

НЕРАВНОВЕСНАЯ ИОНИЗАЦИЯ В ЛАМИНАРНОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. С. Маргевич, А. В. Потанов

(Москва)

Неравновесное течение ионизованного воздуха в ламинарном пограничном слое привлекает большое внимание исследователей [1—8] в связи с рядом практических задач [2—5]. Эффекты неравновесности в пограничном слое особенно сильно проявляются при гиперзвуковом обтекании разреженным воздухом. В этом случае невозмущенный поток обладает энергией, достаточной для диссоциации и ионизации, но реакции идут медленно, и их скорость не обеспечивает термодинамически равновесного состава. Расчет пограничного слоя с неравновесной ионизацией ранее выполнялся в основном применительно к обтеканию осесимметричных тел в предположении малой степени ионизации [1—3]. Последнее условие позволяло не учитывать ионизацию в уравнении энергии, а также давало возможность использовать профили газодинамических параметров в пограничном слое из задачи без ионизации для решения вопроса о неравновесной степени ионизации [4, 6]. Однако в работе [1] делались сильно упрощающие предположения о физических процессах в диссоциирующем газе. Например, не учитывались реакции рекомбинации и расход реагирующих молекулярных компонентов, выбиралось постоянным число Шмидта и безразмерное произведение плотности и вязкости. Кроме того, довольно неточно описывались процессы образования атомарного азота и охлаждения при диссоциации. В связи с этим представляет интерес получение решения о неравновесной ионизации в пограничном слое при более строгой постановке задачи.

В данной работе рассматривается задача о ламинарном пограничном слое многокомпонентного газа с малой степенью неравновесной ионизации на боковой поверхности тел. Используется уточненное в сравнении с работами [6, 9] краевое условие для ионов, позволяющее рассмотреть (в отличие от работ [1—5]) малую область нарушения квазинейтральности вблизи стенки. Предложенное приближенное аналитическое решение дает возможность быстро подсчитать максимальную концентрацию заряженных частиц в пограничном слое при наличии решения для нейтральных компонентов. При применении полученных формул не представляет труда оценить результат использования тех или иных моделей процессов ионизации в многокомпонентной смеси и выявить расхождения, связанные с использованием различных констант скоростей реакций, предлагаемых отдельными авторами [10—12].

1. Следуя работам [1—6], будем предполагать, что ионизация достаточно мала, чтобы вносить существенный вклад в уравнения движения и энергии газа. Такой подход позволяет в полной мере воспользоваться результатами расчетов многочисленных работ по гиперзвуковому пограничному слою в части распределения скорости и температуры, а в случае диссоциирующей смеси — и распределения концентраций нейтральных компонентов. Для этого необходимо, чтобы

$$n_i V_i / n i \ll 1,$$

где V_i — энергия ионизации; i — средняя энтальпия газа на одну частицу; n_i — концентрация ионов; n — общая концентрация. При этом считается, что ионизация не настолько мала, чтобы не выполнялось условие квазинейтральности в пограничном слое

$$(1.1) \quad d/\delta \ll 1$$

(d — дебаевский радиус, δ — толщина вытеснения). Последнее неравенство является условием образования тонкого слоя объемного электрического заряда у поверхности. Вне этого слоя имеем область амбиполярной

диффузии, причем в силу условия квазинейтральности $n_e \simeq n_i$, где n_e — концентрация электронов.

По мере приближения газа к равновесию толщина дебаевского слоя уменьшается и, как показывают оценки для воздуха, становится сравнимой с длиной свободного пробега частиц l . В случае

$$(1.2) \quad d/l \leq 1$$

краевое условие для уравнения сохранения заряженных частиц будет записываться на внешней границе ленгмюровского слоя на расстоянии от стенки порядка длины свободного пробега. При невыполнении (1.2) приближенное краевое условие ставится на внешней границе дебаевского слоя.

Стенка предполагается непроводящей, изотермической и достаточно холодной, чтобы на ней происходила полная рекомбинация ионов.

В качестве предпосылки задачи вводится предположение о возможности пренебрежения объемной рекомбинацией в сравнении с поверхностной. Числовые проверки для воздуха показывают, например, что заряженные частицы в основном образуются в слое высоких температур, где рекомбинация незначительна, а затем они диффундируют через относительно холодный газ у стенки, где скорость ионизационно-рекомбинационных процессов в объеме по отношению к поверхностным вообще мала.

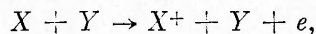
На основе экспериментальных данных [5] и оценок считается, что в основной части пограничного слоя температура электронов близка к температуре газа.

Допускается существование электрического поля разделения зарядов, что делает необходимым в задаче об обтекании непроводящей стенки брать в качестве эффективного коэффициента диффузии в уравнении баланса заряженного компонента смеси коэффициент, учитывающий наведенное электрическое поле — аналог известного коэффициента амбиполярной диффузии в простейшем случае однопольных ионов [13].

Пусть в диссоциирующем газе идут реакции ионизации вида



или



имеющие массовую скорость

$$w_i = (m_i/m_X m_Y) \rho^2 c_X c_Y K_i$$

с коэффициентом K_i , зависящим от температуры. Здесь c_X , c_Y — массовые концентрации компонентов X , Y с массами частиц m_X , m_Y ; m_i — масса иона; ρ — плотность газа.

В случае однородного газа процессы ионизации, описываемые уравнениями (1.3), выполняются достаточно хорошо, для диссоциирующей смеси — приближенно (за счет более сложных реакций ионизации). Что касается воздуха, то, согласно проведенным исследованиям [14, 15], при высоких температурах время релаксации процессов ионизации больше времени релаксации диссоциации.

В классе задач с диссоциирующим и ионизованным воздухом реализуется небольшая степень ионизации, связанная главным образом с обра-

зованием ионов NO^+ [16], и возникают условия, когда вышеуказанные допущения выполняются*.

В принятой постановке задачи уравнения, описывающие ионизацию, выделяются в подсистему, которая может быть решена после решения задачи о диссоциирующем пограничном слое. При этом в задаче об ионизации в рамках локальной автомодельности [17] получаются линейные дифференциальные уравнения в результате независимости скорости ионизации в рассматриваемых условиях от концентрации заряженных частиц.

Используем переменные ξ и η в форме Лиза [17]

$$(1.4) \quad \xi = \int_0^x (\rho \mu r^{2j})_w u_s dx, \quad \eta = r_w^j u_s (2\xi)^{-1/2} \int_0^y \rho dy,$$

в которых уравнение сохранения ионов для пограничного слоя в условиях локальной автомодельности примет вид

$$(1.5) \quad \frac{d}{d\eta} \left(\frac{N}{Sc} \frac{dc_i^0}{d\eta} \right) + \psi \frac{dc_i^0}{d\eta} + w_i^0 = 0,$$

где x, y — координаты соответственно вдоль и по нормали к поверхности тела; r — расстояние от оси симметрии до любой точки в пограничном слое; $j = 0$ для плоского и $j = 1$ для осесимметричного течения; μ — коэффициент вязкости газа; Sc — эффективное число Шмидта; ρ — плотность.

Безразмерная массовая концентрация ионов, скорость образования частиц, скорость и температура газа c_i^0, w_i^0, ψ, T^0 связаны с размерными величинами следующими соотношениями:

$$c_i^0 = \frac{c_i}{\xi}, \quad w_i = \rho^0 c_X^0 c_Y^0 K_i^0, \quad \psi = \frac{u}{u_s}, \quad T^0 = \frac{T}{T_m}$$

Кроме того,

$$\rho^0 = \frac{\rho}{\rho_m}, \quad c_X^0 = \frac{c_X}{c_{Xm}}, \quad c_Y^0 = \frac{c_Y}{c_{Ym}}, \quad K_i^0 = \frac{K_i}{K_{im}},$$

$$n_e^0 = \frac{n_e}{n_{em}}, \quad N = \frac{\rho \mu}{(\rho \mu)_w}, \quad \zeta = \tau_i^{-1} \frac{2\xi}{u_s} \frac{dx}{d\xi}, \quad \tau_i^{-1} = \frac{m_i}{m_X m_Y} \rho_m c_{Xm} c_{Ym} K_{im},$$

где ξ — число Дамкелера; τ_i — характеристическое время объемной реакции. Индексами w, m, s отмечены параметры на стенке, при максимальной температуре и на внешней границе пограничного слоя.

Для случая (1.1), если пренебречь влиянием нарушения квазинейтральности, краевое условие на внешней границе дебаевского слоя будет иметь вид, аналогичный принятому в работах [1–5],

$$c_i = 0$$

(предполагается, что условие (1.2) при этом не выполняется).

Краевое условие в случае (1.2) связывает потоки частиц, фигурирующие в уравнениях газодинамического типа, с выражениями, получающимися из газокинетического рассмотрения переноса через потенциальный барьер у внешней границы лентмюровского слоя [6, 8, 18]:

$$(1.6) \quad -\frac{\mu}{Sc} \frac{dc_i}{dy} = -\frac{1}{2} \rho c_i \left(\frac{8kT}{\pi m_i} \right)^{1/2}$$

* Преобладание реакции образования иона окиси азота в ударном слое имеет место до скорости полета 9 км/с [16]. Неравновесное течение в пограничном слое существует при $\zeta \ll 1$.

(k — постоянная Больцмана). Предполагается, как отмечено выше, полная рекомбинация ионов на стенке, что отражено в числовом коэффициенте правой части выражения (1.6).

Переход к переменной η с добавлением условия на внешней границе пограничного слоя приводит к соотношениям при $\eta = 0$

$$(1.7) \quad c_i^0 = 0, \quad dc_i^0/d\eta - \kappa c_i^0 = 0,$$

где

$$\kappa = \frac{2Sc_w}{(\mu r^i)_{w_s}} \left(\frac{kT_w}{\lambda m_i} \right)^{1/2};$$

при $\eta = \infty$

$$(1.8) \quad c_i^0 = c_{is}.$$

Линейная краевая задача (1.5), (1.7), (1.8) допускает решение в квадратурах (индекс нуль у безразмерных величин будем далее опускать)

$$(1.9) \quad c_i(\eta) = [c_{is} + \psi(\infty)] \chi(\eta)/\chi(\infty) - \psi(\eta);$$

$$(1.10) \quad c_i(\eta) = \frac{c_{is} + \psi(\infty)}{1 + \kappa \chi(\infty)} [1 + \kappa \chi(\eta)] - \psi(\eta),$$

где

$$(1.11) \quad \psi(\eta) = \int_0^\eta E \int_0^t (w_i Sc/EN) dv dt;$$

$$(1.12) \quad \chi(\eta) = \int_0^\eta E dt;$$

$$(1.13) \quad E = (N_w Sc/N Sc_w) \exp \left[- \int_0^\eta (Sc \varphi/N) dt \right].$$

Решение (1.9) соответствует предельному переходу $\kappa \rightarrow \infty$ в формуле (1.10).

Таким образом, задача определения профиля массовой концентрации ионов в пограничном слое сводится к вычислению квадратур (1.11)—(1.13).

Заметим, что решение (1.9), (1.10) справедливо для произвольного закона изменения температуры и состава в пограничном слое. Поэтому для получения профиля концентрации ионов могут быть использованы численные решения, полученные для диссоциирующего газа с переменными числами Прандтля и Шмидта. Для диссоциирующего воздуха известны, например, решения [2, 3, 7, 8].

Считая известным закон изменения давления вдоль поверхности тела и зная зависимость коэффициента вязкости, числа Шмидта и параметра N от температуры и давления, можно взять квадратуры (1.11)—(1.13) и найти профиль концентрации ионов при фиксированном значении координаты x . Профили скорости $\varphi_\eta(\eta)$ и температуры $T(\eta)$ при этом известны из решения задачи для нейтральных компонентов.

Отметим далее, что при наличии решения задачи для диссоциирующего газа с учетом взаимодействия между пограничным слоем и ударной волной, как это сделано для не реагирующего газа на плоской пластине [19], можно также найти профили концентрации ионов в задаче с взаимодействием при данном законе изменения давления $p(x)$.

2. При не слишком высоких требованиях к точности квадратура (1.11) может быть сведена к (1.12). Удобные выражения получаются на

основе имеющейся особенности зависимости скорости ионизации от температуры и вида профиля температуры в гиперзвуковом пограничном слое. Как известно, при больших числах Маха для холодной стенки профиль температуры имеет хорошо выраженный максимум. В то же время зависимость скорости ионизации от температуры носит экспоненциальный характер. В результате основной вклад в образование заряженных частиц дает узкая область пограничного слоя в окрестности максимума температуры. Это позволяет представить скорость ионизации через δ -функцию и свести определения профиля массовой концентрации ионов к вычислению квадратуры (1.12).

При постоянном числе Шмидта поперек пограничного слоя получаются простые аналитические формулы, дающие возможность быстро провести приближенные расчеты*. Замена экспоненты δ -функцией, как показывают оценки, приводит к небольшим погрешностям.

Будем считать, что [16]

$$(2.1) \quad K_i = T^\nu \exp [T_i(1 - 1/T)],$$

причем

$$(2.2) \quad K_{im} = \sigma T_m^\nu \exp(-T_i), \quad T_i = D/T_m,$$

а константы σ , ν , D определяются конкретным видом реакции и аппроксимацией, предлагаемой разными авторами (для воздуха см., например, [10—12]).

Профиль температуры в гиперзвуковом пограничном слое для холодной стенки в области максимума и координаты η_m аппроксимируем функцией

$$(2.3) \quad T - 1 = -\omega(\eta - \eta_m)^2,$$

где ω — некоторая константа.

После разложения в ряд показателя экспоненты в (2.1) с использованием (2.3) представим скорость ионизации через δ -функцию в виде

$$(2.4) \quad K_i = (\pi/\omega T_i)^{1/2} \delta(\eta - \eta_m).$$

Подстановка (2.4) в (1.11) дает после очевидных преобразований

$$(2.5) \quad \psi(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \leq \eta_m, \\ \psi(\infty) [\chi(\eta) - \chi(\eta_m)] / [\chi(\infty) - \chi(\eta_m)], & \eta > \eta_m, \end{cases}$$

причем

$$\psi(\infty) = (\pi/\omega T_i)^{1/2} [Sc_m/N_m E(\eta_m)] [\chi(\infty) - \chi(\eta_m)].$$

При $Sc = \text{const}$ получим

$$E = [\varphi''/\varphi''(0)]^{Sc} (N/N_w)^{Sc-1},$$

$$\chi(\eta) = \theta(\eta) / [\varphi''(0)]^{Sc} N_w^{Sc-1}, \quad \theta(\eta) = \int_0^\eta [\varphi'']^{Sc} N^{Sc-1} dt,$$

$$\psi(\infty) = (\pi/\omega T_i)^{1/2} Sc [\theta(\infty) - \theta(\eta_m)] / [\varphi''(\eta_m) N_m]^{Sc}$$

и χ заменяется на θ в формуле (2.5). Здесь штрих означает дифференцирование по η .

* Указанное условие не является ограничением постановки, а лишь рассматривается как один из возможных частных случаев, упрощающих окончательные формулы (1.11), (1.12) и (2.5).

В заключение выпишем выражения для параметра κ и числа Дамкелера ζ для острого конуса. Из первого соотношения в (1.4) получаем при $(\mu G/T)_w = \text{const}$ (G — молекулярный вес)

$$(2.6) \quad \xi = \frac{d\xi}{dx} \frac{x}{3}.$$

Используя (2.2) (2.6), имеем после несложных преобразований

$$(2.7) \quad \kappa = 2Sc_w \left(\frac{m}{m_i} \frac{G_w}{3\mu_w} \frac{px}{u_s} \right)^{1/2},$$

$$\zeta = \frac{2\sigma m_i m}{3km_X m_Y} c_{Xm} c_{Ym} G_m \frac{px}{u_s} T_m^{v-1} \exp(-T_i)$$

(m — масса атома водорода).

Таким образом, зная Sc , профили φ и N , параметры η_m , ω и κ , можно найти распределение безразмерной массовой концентрации ионов в пограничном слое (1.9), (1.10), а с помощью (2.7) и ее абсолютное значение при фиксированной координате x .

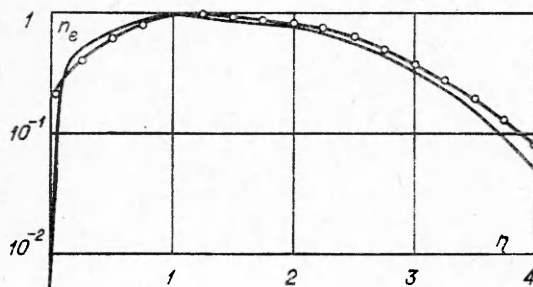
3. В качестве примеров расчета по аналитическим формулам рассмотрим острый конус, обтекаемый воздухом с постоянным давлением вдоль поверхности. Для нахождения профиля скорости используем представление об условной температуре [20]. В этом случае N формально заменяется на $N^* = (\rho_i)^*/(\rho_i)_w$, которое находится по значению условной температуры T^* , уравнение движения приводится к уравнению Блазиуса для функции $\varphi/(N^*)^{1/2}$ с переменной $\eta/(N^*)^{1/2}$. Безразмерная концентрация электронов и ее максимальное значение при $\kappa \gg 1$, $c_{is} \ll 1$ находят по формулам

$$n_e = \theta(\infty) c_i / T \psi(\infty) \theta(\eta_m),$$

$$n_{em} = [\psi(\infty) \zeta p G_m / K T_m] [m \theta(\eta_m) / m_i \theta(\infty)].$$

Проведенные оценки показывают, что эффективное число Шмидта для диссоциирующего воздуха не соответствует значениям, принимаемым в работах [1, 4] (авторами не учитывалось явление перезарядки). Лучшим приближением будет служить значение $Sc = 0,75$, которое используется в приведенных расчетах.

На фиг. 1 для случая (1.2) при $px/u_s = 10^{-3}$ атм·с, $N^* = 1$, $c_{is} \ll 1$ представлен профиль безразмерной концентрации электронов в пограничном слое (сплошная кривая) и для сравнения — результат, полученный методом конечных разностей [2] (точки). Оба расчета соответствуют углу полураствора конуса 10° , $u_s = 6585$ м/с и $T_w = 1000$ К. Так как при данном угле полураствора конуса и скорости набегающего потока при



Фиг. 1

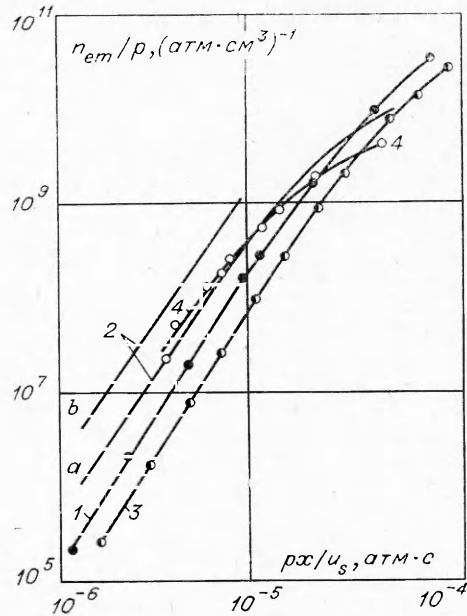
изменении параметра бинарного подобию [21] px/u_s профили температуры меняются слабо [2, 3], то при вычислениях использовано распределение температуры в окрестности вершины конуса для $p = 0,247$ атм [2]. В приводимом для сравнения примере также учитывается независимость профиля безразмерной концентрации от параметра бинарного подо-

бия. Отметим, что поведение концентрации при $\eta < 0,1$ получено в данной работе за счет уточненных краевых условий. Совпадение профиля по толщине пограничного слоя с результатом уточненных численных расчетов вполне удовлетворительное.

Экстраполируя значения максимальных концентраций атомарных компонентов, полученных в работе [2] приближенным методом [1], для нашей величины параметра бинарного подобия, можно показать, что условие (1.2) выполняется при $p < 0,5$ атм.

На фиг. 2 показаны результаты расчета максимальной концентрации электронов в пограничном слое для случая (1.1) (кривая 1). Параметр ω , слабо меняющийся с параметром бинарного подобия [2, 3], принят равным значению в окрестности вершины конуса, максимальные температура и концентрации атомарных компонентов

взяты из работы [2]. Использованы данные по константе скорости реакции ионизации $N + O \rightarrow NO^+ + e$, приведенные в работе [10]. На фиг. 2 показаны также результаты, полученные с помощью приближенной теории [1] (кривая 2, $a - T_m = 4580$ К, $b - T_m = 4700$ К), методом конечных разностей [2] (кривая 3) и методом интегральных соотношений [3] (кривая 4). Отметим, что полученные в данной работе результаты лучше согласуются с уточненными численными расчетами [2, 3], чем найденные приближенным методом [1], хотя и не требуют применения ЭВМ.



Фиг. 2

Поступила 30 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Levinsky E. S., Fernandez F. L. Approximate nonequilibrium air ionization in hypersonic flows over sharp cones.— «AIAA J.», 1964, vol. 2, N 3.
2. Blottner F. G. Nonequilibrium laminar boundary-layer flow of ionized air.— «AIAA J.», 1964, vol. 2, N 11.
3. Pallone A. J., Moore J. A., Erdos J. I. Nonequilibrium, nonsimilar solutions of the boundary-layer equations.— «AIAA J.», 1964, vol. 2, N 10.
4. Kang S. W. Nonequilibrium ionized hypersonic flow over a blunt body at low Reynolds number.— «AIAA J.», 1970, vol. 8, N 7.
5. Kang S. W., Jones W. L., Dunn M. G. Theoretical and measured electron density distributions at high altitudes.— «AIAA J.», 1973, vol. 11, N 2.
6. Knight D. D. Electron thermodynamical nonequilibrium effects in re-entry boundary layers.— «AIAA J.», 1971, vol. 9, N 2.
7. Kendall R. M., Bartlett E. P. Nonsimilar solution of the multicomponent laminar boundary layer by an integral-matrix method.— «AIAA J.», 1968, vol. 6, N 6.
8. Eickhoff H., Thiele F. Influence of the separation of elements on the flow field in hypersonic boundary layer of air local chemical equilibrium.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1975, vol. 18, N 9.
9. Лебедев А. Д. К вопросу о приэлектродных явлениях в газовом разряде.— ЖТФ, 1968, т. 38, № 10.

10. Рей К. Химическая кинетика воздуха при высокой температуре. — В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. М., «Мир», 1964.
11. Lin S. C., Teare J. D. Rate of ionization behind shock waves in air. — «Phys. Fluids», 1963, vol. 6, N 3.
12. Dunn M. G., Lordi J. A. Measurement of electron temperature and number density in shock-tunnel flows. — «AIAA J.», 1969, vol. 7, N 11.
13. Энгель А. Ионизованные явления в газах. М., Атомиздат, 1964.
14. Wilson J. Ionization rate of air behind high-speed shock waves. — «Phys. Fluids», 1966, vol. 9, N 10.
15. Железняк М. Б., Мнацаканян А. Х. Ионизационная релаксация за ударными волнами в воздухе. — ТВТ, 1968, т. 6, № 3.
16. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. Под ред. Г. И. Майкапара М., «Машиностроение», 1972.
17. Lees L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. — «Jet Propulsion», 1956, vol. 26, N 4.
18. Потапов А. В., Маргевич А. С. Дуговой разряд в цилиндрическом диоде с азимутальным магнитным полем. — ЖТФ, 1971, т. 41, № 10.
19. Kemp J. H. Hypersonic viscous interaction on sharp and blunt inclined plates. — «AIAA J.», 1969, vol. 7, N 7.
20. Eckert E. R. G. Engineering relation for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow. — «J. Aeronaut. Sci.», 1955, vol. 22, N 8.
21. Gibson W. E. Dissociation scaling for nonequilibrium blunt nose flows. — «ARS J.», 1962, vol. 32, N 2.

УДК 533.601.1 : 534.220.2

СТРУКТУРА ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ ГАЗОВ, ИСТЕКАЮЩИХ ЧЕРЕЗ СВЕРХЗВУКОВЫЕ СОПЛА

В. А. Белавин, В. В. Голуб, И. М. Набоко

(Москва)

В работах [1—4] рассматривалось нестационарное истечение газа из звуковых сопел. Развитием и продолжением этих экспериментальных исследований является изучение нестационарной струи, истекающей из сверхзвуковых сопел.

В общей постановке задача о движении фронта истекающего вещества и возмущений, сопутствующих ему в процессе формирования импульсной струи, определяется большим числом параметров, характеризующих истекающий газ и остаточный газ барокамеры, а также геометрию условий истечения. Если ограничить параметры торможения истекающего газа значениями, при которых его можно рассматривать как идеальный и совершенный, и организовать эксперимент так, чтобы остаточный и рабочий газы были одинаковыми, то число определяющих параметров сократится. В рамках принятых ограничений процесс истечения можно описать следующими обобщенными параметрами:

$$r/r_*, \theta, \tau c_*/r_*, p_*/p_\infty, T_*/T_\infty, \gamma, \bar{G},$$

где r — координата по радиус-вектору; θ — полярный угол; r_* — радиус критического сечения сопла; c_* , p_* , T_* — скорость звука, давление и температура в критическом сечении сопла; p_∞ , T_∞ — давление и температура в окружающем пространстве; \bar{G} — фактор, описывающий геометрию сопла; γ — отношение теплоемкостей газа; τ — время стадии процесса.