

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ, РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОТОРОЙ ОПИСЫВАЮТСЯ МОДЕЛЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРОИЗВОДНУЮ С ПАМЯТЬЮ

М. Бачхер

Высшая женская школа средств массовой информации, Гобарданга, Индия
E-mail: mitali.bachher@gmail.com

С использованием обобщенной теории термоупругости Лорда — Шульмана с производной по времени, учитывающей историю состояния среды, построено аналитическое решение задачи о распространении плоских гармонических волн в полупространстве. Выполнен анализ численного решения при различных значениях времени запаздывания.

Ключевые слова: модель Лорда — Шульмана, производная с памятью, время запаздывания, функция ядра, потенциал смещений.

DOI: 10.15372/PMTF20190115

Введение. Значительный интерес к дробному исчислению (математический анализ на основе дробных производных) обусловлен широким применением его в последнее время в различных областях физики и техники [1]. Несмотря на то что дробное исчисление используется начиная с XVIII в., разработка теории дробного исчисления не завершена. В настоящее время с использованием дробной производной модифицирован классический закон теплопроводности Фурье [2–5].

Производная с памятью определяется как интеграл по временному интервалу с ядром наследственного типа. Ядра наследственного типа используются в математических моделях, описывающих физические процессы с памятью. В работе [6] введено понятие производной с памятью. В [7] производная с памятью использована в законе теплопроводности в обобщенной модели термоупругости Лорда — Шульмана [8], т. е. предложена новая модель термоупругости Лорда — Шульмана с памятью. Модель, предложенная в работе [7], более предпочтительна, чем модель, в которой используется дробная производная. Во-первых, новая модель имеет единственную формулировку, в то время как модель, в которой используется дробная производная, имеет различные модификации (модель Римана — Лиувилля, модель Капуто и др.). Во-вторых, новая модель имеет более ясное физическое содержание, чем модель с дробной производной. В-третьих, в новой модели используются производные целого порядка и интегралы, что более предпочтительно при проведении вычислений по сравнению с использованием производных дробного порядка. Наконец, в новой модели ядро и время запаздывания можно выбирать произвольно в зависимости от свойств моделируемой среды, в то время как в модели с дробной производной

единственным значимым параметром является порядок дробной производной [2–5]. Решения одномерных задач с использованием обобщенной модели термоупругости Лорда — Шульмана, содержащей производную с памятью, приведены в работах [9–12].

В настоящей работе с использованием данной теории решается двумерная задача о распространении плоских гармонических волн в полупространстве.

1. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений для однородного изотропного термоупругого материала, свойства которого описываются моделью, содержащей производную с памятью [8–11], состоит из соотношения между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij}, \quad (1)$$

уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i, \quad (2)$$

уравнения теплопроводности

$$k_1\nabla^2\theta = (1 + \varkappa D_\varkappa)(\rho C_E\dot{\theta} + \gamma T_0\dot{e}). \quad (3)$$

В (1)–(3) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — компоненты тензора деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений \mathbf{u} ; λ , μ — константы Ламе; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$ — константа, зависящая от свойств материала; α_T — коэффициент линейного температурного расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; ρ — плотность; $k_1 > 0$ — теплопроводность; C_E — удельная теплоемкость при постоянной деформации; $\theta = T - T_0$ — малое приращение температуры; T — температура среды; T_0 — отсчетная температура; $|\theta/T_0| \ll 1$; $e = e_{kk}$ — объемное расширение.

В [6] для функции времени $f(t)$ введено определение производной по времени запаздывания $\varkappa > 0$ при фиксированном значении времени t (производной с памятью):

$$D_\varkappa f(t) = \frac{1}{\varkappa} \int_{t-\varkappa}^t K(t-\xi) f'(\xi) d\xi.$$

Выбор вида ядра $K(t-\xi)$ и параметра запаздывания по времени \varkappa определяется свойствами материала. Функция $K(t-\xi)$ является дифференцируемой по переменным t , ξ . Введение такой производной обусловлено необходимостью максимально точно описать эффект памяти материала (мгновенное состояние зависит от истории деформирования). Введенная производная может оказаться более эффективной по сравнению с дробной производной.

Использование определенной таким образом производной позволяет описать эффект памяти на интервале запаздывания $[t - \varkappa, t]$, длина которого изменяется со временем. Функция $K(t - \xi)$ может быть достаточно произвольной, например может быть выбрана в следующем виде: 1 , $\xi - t + 1$, $[(\xi - t)/\varkappa + 1]^2$, $[(\xi - t)/\varkappa + 1]^{1/4}$ и т. п. От формы ядра зависит степень влияния истории деформирования на состояние материала в данный момент времени. Функции $[(\xi - t)/\varkappa + 1]^2$ и $[(\xi - t)/\varkappa + 1]^{1/4}$ являются более предпочтительными, поскольку они монотонные: $K(t - \xi) = 0$ — на интервале, предшествующем моменту времени $t - \varkappa$, $K(t - \xi) = 1$ — в текущий момент времени t , т. е. функция $K(t - \xi)$ монотонно возрастает от 0 до 1. Правая часть равенства в определении производной с памятью является средним значением с весом производной $f'(\xi)$ на интервале $[t - \varkappa, t]$. Для реальных материалов с памятью функция $K(t - \xi)$ должна удовлетворять неравенству $0 \leq K(t - \xi) < 1$ при $\xi \in [t - \varkappa, t]$. Поэтому значение производной $D_\varkappa f(t)$, как правило, меньше значения производной $f'(t)$. Следует отметить, что производная d/dt является

пределом производной D_{\varkappa} при $\varkappa \rightarrow 0$. В соответствии с [6, 9–12] в данной работе ядро $K(t - \xi)$ принимается в виде

$$K(t - \xi) = 1 - \frac{2b}{\varkappa}(t - \xi) + \frac{a^2}{\varkappa^2}(t - \xi)^2 = \begin{cases} 1, & a = 0, \quad b = 0, \\ 1 + (\xi - t)/\varkappa, & a = 0, \quad b = 1/2, \\ \xi - t + 1, & a = 0, \quad b = \varkappa/2, \\ [1 + (\xi - t)/\varkappa]^2, & a = 1, \quad b = 1, \end{cases} \quad (4)$$

где a, b — константы. Заметим, что дробная производная, в отличие от производной с памятью, является сингулярной функцией. Ядро можно рассматривать как функцию, управляющую памятью [6, 9, 10]. Далее запятая обозначает производную по пространственным переменным, точка над величиной — производную от этой величины по времени.

2. Формулировка задачи. Рассматривается изотропная однородная термоупругая среда, занимающая полупространство $x \geq 0$. На границе полупространства, свободной от усилий, задана зависящая от времени температура. Решается двумерная задача о плоской деформации. Все искомые функции являются функциями двух пространственных переменных x, y и времени t . Таким образом, вектор смещений \mathbf{u} имеет следующие компоненты: $u \equiv u(x, y, t)$, $v \equiv v(x, y, t)$, $w \equiv w(x, y, t) = 0$.

С учетом принятых предположений уравнения (1)–(3) упрощаются и записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)u_{,x} + \lambda v_{,y} - \gamma\theta, & \sigma_{yy} &= \lambda u_{,x} + (\lambda + 2\mu)v_{,y} - \gamma\theta, & \sigma_{xy} &= \mu(v_{,x} + u_{,y}), \\ (\lambda + 2\mu)u_{,xx} + (\lambda + \mu)v_{,xy} + \mu u_{,yy} - \gamma\theta_{,x} &= \rho\ddot{u}, \\ (\lambda + 2\mu)v_{,yy} + (\lambda + \mu)u_{,xy} + \mu v_{,xx} - \gamma\theta_{,y} &= \rho\ddot{v}, \\ k_1(\theta_{,xx} + \theta_{,yy}) &= \rho C_E \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} + \\ &+ \int_{t-\varkappa}^t K(t - \xi) \left(\rho C_E \frac{\partial^2 \theta(x, \xi)}{\partial \xi^2} + \gamma T_0 \frac{\partial^2 e(x, \xi)}{\partial \xi^2} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

В безразмерных переменных

$$(x', y', u', v') = c_1 \eta (x, y, u, v), \quad t' = c_1^2 \eta t, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho c_1^2}, \quad \theta' = \frac{\gamma}{\rho c_1^2} \theta, \quad \eta = \frac{\rho C_E}{k_1}$$

уравнения (5) принимают вид (штрихи у безразмерных величин опущены)

$$\sigma_{xx} = u_{,x} + (1 - 2\beta^2)v_{,y} - \theta, \quad \sigma_{yy} = v_{,y} + (1 - 2\beta^2)u_{,x} - \theta, \quad \sigma_{xy} = \beta^2(v_{,x} + u_{,y}); \quad (6)$$

$$u_{,xx} + (1 - \beta^2)v_{,xy} + \beta^2 u_{,yy} - \theta_{,x} = \ddot{u}, \quad v_{,yy} + (1 - \beta^2)u_{,xy} + \beta^2 v_{,xx} - \theta_{,y} = \ddot{v}, \quad (7)$$

$$\theta_{,xx} + \theta_{,yy} = (1 + \varkappa D_{\varkappa})(\dot{\theta} + \varepsilon \dot{e}),$$

где $\beta^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$; $\varepsilon = \gamma^2 T_0 / [\rho C_E (\lambda + 2\mu)]$; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость продольных волн.

Введем потенциалы смещений ϑ и ψ :

$$u = \vartheta_{,x} + \psi_{,y}, \quad v = \vartheta_{,y} - \psi_{,x}, \quad e = \nabla^2 \vartheta. \quad (8)$$

Из уравнений (7), (8) следует

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vartheta - \theta = 0; \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0; \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial t} (1 + \varkappa D_{\varkappa}) \right) \theta - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (1 + \varkappa D_{\varkappa}) \nabla^2 \vartheta = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9), (11) — уравнения относительно функций ϑ и θ , уравнение (10) — уравнение относительно функции ψ .

3. Плоские гармонические волны. Выражения для плоских гармонических волн будем искать в виде

$$[\vartheta, \psi, \theta, u, v, \sigma_{ij}](x, y, t) = [\hat{\vartheta}, \hat{\psi}, \hat{\theta}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{ij}](x) e^{im(y-ct)}, \quad (12)$$

где $\hat{\vartheta}(x), \dots$ — амплитуды соответствующих величин; i — мнимая единица; $c = \omega/m$ — фазовая скорость; $\omega > 0$ — круговая частота; m — волновое число.

Подставляя (12) в (9)–(11), получаем уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 - \omega^2 \right) \hat{\vartheta}(x) - \hat{\theta}(x) = 0; \quad (13)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \hat{\psi}(x) = 0; \quad (14)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 + i\omega(1 + \Gamma) \right) \hat{\theta}(x) + i\varepsilon\omega(1 + \Gamma) \left(\frac{d^2}{dx^2} - m^2 \right) \hat{\vartheta}(x) = 0, \quad (15)$$

где Γ — константа, зависящая от параметра запаздывания \varkappa , круговой частоты ω и констант a, b . Константа $\Gamma(\varkappa, \omega, a, b)$ для функции ядра (4) вычислялась с использованием пакета Mathematica.

После ряда преобразований уравнения (13), (15) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \hat{\theta}}{dx^2} = \alpha_1 \hat{\theta} + \alpha_2 \hat{\vartheta}, \quad \frac{d^2 \hat{\vartheta}}{dx^2} = \beta_1 \hat{\theta} + \beta_2 \hat{\vartheta}, \quad (16)$$

где $\alpha_1 = m^2 - i\omega(1 + \varepsilon)(1 + \Gamma)$; $\alpha_2 = i\omega^3(1 + \Gamma)$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = m^2 - \omega^2$.

Запишем уравнения (16) в векторно-матричной форме [13]

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx} = A\mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\vartheta} \\ d\hat{\theta}/dx \\ d\hat{\vartheta}/dx \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2$, где

$$\lambda_j^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (-1)^{j+1} \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)}}{2}, \quad \text{Re}(\lambda_j) > 0, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Пусть $\mathbf{X}_{(\lambda)}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению матрицы A . Тогда (см. [13])

$$\mathbf{X}_{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \beta_2 \\ 1 \\ \lambda(\lambda^2 - \beta_2) \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Общее решение уравнения (17) записывается в виде

$$\mathbf{V}(x) = C_1 \mathbf{X}_2 e^{-\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{X}_4 e^{-\lambda_2 x}, \quad x \geq 0, \quad (20)$$

где векторы $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{(-\lambda_1)}$, $\mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_{(-\lambda_2)}$ вычисляются в соответствии с (19).

С использованием соотношений (14), (17)–(20) решения для функций $\hat{\theta}(x)$, $\hat{v}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ можно записать в виде

$$\hat{\theta}(x) = (\lambda_1^2 - \beta_2)C_1 e^{-\lambda_1 x} + (\lambda_2^2 - \beta_2)C_2 e^{-\lambda_2 x}; \quad (21)$$

$$\hat{v}(x) = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad \hat{\psi}(x) = C_3 e^{-\lambda_3 x}, \quad (22)$$

где C_j ($j = 1, 2, 3$) — константы; $\lambda_3 = \sqrt{m^2 + \omega^2/\beta^2}$. В приведенных выше соотношениях слагаемые, увеличивающиеся по экспоненциальному закону, опущены в силу регулярности решений.

Подставляя (12), (21), (22) в (6), (8), получаем

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= -(\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 x}) + imC_3 e^{-\lambda_3 x}, \\ \hat{v}(x) &= im(C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}) + \lambda_3 C_3 e^{-\lambda_3 x}; \\ \hat{\sigma}_{xx}(x) &= g_{11}C_1 e^{-\lambda_1 x} + g_{12}C_2 e^{-\lambda_2 x} + g_{13}C_3 e^{-\lambda_3 x}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yy}(x) &= g_{21}C_1 e^{-\lambda_1 x} + g_{22}C_2 e^{-\lambda_2 x} + g_{23}C_3 e^{-\lambda_3 x}; \\ \hat{\sigma}_{xy}(x) &= g_{31}C_1 e^{-\lambda_1 x} + g_{32}C_2 e^{-\lambda_2 x} + g_{33}C_3 e^{-\lambda_3 x}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} g_{1j} &= \beta_2 - m^2 + 2\beta^2 m^2 \quad (j = 1, 2), & g_{13} &= -2i\beta^2 \lambda_3 m, \\ g_{2j} &= \beta_2 - m^2 - 2\beta^2 \lambda_j^2 \quad (j = 1, 2), & g_{23} &= -g_{13} = 2i\beta^2 \lambda_3 m, \\ g_{3j} &= -2i\beta^2 \lambda_j m \quad (j = 1, 2), & g_{33} &= -\beta^2(\lambda_3^2 + m^2). \end{aligned}$$

4. Начальные и краевые условия. Поставим начально-краевую задачу в полубесконечной области $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$.

Задаются нулевые начальные условия:

$$t = 0: \quad u = v = \theta = \varphi = \dot{u} = \dot{v} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0.$$

Константы C_j ($j = 1, 2, 3$), входящие в решение, определяются из краевых условий для температуры (на границе полупространства задается температурная волна с постоянной амплитудой $\tilde{\theta}$)

$$\theta(x, y, t) = \tilde{\theta} e^{im(y-ct)}, \quad x = 0 \quad (25)$$

и краевых условий для напряжений (на границе области Ω нормальные и касательные напряжения равны нулю)

$$\sigma_{xx}(x, y, t) = \sigma_{xy}(x, y, t) = 0, \quad x = 0. \quad (26)$$

Подставляя выражения (21), (23), (24) в краевые условия (25), (26), получаем систему уравнений

$$(\lambda_1^2 - \beta_2)C_1 + (\lambda_2^2 - \beta_2)C_2 = \tilde{\theta}, \quad g_{11}C_1 + g_{12}C_2 + g_{13}C_3 = 0, \quad g_{31}C_1 + g_{32}C_2 + g_{33}C_3 = 0,$$

из которой определяются константы C_j ($j = 1, 2, 3$):

$$C_1 = \frac{\tilde{\theta}(g_{12}g_{33} - g_{13}g_{32})}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{-\tilde{\theta}(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31})}{\Delta}, \quad C_3 = \frac{\tilde{\theta}(g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31})}{\Delta},$$

где $\Delta = (\lambda_1^2 - \beta_2)(g_{12}g_{33} - g_{13}g_{32}) - (\lambda_2^2 - \beta_2)(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31})$.

5. Результаты вычислений. Ниже представлены результаты вычислений на основе аналитических выражений, полученных в п. 4. Вычисления проводились в предположении, что материалом полупространства является медь со следующими характеристиками [9–11]: $\rho = 8954$ кг/м³, $\lambda = 7,76 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 3,86 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\alpha_T = 1,78 \cdot 10^{-5}$ К⁻², $T_0 = 293$ К, $k_1 = 386$ Н/(К·с), $C_E = 383,1$ м²/К, $\eta = 8886,73$ с/м², $\varepsilon = 0,0168$, $c_1 = 4158$ м/с, $\beta = 0,4994$. Для остальных констант, содержащихся в решении задачи, приняты следующие значения: $\omega = 3$, $m = 4 + 5i$, $\tilde{\theta} = 50$. С использованием пакета MATLAB выполнены вычисления с точностью до шести значащих цифр.

При указанных выше параметрах задачи вычислены действительные части выражений для безразмерной температуры θ , компонент вектора перемещений u , v и компонент тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} на поверхности $y = 0$ при фиксированном времени t , заданном ядре $K(t - \xi)$ и различных значениях времени запаздывания \varkappa .

На рис. 1 приведены зависимости температуры θ , компоненты вектора перемещений u и компоненты тензора напряжений σ_{xx} при $y = 0$, $t = 0,1$, $K(t - \xi) = (1 - (t - \xi)/\varkappa)^2$ и различных значениях времени запаздывания \varkappa .

Из приведенных зависимостей следует, что температура θ , компонента вектора смещений u и компонента тензора напряжений σ_{xx} возрастают с увеличением параметра \varkappa . Время, через которое температурная волна становится установившейся, зависит от времени запаздывания \varkappa . Это означает, что частицы быстрее обмениваются теплом. Значения температуры и всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние среды, вычисленные по обобщенной модели термоупругости Лорда — Шульмана, меньше соответствующих величин, вычисленных по модели Лорда — Шульмана с производной с памятью. Все величины достигают максимального значения при $\varkappa = 0,5$.

На рис. 2 приведены зависимости величин θ , u , σ_{xx} от безразмерной переменной x при $y = 0$, $t = 0,1$, $K(t - \xi) = 1 - (t - \xi)/\varkappa$ и различных значениях времени запаздывания \varkappa . В этом случае величины θ и u слабо зависят от параметра \varkappa , а компонента напряжения σ_{xx} зависит существенно. Из результатов сравнения зависимостей, приведенных на рис. 1, 2, следует, что при одном и том же значении параметра \varkappa решение зависит от вида ядра $K(t - \xi)$. Как температура, так и все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние среды, достигают максимального значения при $\varkappa = 0,5$. Также из приведенных на рис. 1, 2 зависимостей следует, что краевые условия (25), (26) тождественно удовлетворяются.

На рис. 3 приведены трехмерные распределения компоненты вектора перемещений v , компонент тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} при $t = 0,1$, $\varkappa = 0,05$ и $K(t - \xi) = 1 - (t - \xi)$.

Заключение. В работе построено аналитическое решение двумерной термоупругой задачи. При формулировке уравнений задачи использованы закон Фурье теплопроводности и определяющие соотношения среды, в которых скорость изменения величин, характеризующих термоупругое поле в данный момент времени, зависит от истории деформирования. Исследована зависимость решения от параметра времени запаздывания и вида ядра, используемого при осреднении производной по интервалу времени.

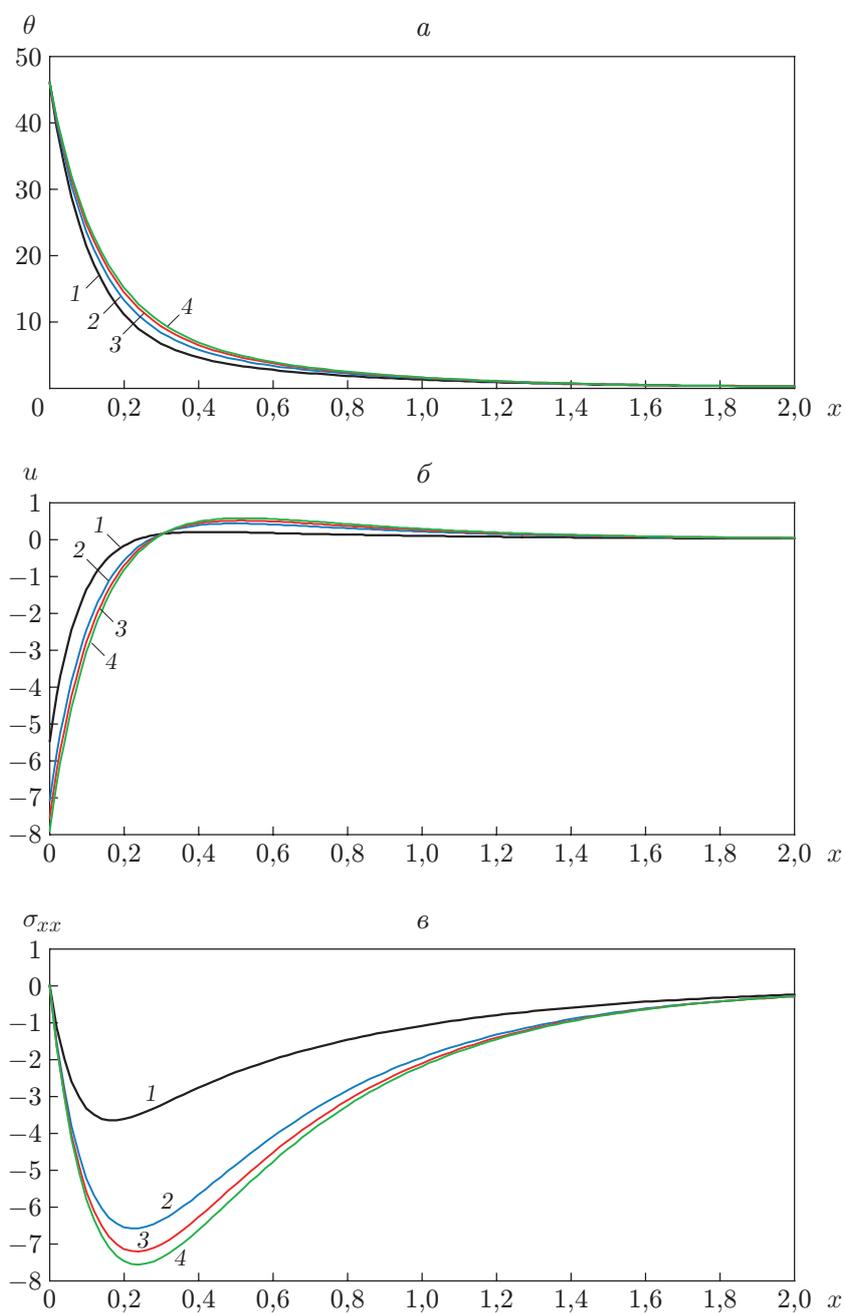


Рис. 1. Зависимости температуры θ (*a*), компоненты вектора перемещений u (*б*) и компоненты тензора напряжений σ_{xx} (*в*) от безразмерной координаты x при $K(t - \xi) = (1 - (t - \xi)/\varkappa)^2$ и различных значениях параметра \varkappa :

1 — зависимость, полученная с использованием теории Лорда — Шульмана [8], 2–4 — зависимости, полученные с использованием теории Лорда — Шульмана, содержащей производную с памятью (2 — $\varkappa = 0,005$, 3 — $\varkappa = 0,05$, 4 — $\varkappa = 0,5$)

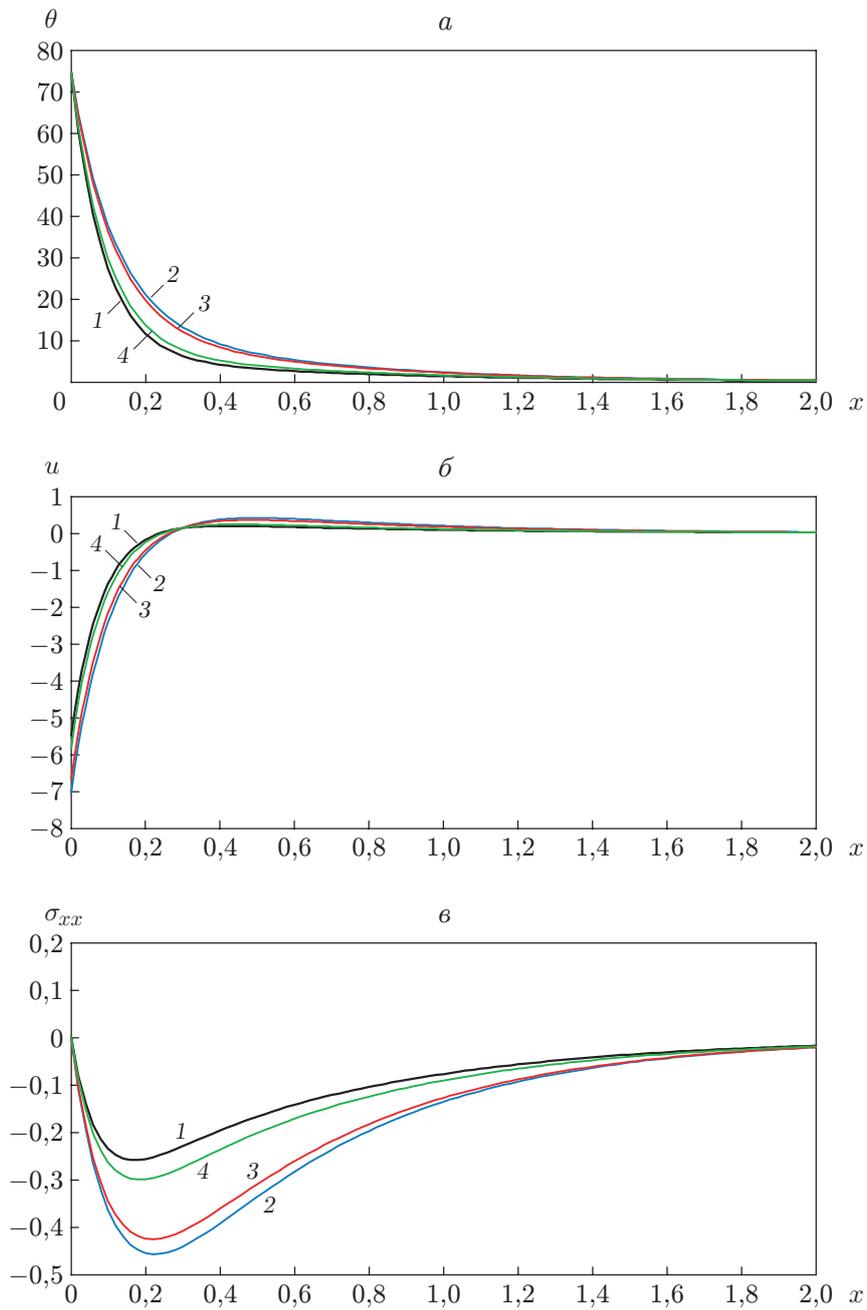


Рис. 2. Зависимости температуры θ (*a*), компоненты вектора перемещений u (*б*) и компоненты тензора напряжений σ_{xx} (*в*) от безразмерной координаты x при $K(t - \xi) = 1 - (t - \xi)/\kappa$ и различных значениях параметра κ (обозначения те же, что на рис. 1)

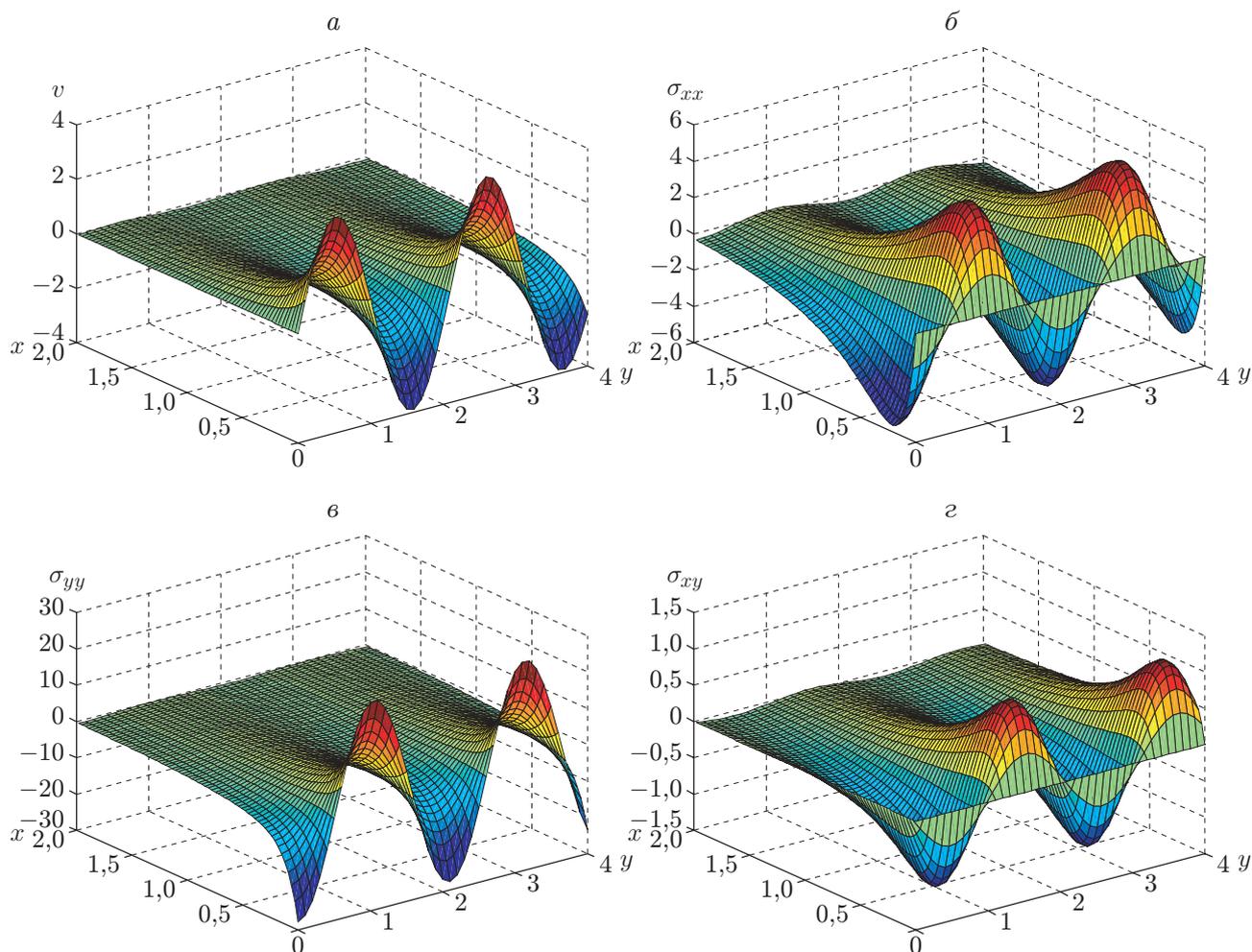


Рис. 3. Зависимости компоненты вектора перемещений v (а) и компонент тензора напряжений σ_{xx} (б), σ_{yy} (в), σ_{xy} (г) от безразмерных координат x и y при $\varkappa = 0,05$, $K(t - \xi) = 1 - (t - \xi)$

Исследованная в работе модель среды может быть использована при решении термовязкоупругих задач геофизики, биологии, биофизики, электрохимии и других областей науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Podlubny I.** Fractional differential equations. N. Y.: Acad. Press, 1999.
2. **Sarkar N.** Wave propagation in an initially stressed elastic half-space solids under time-fractional order two-temperature magneto-thermoelasticity // Eur. Phys. J. Plus. 2017. V. 132. P. 154–167.
3. **Sarkar N., Lotfy Kh.** A 2D problem of time-fractional heat order for two-temperature thermoelasticity under hydrostatic initial stress // Mech. Adv. Materials Structures. 2018. V. 25. P. 279–285.
4. **Ezzat M. A., El-Karamany A. S., El-Bary A. A., Fayik M.** Fractional ultrafast-laser-induced magneto-thermoelastic behavior in perfect conducting metal films // J. Electromagnet. Waves Appl. 2014. V. 28. P. 64–82.

5. **Bachher M., Sarkar N., Lahiri A.** Generalized thermoelastic infinite medium with voids subjected to a instantaneous heat sources with fractional derivative heat transfer // Intern. J. Mech. Sci. 2014. V. 89. P. 84–91.
6. **Wang J., Li H.** Surpassing the fractional derivative: concept of the memory-dependent derivative // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1562–1567.
7. **Yu Y.-J., Hu W., Tian X.-G.** A novel generalized thermoelasticity model based on memory-dependent derivative // Intern. J. Engng Sci. 2014. V. 81. P. 23–134.
8. **Lord H. W., Shulman Y. A.** Generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
9. **Ezzat M. A., El-Karamany A. S., El-Bary A. A.** Generalized thermo-viscoelasticity with memory dependent derivatives // Intern. J. Mech. Sci. 2014. V. 89. P. 470–475.
10. **Ezzat M. A., El-Karamany A. S., El-Bary A. A.** A novel magneto thermoelasticity theory with memory dependent derivative // J. Electromagnet. Waves Appl. 2015. V. 29. P. 1018–1031.
11. **Ezzat M. A., El-Karamany A. S., El-Bary A. A.** Generalized thermoelasticity with memory-dependent derivatives involving two-temperatures // Mech. Adv. Mat. Struct. 2016. V. 23. P. 545–553.
12. **Lotfy Kh., Sarkar N.** Memory-dependent derivatives for photothermal semiconducting medium in generalized thermoelasticity with two-temperature // Mech. Time-Dependent. Materials. 2017. V. 21. P. 519–534.
13. **Sarkar N., Lahiri A.** A three-dimensional thermoelastic problem for a half-space without energy dissipation // Intern. J. Engng Sci. 2012. V. 51. P. 310–325.

*Поступила в редакцию 6/III 2018 г.,
после доработки — 23/VI 2018 г.
Принята к публикации 30/VII 2018 г.*
