

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ

УДК 623.41:623.45

ПРОГРЕССИВНО ГОРЯЩИХ КОНСТРУКТИВНЫХ ФОРМ

А. М. Липанов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426001 Ижевск

Рассматривается класс твердотопливных элементов, позволяющих осуществить такое регулирование поверхности горения твердотопливных элементов в зависимости от величины сгоревшего свода, при котором эта зависимость может быть не только линейной, как, например, для цилиндров внутреннего горения, или квадратичной, как для сферических элементов горения, но и любой требуемой степени прогрессивности. Приведены метод решения задачи и результаты расчетов.

Известные конструктивные элементы внутреннего горения (цилиндры с бронированными боковой и торцовыми поверхностями, полусферы с бронированной наружной поверхностью и большей частью плоской поверхностью) позволяют получить прогрессивную ($\partial S/\partial l > 0$) линейную или квадратичную зависимость поверхности горения S от величины сгоревшего свода l . Однако на практике могут встречаться случаи, когда эта связь может варьироваться и выражаться дробной степенной зависимостью или вообще произвольно прогрессивной. Поэтому необходимо установить конфигурацию таких твердотопливных элементов (ТЭ) и разработать метод расчета их поверхности горения. В данной работе остановимся на изложении метода расчета величины поверхности горения прогрессивно горящих ТЭ.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим конструктивный ТЭ, половина поперечного сечения которого показана на рис. 1. Там же приведена система координат. Ось z на рис. 1 не показана. Считаем, что она направлена из плоскости чертежа (точка O) к читателю. Вся наружная поверхность ТЭ бронирована, за исключением плоскости, представленной на рис. 1 сечением OA . Такую конфигурацию могут иметь цилиндр, грибовидное конструктивное образование, имеющее круглое сечение в плоскости xz (см. рис. 1), или «колесо», также имеющее круглое сечение, но в плоскости yz . К этому же разряду конструктивных элементов можно отнести бесконечную совокупность других ТЭ, построенных на основе вышеперечисленных путем модулирования их бронированной поверхности, но при неизменной начальной горячей поверхности (плоской в двух первых случаях и цилиндрической для «колеса»). Предполагаем, что свойства твердого топлива однородны, а давление продуктов сгорания над поверхностью его горения постоянно. При этих условиях скорость горения на всей поверхности горения ТЭ одинакова и может изменяться только во времени. Тогда при выгорании твердого топлива в соответствии с законом Гюйгенса — Вьеля [1] образуется поверхность, соответствующая кривой $D_1C_1B_1$ (см. рис. 1). Отрезок D_1C_1 горизонтален,

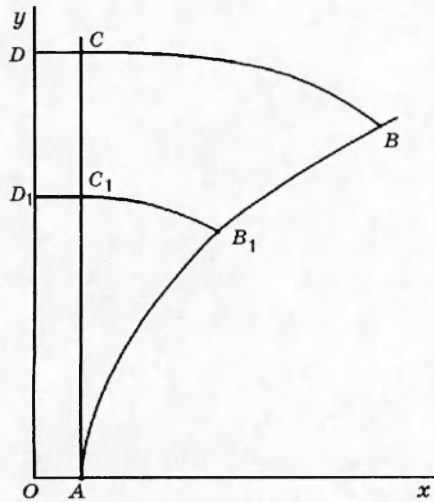


Рис. 1. Вертикальное сечение конструктивно-го твердотопливного элемента:
ABCD — сечение бронированной оболочки, *OA* — сечение небронированной поверхности

кривая C_1B_1 в точке C_1 имеет горизонтальную касательную, а в точке B_1 — касательную, перпендикулярную к местной нормали кривой AB_1B . Предполагаем, что кривая AB_1B непрерывна и дифференцируема по x по крайней мере дважды.

Пусть в момент времени t поверхность горения ТЭ соответствует кривой $D_1C_1B_1$. Величина сгоревшего свода l равна $OD_1 = AC_1$. Кроме того, она равна пути $l_{гр}$, который пламя проходит вдоль кривой AB_1 . Так что

$$l_{гр} = \int_0^{(x_n)_{гр}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_{гр}}{\partial x}\right)^2} dx, \tag{1}$$

где $y_{гр}$ — функция, зависящая от x и соответствующая кривой AB_1B ; $(x_n)_{гр}$ — максимальное значение координаты x в момент времени t , соответствующее точке пересечения поверхности горения с границей AB_1B . Здесь и далее индекс «п» означает, что координата относится к поверхности горения, а индекс «гр» — к границе. Из уравнения (1) следует, что величина $l_{гр}$ является определенной функцией координаты $x_{гр}$.

Уравнение кривой C_1B_1 имеет вид

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} = u_n \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2}, \tag{2}$$

где y_n соответствует поверхности горения ТЭ C_1B_1 ; u_n — скорость горения твердого топлива. Поскольку u_n может зависеть от времени, имеет смысл частную производную $\partial y_n / \partial t$ по времени заменить частной производной по величине сгоревшего свода l и в уравнении (2) сделать замену переменных в соответствии с уравнением

$$l = \int_0^t u_n dt. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) можно переписать в безразмерной форме:

$$\frac{\partial y_n}{\partial l} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2}. \tag{4}$$

В качестве масштаба возьмем максимальную величину свода ТЭ l_{max} . В этом случае переменная l будет изменяться от нуля до единицы, так же как и $(y_n)_{max}$.

Обозначим

$$Z_1 = \frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial l}, \quad Z_2 = \frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial x}. \quad (5)$$

Тогда из уравнения (4) следует, что

$$Z_1 = \sqrt{1 + Z_2^2}. \quad (6)$$

Возведя левую и правую части этого уравнения в квадрат и продифференцировав по x , получим

$$Z_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} = Z_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}. \quad (7)$$

Равенство (7) выполняется, если $y_{\text{гр}}(x_{\text{гр}})$ — непрерывная и дифференцируемая функция вместе со своими производными первого и второго порядков.

Предположим, что $\partial Z_1/\partial x$ и $\partial Z_2/\partial x$ являются непрерывными функциями, т. е. существуют в любой точке кривой CE (рис. 2) и одинаковы в каждой точке этой кривой при стремлении к ней и слева, и справа. В этом случае допустима смена порядка дифференцирования и справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial l} \right) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial x} \right) = \frac{\partial Z_2}{\partial l}. \quad (8)$$

Теперь вместо уравнения (7) можно записать

$$Z_1 \frac{\partial Z_2}{\partial l} = Z_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}$$

или

$$\frac{dZ_2}{dl} = 0 \quad (9)$$

вдоль характеристики

$$\frac{dx_{\text{п}}}{dl} = -\frac{Z_2}{Z_1}, \quad (10)$$

где

$$\frac{dZ_2}{dl} = \frac{\partial Z_2}{\partial l} - \frac{Z_2}{Z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial x}.$$

В уравнении (10) возможно деление на Z_1 (см. (6)), так как $1 + Z_2^2$ всегда больше нуля. Из (9) следует, что вдоль характеристики (10) величина градиента Z_2 постоянна. Это значит, что правая часть уравнения (10) тоже постоянная величина, а характеристика (10) — прямая линия.

Интегрируя уравнение (10) по l , получим

$$x_{\text{п}} = x_{\text{гр}} - \frac{Z_2}{Z_1} (l - l_{\text{гр}}), \quad (11)$$

где $x_{\text{гр}}$ — координата x , соответствующая границе AB_1B (см. рис. 1), $l_{\text{гр}}$ — свод, соответствующий точке $x_{\text{гр}}$, в которой начинается характеристика (11).

На рис. 2 показаны положения поверхности горения рассматриваемого ТЭ в моменты времени t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$). В точке B_1 начинается характеристика B_1E , которая пересекает поверхность горения в момент $t = t_2$ в точке E . Именно к точке B_1 относятся свод $l_{\text{гр}}$

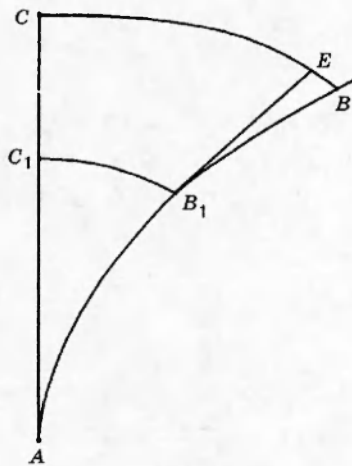


Рис. 2

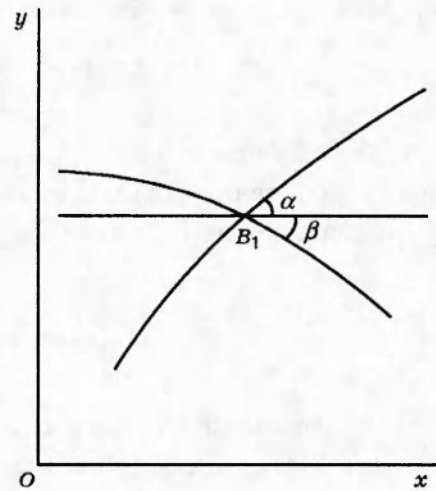


Рис. 3

Рис. 2. Вертикальное сечение ТЭ:

кривые C_1B_1 и CB соответствуют моментам времени t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$); B_1E — характеристика, выходящая из точки B_1 и перпендикулярная к касательным кривым C_1B_1 и CB в точках B_1 и E соответственно

Рис. 3. Окрестность точки B_1 пересечения кривых AB_1B и C_1B_1 :

β — угол наклона к оси x кривой C_1B_1 (см. рис. 2) в точке B_1 , α — угол наклона к оси x кривой AB_1B (см. рис. 2) в точке B_1

и координата $x_{гр}$. Прямая B_1E перпендикулярна к касательным к кривым C_1B_1 и CB в точках B_1 и E соответственно.

Найдем величину градиента Z_2 , постоянного вдоль B_1E и равного, следовательно, своему значению в точке B_1 . Считаем, что зависимость кривой AB_1B от x известна.

На рис. 3 показана окрестность пересечения кривых C_1B_1 и AB_1B в точке B_1 .

Обозначив угол наклона кривой C_1B_1 в точке B_1 через β , а угол наклона кривой AB_1B в точке B_1 — через α , в соответствии с законом Гюйгенса — Вьеля получим

$$|\beta| + \alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Поскольку $\beta < 0$ и $(Z_2)_{гр} < 0$, то

$$(Z_2)_{гр} = -\operatorname{tg} |\beta| = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\partial y_{гр} / \partial x}. \tag{13}$$

Но $\partial y_{гр} / \partial x$ — известная функция $x_{гр}$, а $(Z_2)_{гр}$ — постоянная величина вдоль характеристики B_1E_1 , равная ее значению в точке E . Отсюда определяем градиент Z_2 в уравнении (11) и считаем его известной функцией $x_{гр}$. В итоге правая часть уравнения (11) будет определенной функцией величины сгораемого свода l и координаты $x_{гр}$.

Запишем вдоль характеристики (10) выражение для координаты $y_{п}$:

$$\frac{dy_{п}}{dl} = \frac{\partial y_{п}}{\partial l} - \frac{Z_2}{Z_1} \frac{\partial y_{п}}{\partial x} = Z_1 - \frac{Z_2^2}{Z_1}.$$

Отсюда, учитывая выражение (6), получим

$$\frac{dy_{\text{п}}}{dl} = \frac{1}{Z_1}. \quad (14)$$

Но так как Z_1 является функцией Z_2 , а значение Z_2 вдоль характеристики (10) постоянно, то правая часть уравнения (14) вдоль характеристики (10) будет также постоянной.

Интегрируя уравнение (14) вдоль характеристики (10) от точки B_1 до точки E , получим

$$y_{\text{п}} = y_{\text{гр}} + \frac{l - l_{\text{гр}}}{\sqrt{1 + Z_2^2}}, \quad (15)$$

где $y_{\text{гр}}$, $l_{\text{гр}}$, Z_2 — известные функции $x_{\text{гр}}$. Уравнение (15) позволяет параметрически (через $x_{\text{гр}}$) найти зависимость $y_{\text{п}}$ как функцию $x_{\text{п}}$ при заданной величине сгоревшего свода l . Исключив с помощью уравнения (11) координату $x_{\text{гр}}$ в уравнении (15), найдем $y_{\text{п}} = \varphi(x_{\text{п}}, l)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Уравнения (1), (11), (13), (15) для расчета координаты $y_{\text{п}}$ в общем случае не могут быть представлены в виде единого выражения для $y_{\text{п}} = \varphi(l, x_{\text{п}})$, и эта зависимость должна определяться численно с использованием $x_{\text{гр}}$ как параметра.

В качестве примера использования уравнений (1), (11), (13), (15) рассмотрим случай, когда кривая AB_1B (см. рис. 2) удовлетворяет выражению

$$y_{\text{гр}} = (x_{\text{гр}})^{1/2}. \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{\partial y_{\text{гр}}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x_{\text{гр}}}}, \quad (17)$$

$$(Z_2)_{\text{гр}} = Z_2 = -2\sqrt{x_{\text{гр}}}. \quad (18)$$

Из уравнения (11) получаем

$$x_{\text{п}} = x_{\text{гр}} + \frac{2(l - l_{\text{гр}})\sqrt{x_{\text{гр}}}}{\sqrt{1 + 4x_{\text{гр}}}}, \quad (19)$$

где

$$l_{\text{гр}} = \frac{1}{4} \left[2\sqrt{x_{\text{гр}}(1 + 4x_{\text{гр}})} + \ln \left(2\sqrt{x_{\text{гр}}} + \sqrt{1 + 4x_{\text{гр}}} \right) \right], \quad (20)$$

что следует из уравнений (1), (16). Уравнение (15) запишем в виде

$$y_{\text{п}} = \sqrt{x_{\text{гр}}} + \frac{l - l_{\text{гр}}}{\sqrt{1 + 4x_{\text{гр}}}}. \quad (21)$$

Зададим величину свода l , соответствующего текущей поверхности горения. Изменяя значение $x_{\text{гр}}$ от нуля до величины, при которой $x_{\text{гр}} = l$, получим таблицу значений $y_{\text{п}}$ и $x_{\text{п}}$, соответствующих поверхности горения.

На рис. 4 для случая $l_{\text{max}} = 0,6$ см построены кривые $y_{\text{п}} = \varphi(x_{\text{п}}, l)$ для $l = 0,2; 0,4$ и $0,6$. Все кривые монотонны и удовлетворяют граничным условиям. Штриховой линией нанесен

14
10/ 40.
20
190

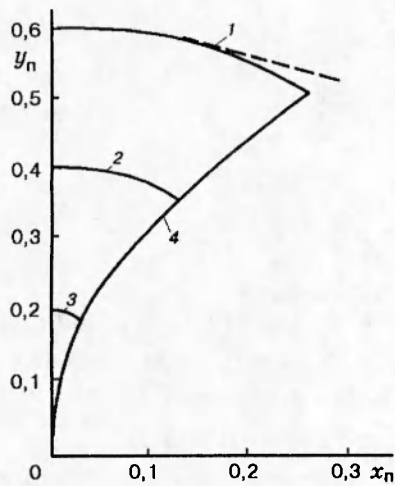


Рис. 4

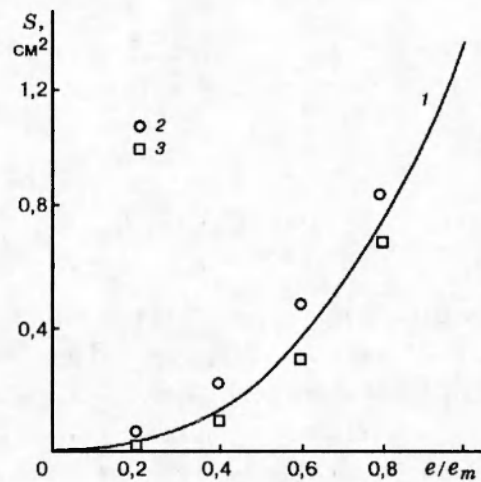


Рис. 5

Рис. 4. Контуры поверхности горения цилиндрического ТЭ для трех величин текущего сгоревшего свода:
 $l = 0,6$ (1); $0,4$ (2); $0,2$ (3); 4 — бронированная боковая поверхность, штриховая линия — окружность

Рис. 5. Зависимость величины поверхности горения цилиндрического ТЭ S от величины сгоревшего свода l :
 1 — для рассматриваемого ТЭ; 2 — $S = 1,3l^2$; 3 — $S = 1,3l^3$

отрезок окружности при $l = 0,6$. Видно, что для рассматриваемого участка изменения x_n поверхность горения описывается более сильной зависимостью y_n от x_n , чем окружность.

Получим уравнение для расчета величины поверхности горения ТЭ. Если это цилиндр, то

$$S = 2Ll_{\max} \int_0^{(x_n)_{\text{гр}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2} dx_n, \quad (22)$$

где L — длина ТЭ; $(x_n)_{\text{гр}}$ — координата x_n , соответствующая точке пересечения кривых CB и AB (см. рис. 2), в которой $l = l_{\text{гр}}$. Выражение для величины поверхности горения цилиндрического ТЭ записано для кривых C_1B_1 или CB (см. рис. 1), т. е. без учета плоского участка ТЭ OA , величина поверхности горения которого равна $|OA| \cdot L$, где $|OA|$ — величина отрезка OA . Квадратура в выражении для S содержит только безразмерные переменные. В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = -2\sqrt{x_{\text{гр}}},$$

так что

$$S = 2Ll_{\max} \int_0^{(x_n)_{\text{гр}}} \sqrt{1 + 4x_{\text{гр}}} dx_n,$$

но при этом

$$\frac{\partial x_{\text{п}}}{\partial x_{\text{гр}}} = (l - l_{\text{гр}}) x_{\text{гр}}^{-1/2} (1 + 4x_{\text{гр}})^{-3/2}.$$

Поэтому

$$S = 2Ll_{\text{max}} \int_0^{(x_{\text{гр}})_{\text{max}}} \frac{(l - l_{\text{гр}})}{(1 + 4x_{\text{гр}})\sqrt{x_{\text{гр}}}} dx_{\text{гр}}.$$

Здесь верхний предел интегрирования по $x_{\text{гр}}$ является функцией l , а подынтегральное выражение зависит от $x_{\text{гр}}$ и l . Вычисляя квадратуру при заданных значениях величин текущего сгоревшего свода, получим величину поверхности горения ТЭ.

Результаты расчетов, отнесенные к длине ТЭ, представлены в таблице, а также на рис. 5. Зависимость $S_{\text{ТЭ}}$ от l для цилиндрического ТЭ оказывается выше квадратичной, и, как видно из рис. 5, близка к кубической.

l	$S_{\text{ТЭ}}$	$S(l^2)$	$S(l^3)$
0,2	0,01542	0,052	0,0104
0,4	0,11307	0,208	0,0832
0,6	0,3438	0,468	0,2808
0,8	0,7343	0,832	0,6656
1,0	1,3	1,3	1,3

Для грибовидного ТЭ и «колеса» имеем еще более прогрессивные зависимости поверхности горения от свода:
для грибовидного ТЭ

$$S_{\text{г}} = 2\pi \cdot l_{\text{max}}^2 \int_0^{(x_{\text{п}})_{\text{гр}}} x_{\text{п}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial x_{\text{п}}}\right)^2} dx_{\text{п}},$$

для «колеса»

$$S_{\text{к}} = 2\pi \cdot l_{\text{max}}^2 \int_0^{(x_{\text{п}})_{\text{гр}}} y_{\text{п}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_{\text{п}}}{\partial x_{\text{п}}}\right)^2} dx_{\text{п}}.$$

Эти соотношения в подынтегральных выражениях содержат дополнительный множитель по сравнению с выражением (22). Однако и для цилиндрических ТЭ выбором соответствующей зависимости $y_{\text{гр}}$ от $x_{\text{гр}}$ можно регулировать зависимость $S_{\text{ТЭ}}$ (l) и создавать конструкции более высокой прогрессивности, чем для рассматриваемого примера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соркин Р. Е. Газодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1967. С. 366.

Поступила в редакцию 12/III 1996 г.,
в окончательном варианте — 21/I 1997 г.