плато (1) и измеренная изотерма  $0,85^{\circ}\text{C}$  (2) в придонном течении в разломе Романш ( $t$  — время регистрации волны донной станцией 4.12.2013 г.)

па плато, измеренная изотерма  $0,85^{\circ}\text{C}$ , а также серия вихрей, вызывающих интенсивное перемешивание над уплощенной вершиной волны.

**Заключение.** В работе рассмотрена модель второго приближения теории длинных волн для слабостратифицированной двухслойной жидкости, описывающая уединенные волны в пикноклине с малым перепадом плотности. Расчеты по этой модели показывают, что указанное приближение может быть использовано для описания волновых явлений в глубоководных придонных течениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. Овсянников Л. В. Второе приближение в теории мелкой воды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 2. С. 175.

3. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Miyata M.** An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer*. 1985. V. 23, N 2. P. 43–48.
5. **Choi W., Camassa R.** Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 396. P. 1–36.
6. **Voronovich A. G.** Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 474. P. 85–94.
7. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Асимптотические модели внутренних стационарных волн // *ПМТФ*. 2008. Т. 49, № 4. С. 151–161.
8. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. № 2. С. 125–145.
9. **Van Haren H., Gostiaux L., Morozov E., Tarakanov R.** Extremely long Kelvin — Helmholtz billow trains in the Romanche fracture zone // *Geophys. Res. Lett.* 2014. V. 44. P. 8445–8451.
10. **Makarenko N., Maltseva J., Morozov E., et al.** Internal waves in marginally stable abyssal stratified flow // *Nonlinear Processes Geophys.* 2018. V. 25. P. 659–669.
11. **Yih C. S.** Stratified flows. N. Y.: Acad. Press, 1980.
12. **Thorpe S. A.** Laboratory observations of secondary structures in Kelvin — Helmholtz billows and consequences for ocean mixing // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1985. V. 34. P. 175–190.
13. **Гаврилов Н. В.** Неподвижные в лабораторной системе координат внутренние уединенные волны и плавные боры // *ПМТФ*. 1994. Т. 35, № 1. С. 29–34.
14. **Grue J., Jensen A., Rusås P.-O., Sveen J. K.** Breaking and broadening of internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 413. P. 181–217.
15. **Морозов Е. Г., Тараканов Р. Ю., Ляпидевский В. Ю., Макаренко Н. И.** Глубоководные водопады в разломах Романш и Чейн // *Докл. АН*. 2012. Т. 446, № 5. С. 575–579.
16. **Тараканов Р. Ю., Макаренко Н. И., Морозов Е. Г.** Поток Антарктической донной воды в западной части разлома Романш по данным измерений в октябре 2011 г. // *Океанология*. 2013. Т. 53, № 6. С. 737–749.
17. **Tarakanov R. Y., Morozov E. G., Van Haren H., et al.** Structure of the deep spillway in the western part of the Romanche fracture zone // *J. Geophys. Res.: Oceans*. 2018. V. 123, N 11. P. 8508–8531.
18. **Morozov E., Demidov A., Tarakanov R., Zenk W.** Abyssal channels in the Atlantic ocean: water structure and flows. Dordrecht: Springer, 2010.

*Поступила в редакцию 26/XI 2018 г.,  
после доработки — 26/XI 2018 г.  
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*