

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД

В. П. СИБИРЯКОВ

(Новосибирск)

В последнее время при акустическом исследовании зернистых сред — нефтегазовых коллекторов — обнаружен ряд необычных явлений. Так, на высокопористых телах, пустых или насыщенных газами, нередко отношения скоростей волн S и P оказываются недопустимо большими ($V_S/V_P > 1/\sqrt{2}$), что формально соответствует отрицательным значениям коэффициента Пуассона. По данным измерений [1] и др., значения V_S/V_P иногда превышают 0,75, т. е. коэффициент Пуассона меньше, чем $-0,3$. Кроме того, скорости волн, измеренные на одних и тех же образцах различными авторами, резко (до 10—15%) отличаются друг от друга, хотя на «хороших» тестовых образцах (из металлов, например) они практически совпадают. Опытные данные свидетельствуют о недостаточном развитии физических основ распространения слабых волн в зернистых средах — коллекторах углеводородов.

Зернистые среды обладают двумя важными особенностями. Во-первых, линейный размер зерна позволяет ввести новую, отличную от пористости f безразмерную характеристику порового пространства $\eta = \sigma_0 r_0/3$, σ_0 — удельная поверхность пористого тела, r_0 — средний радиус зерна. В интегральной геометрии доказывается [2], что $0 \leq \eta \leq 1 - f$. Во-вторых, наличие контактов между зернами и свободными от напряжений участками зерна приводит к сложному напряженному состоянию в каждом отдельно взятом зерне, так что, помимо среднего (крупномасштабного) поля, заметно изменяющегося на расстояниях порядка длины волны, возникает флуктуационное поле, которое существенно меняется на расстояниях порядка размеров отдельного зерна. Возникновение флуктуаций поля приводит к рассеянию энергии волн, которые в каждой точке уже не являются волнами P и S , а будут таковыми лишь в среднем. Последнее означает, что волны P и S формируются лишь средним (крупномасштабным) полем напряжений и деформаций, флуктуации обеспечивают рассеяние волн и уменьшение амплитуды среднего поля. При построении модели сплошной среды, эквивалентной зернистому скелету, следует отразить в этой модели две упомянутые выше существенные особенности микронеоднородных сред. При этом недостаточно ограничиться лишь силовой эквивалентностью сред в том смысле, что соотношения между средними напряжениями и деформациями скелета должны совпадать с такими же соотношениями сплошной модели. Наличие рассеяния и ослабление крупномасштабного поля должны привести к какому-то механизму «поглощения» волн, обусловленному рассеянием.

Изложенные выше соображения требуют строгого решения задачи упругого равновесия на отдельном зерне, что в принципе может дать соотношения между напряжениями и деформациями в центре зерна (т. е. средние значения λ и μ на структуре) и также долю энергии α флуктуационного поля по отношению к среднему полю. Эти константы, зависящие от геометрии порового пространства и вещества скелета, позволяют перейти к составлению уравнения движения некоторого множества частиц с известными средними значениями коэффициентов Ламэ и известной долей рассеянной энергии. Следует ожидать, что наличие изотропного рассеяния эквивалентно введению дополнительных случайно ориентированных источников, которые забирают энергию крупномасштабного поля, ослабляя последнее. Цель данной работы — получение уравнений движения (и равновесия) для среднего поля, но только оно регистрируется прибором, опирающимся на достаточно большое множество частиц, так как средние значения флуктуационных напряжений и деформаций равны нулю. Таким образом, в силовом отношении флуктуационное поле эквивалентно нулю, однако в энергетическом смысле его влияние весьма существенно.

Пусть некоторый объем V заполнен зернистыми частицами, обладающими площадками контактов, через которые и передаются нагрузки. На свободной части поверхности зерен нагрузки равны нулю. Уравнение движения для среднего поля будем искать в виде асимптотического равенства, где малым параметром ϵ будет отношение радиуса зерна r_0 к среднему линейному размеру области V , т. е. $\epsilon = r_0 V^{-1/3}$.

В ряде работ [3, 4] показано, что поле перемещений мало отличается от среднего поля по абсолютной величине (флуктуации перемещений содержат множитель порядка ϵ). Однако флуктуационные деформации и напряжения по своей интенсивности сравнимы с величиной средних напряжений и деформаций. Учитывая это обстоятельство, представим поле перемещений в некотором объеме V , содержащем большое число частиц и вместе с тем столь малом, что его линейные размеры много меньше длины распространяющейся волны, в виде

$$(1) \quad U_i(x, t) = u_i(x, t) + \epsilon v_i(x/\epsilon, t).$$

В равенстве (1) поле перемещений $U_i(x, t)$ зависит от трех пространственных координат, обозначенных одним символом x , и от времени t . Первое слагаемое зависит от «медленной» переменной x и является крупномасштабным полем, а второе — от «быстрой» переменной x/ϵ и является флуктуационной составляющей. Предполагается, что u_i и v_i одного порядка малости, поэтому $u_i(x, t) \gg \epsilon v_i(x/\epsilon, t)$. Следовательно, имеют место

очевидные соотношения

$$(2) \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial y_k}, \quad e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right);$$

$$(3) \quad \tilde{e}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right), \quad E_{ik} = \bar{e}_{ik} + \tilde{e}_{ik}.$$

В соотношениях (2), (3) $y_j = x_j/\varepsilon$, полный тензор деформации \bar{E}_{ik} составлен из среднего тензора \bar{e}_{ik} и флуктуационного \tilde{e}_{ik} . Из формул (2), (3) видно, что деформации \tilde{e}_{ik} уже одного порядка с деформациями \bar{e}_{ik} , хотя среднее значение $\langle \tilde{e}_{ik} \rangle = 0$.

Поле напряжений в скелете $\Sigma_{ik} = \lambda(\bar{\theta} + \tilde{\theta})\delta_{ik} + 2\mu(\bar{e}_{ik} + \tilde{e}_{ik})$ также состоит из крупно- и мелкомасштабных полей. Составим разность

$$(4) \quad \operatorname{div} Q - E = \frac{\partial \Sigma_{ik}}{\partial x_k} U_i, \quad Q_i = \Sigma_{ik} U_k,$$

где E — плотность потенциальной энергии деформирования, $\int_V EdV = \int_S P_i u_i dS$; u_i — вектор перемещений; P_i — вектор нагрузок; V — объем области; S — ограничивающая объем V поверхность. В условиях квазистатического равновесия (оно имеет место при деформировании объема V , линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны) дивергенция вектора Умова — Пойнтинга $E = \operatorname{div} Q$ в точности равна плотности упругой энергии этого тела, поэтому из (4) вытекает уравнение равновесия в форме

$$(5) \quad \partial \Sigma_{ik} / \partial x_k = 0.$$

Однако для среднего поля σ_{ik} аналогичное (5) уравнение уже не имеет места, так как

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \right) (\bar{u}_i + \tilde{u}_i) = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \bar{u}_i + \tilde{f}_i \tilde{u}_i.$$

В уравнении (6) учтено, что значения произведений среднего поля на флуктуационное равны нулю (в среднем). Однако этого нельзя сказать о произведении объемной флуктуационной силы $\tilde{f}_i = \partial \tilde{\sigma}_{ik} / \partial x_k$ на флуктуационное перемещение \tilde{u}_i . Эта величина по порядку совпадает с энергией флуктуаций. Подставляя (4) в (6), получаем

$$(7) \quad \frac{\partial \Sigma_{ik}}{\partial x_k} = (u_i + \varepsilon v_i) \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y_k} \delta_{ik} + 2\mu \frac{\partial \tilde{e}_{ik}}{\partial y_k} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} (\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} (\bar{e}_{ik} + \tilde{e}_{ik}) \right\} = u_i \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} + \lambda v_i \operatorname{div} v_i + \mu v_i \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right) + (u_i + \varepsilon v_i) \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} (\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} (\bar{e}_{ik} + \tilde{e}_{ik}) \right\}.$$

Во втором и третьем членах равенства (7) есть выражения типа

$$v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_1^2} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right)^2.$$

Следовательно,

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_1^2} - \tilde{e}_{11}^2 \right) = -\tilde{\sigma}_{11} \tilde{e}_{11} + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_1^2},$$

$$\text{аналогично } (\lambda + 2\mu) \left(v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y_2^2} + v_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial y_3^2} \right) = -\tilde{\sigma}_{22} \tilde{e}_{22} - \tilde{\sigma}_{33} \tilde{e}_{33} - \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 v_2^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 v_3^2}{\partial y_3^2} \right).$$

Попытаемся усреднить величины типа $\partial^2 v^2 / \partial y^2$ на расстояниях l , гораздо больших размеров зерна и в то же время малых по сравнению с линейными характерными размерами в нестационарном процессе (например, cT , где T — время действия сигнала в источнике). Тогда

$$\left\langle \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right\rangle = \frac{1}{l} \left\{ \frac{\partial v^2}{\partial y} \Big|_{x+l} - \frac{\partial v^2}{\partial y} \Big|_x \right\}.$$

Можно провести второе усреднение

$$\left\langle \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right\rangle = \frac{1}{l^2} \{v^2|_{x+l} - v^2|_x\}.$$

Поскольку v^2 есть случайная функция в точках среды, равновероятно получить разность $v^2_{x+l} - v^2_x$ со знаками $+$ и $-$. Тем самым, по-видимому, среднее значение этой разности равно нулю. Получаем вклад от такого типа выражений в виде флуктуационной части энергии сжатия, т. е. $\bar{\sigma}_{ii} \tilde{e}_{ii}$. В подробной записи три члена выражения (7) имеют вид

$$\begin{aligned} & u_1 \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} + u_2 \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_k} + u_3 \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_k} + \lambda \left\{ \left(v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \operatorname{div} v \right\} + \\ & + \mu \left\{ 2 \left(v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y_2^2} + v_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial y_3^2} \right) + v_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right) + \right. \\ & + v_1 \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \right) + \\ & \left. + v_3 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_3} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Выражения типа

$$\mu \left\{ v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_2^2} + v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y_1^2} \right\}$$

преобразуются к виду

$$\mu \left\{ - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_2^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_2^2} \right) \right\}.$$

Прибавляя и вычитая величину $2 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \frac{\partial v_2}{\partial y_1}$, имеем

$$\mu \left\{ - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_2^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_2^2} \right) \right\}.$$

Для средних значений, учитывая, что $\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\rangle = 0$, $\left\langle \frac{\partial^2 v_2^2}{\partial y_1^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial y_2^2} \right\rangle = 0$,

получаем вклад в форме $2\tilde{\mu} \tilde{e}_{12}^2 = 2\tilde{\sigma}_{12} \tilde{e}_{12}$, т. е. сдвиговые составляющие флуктуационной энергии. Так как средние значения смешанных производных равны нулю при несовпадающих значениях i, k , то первые три члена выражения (7) после операции усреднения принимают форму

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} \bar{u}_i - \tilde{E}_i, \quad \tilde{E}_i = \tilde{\sigma}_{ik} \tilde{e}_{ik}.$$

Остается выяснить смысл члена

$$(u_i + \varepsilon v_i) \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} (\bar{\theta} + \tilde{\theta}) \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} (\bar{e}_{ik} + \tilde{e}_{ik}) \right\},$$

или

$$(8) \quad U_i \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \Theta \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} E_{ik} \right\}.$$

Прежде всего заметим, что $\partial \lambda / \partial x_k$, $\partial \mu / \partial x_k$ сосредоточены на границах $r = r_0$ зерен, точнее, на части границ, свободной от нагрузок, т. е. на свободной поверхности пор, где они принимают бесконечные значения. Во внутренней области зерна и на поверхности контактов $\partial \lambda / \partial x_k = \partial \mu / \partial x_k = 0$. Знак упомянутых производных на свободной от нагрузок поверхности зерна определяется косинусом угла, образованного осью с направлением радиуса вектора из центра зерна в заданную точку свободной поверхности.

Поэтому для точек свободной поверхности $\partial\lambda/\partial x_k = \partial\lambda n_k/\partial r = \delta(r)n_k$, где $n_k = \cos(n, x_k)$. Осредним выражение (8) по объему зерна:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \left[\frac{\partial\lambda}{\partial x_k} \Theta \delta_{ik} + 2 \frac{\partial\mu}{\partial x_k} E_{ik} \right] U_i dV &= \frac{1}{V_0} \int_{S^*} U_i (\lambda \Theta \delta_{ik} + 2\mu E_{ik}) n_k dS = \\ &= \frac{1}{V_0} \int_{S^*} U_i \Sigma_{ik} n_k dS. \end{aligned}$$

Здесь S^* — часть поверхности зерна, свободная от нагрузок. В силу очевидного соотношения между напряжениями и нагрузками имеем

$$(9) \quad \frac{1}{V_0} \int_{S^*} \Sigma_{ik} n_k U_i dS = \frac{1}{V_0} \int_{S^*} P_i U_i dS = 0.$$

Интеграл (9) есть энергия деформирования, которая сосредоточена на свободной поверхности зерна. Последняя равна нулю в силу очевидного соотношения для пустого скелета $P_i|_{S^*} = 0$. Итак, среднее значение выражения (8) равно нулю. Таким образом, осреднение выражения $U_i \partial \Sigma_{ik} / \partial x_k$ приводит к уравнениям равновесия

$$(10) \quad \bar{u}_i \partial \bar{\sigma}_{ik} / \partial x_k = \bar{E}_i,$$

где \bar{E}_i — часть флуктуационной энергии, образованной произведением напряжений и деформаций с фиксированным индексом i . Так как флуктуационная энергия — функция средней энергии E , представим ее в виде

$$(11) \quad \bar{E} = A + \alpha \bar{E} + \beta E^2 + \dots$$

Принимая во внимание отсутствие флуктуационного поля при исчезновении среднего поля, нужно положить $A = 0$. Если ограничиться первым членом разложения (11), то получаем формулу $\bar{E} = \alpha \bar{E}$, где α — постоянная, зависящая от структуры порового пространства и равная нулю в сплошной среде.

Уравнение равновесия (10) принимает вид $\partial \bar{\sigma}_{ik} / \partial x_k = \alpha \bar{E}_i / \bar{u}_i$. Уравнение движения связано с учетом инерционных сил, а инерционные силы, согласно (1), почти целиком (с точностью до ϵ) определяются ускорением среднего поля. Поэтому уравнения движения представляются в форме

$$(12) \quad \partial \bar{\sigma}_{ik} / \partial x_k - \alpha \bar{E}_i / \bar{u}_i = \rho \ddot{u}_i,$$

где ρ — средняя плотность структуры. В дальнейшем знак черты у среднего поля будем опускать. Чтобы замкнуть систему уравнений (12), необходимо связать средние напряжения $\bar{\sigma}_{ik}$ со средними деформациями. Это особая задача и может быть решена строго на отдельном зерне методами граничных интегральных уравнений [5].

При наличии в среднем продольной плоской волны все деформации (среднего поля) равны нулю, кроме одной, так что средняя энергия $E = \sigma \cdot e = (\lambda + 2\mu) (\partial u / \partial x)^2$. Нелинейное уравнение (12) в этом случае имеет вид

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и при $\alpha = 0$ переходит в обычное волновое уравнение для сплошной среды, причем $c^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho_0 (1 - f)$, где f — пористость скелета, ρ_0 — плотность материала зерна, а λ, μ — средние значения коэффициентов Ламэ на структуре. Константы c и α целиком определяются структурой порового пространства, т. е. пористостью f , произведением $\eta = \sigma_0 r_0 / 3$ удельной поверхности на средний радиус зерна и средним числом контактов n .

Если для уравнения (13) поставить задачу о распространении волн при мгновенном включении единичной нагрузки, то задача не содержит никаких характерных размеров времени и расстояния.

Безразмерная величина деформации зависит лишь от единственной безразмерной переменной $\xi = x/ct$. Такие решения называются автомодельными. Ищем решение задачи интегрирования уравнения (13) при граничном условии вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e_0(0), & t \geq 0. \end{cases}$$

Положим $u = ct[u(\xi) + c_0]$, где $u(\xi)$ — безразмерная функция, а c_0 — безразмерная постоянная. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{u}'_{\xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{ct} \bar{u}''_{\xi\xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left[\bar{u} - \bar{\xi} \bar{u}'_{\xi} + c_0 \right], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{\xi}^2 \bar{u}''_{\xi\xi} \frac{1}{ct}.$$

Одна из переменных таким образом исключается, и в случае автомодельных движений уравнение (13) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение (знак черты у безразмерных функций опускается)

$$(14) \quad u''(u + c_0)(1 - \xi^2) = \alpha u'^2.$$

Граничное условие для уравнения (14) ставится на линии $\xi = 0$, т. е. при $x = 0$, где задаются деформации $u'(0)$. Уравнение (14) допускает точное решение, так как подстановкой $u'/u + c_0 = v$ оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Вместо (14) имеем уравнение первого порядка

$$v' + v^2(1 - \alpha/(1 - \xi^2)) = 0,$$

которое решается в виде

$$v = \frac{1}{\xi + D + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi}},$$

где D — произвольная постоянная. Очевидно, что при $\xi \rightarrow 0$, т. е. на границе $x = 0$, $u' \rightarrow (u + c_0)$, как и в обычной упругости, где $u = A(\xi - 1)$, а деформация u' постоянная. Это требование определяет значение $D = -1$. Поэтому

$$(15) \quad v = \frac{u'}{u + c_0} = \frac{1}{\xi - 1 + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi}}.$$

Постоянную c_0 выберем теперь таким образом, чтобы перемещения на фронте $\xi = 1$ были равны нулю. Это требование определяет окончательный вид решения

$$(16) \quad u = A \left\{ \exp \int_0^{\xi} v(x, \alpha) dx - \exp \int_0^1 v(x, \alpha) dx \right\},$$

$$\text{где} \quad A = \frac{-e_0(0)}{1 - \exp \int_0^1 v(x, \alpha) dx}.$$

В формуле (16) второе слагаемое есть постоянная, обеспечивающая равенство нулю перемещений на фронте волны $\xi = 1$ и впереди него. Решение (16) при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в обычное упругое автомодельное решение, т. е. постоянную деформацию за фронтом волны, которая имеет скачок на фронте. При $\alpha \neq 0$ уже нет постоянных деформаций за фронтом волны $\xi = 1$, они являются функциями переменной ξ . Важно и то обстоятельство, что деформация (и скорость частиц) на фронте $\xi = 1$ равна нулю в силу бесконечного значения логарифма в формуле (15). Следовательно, в рассмотренной модели среды не могут быть сильные разрывы. Деформации вступают плавно, и волны P и S могут быть лишь волнами слабого разрыва. Интересно, что энергия волн распространяется не только со скоростями, близкими к c , но и с любыми другими, меньшими c . Это обстоятельство сильно осложняет интерпретацию волн в микронеоднородных средах, так как энергия первых вступлений чрезвычайно мала по сравнению с энергией более медленных волн. Конкретные расчеты перемещений и деформаций в зависимости от ξ при различных значениях α приведены на фиг. 1, а, б, где $\alpha = 0,01$ и $0,11$ соответственно, сплошные линии — зависимость безразмерного перемещения u/ct от ξ , штриховые — зависимость деформации от ξ .

Уравнение движения (13) при $c = 1$ имеет решение в виде волн, распространяющихся в одном направлении с неизвестной пока скоростью, т. е. $u = f(t - x/a)$. Подставляя это соотношение в (13), получим обыкновенное уравнение

$$\left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \frac{f''}{f'} = \frac{\alpha}{a^2} \frac{f'}{f},$$

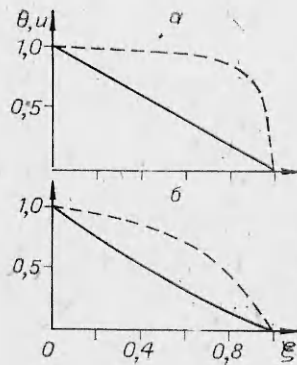
откуда

$$(17) \quad u = C(t - x/a)^{\frac{1}{(1-\alpha)/(1-a^2)}},$$

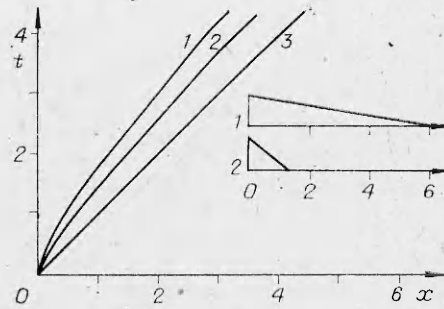
где C — произвольная постоянная. Если в точном решении (17) положить степень $1/[(1-\alpha)/(1-a^2)] = n$, то скорость волн a есть функция

$$a(n, \alpha) = \sqrt{1 - n\alpha/(1-n)}.$$

Так, при линейном нарастании деформаций (квадратичный закон нарастания перемещений) $n = 2$ и соответственно $a = \sqrt{1 - 2\alpha} \approx 1 - \alpha$. Тем самым при отсутствии



Ф и г. 1



Ф и г. 2

скачка деформаций скорость волн существенно меньше. При дальнейшем увеличении n скорость возрастает, стремясь к пределу $a = \sqrt{1 - \alpha}$, все же меньшему, чем в случае внезапно приложенной нагрузки. Если же $n = 1/(1 - \alpha)$, т. е. деформации растут очень медленно (по закону $e(0, t) = t^{\alpha/(1-\alpha)}$), то $a = 0$, и волны вообще не распространяются. Этот результат сильно отличается от чисто волновых процессов, где волны должны распространяться при любом законе изменения нагрузки во времени. Таким образом, в зависимости от вида приложенной нагрузки скорости волн существенно меняются. Поэтому в опытах может возникнуть целая зона неустойчивого приема колебаний в диапазоне от $c(1 - \alpha)$ до c .

При волновом процессе имеет место соотношение $u = f(t - x)$, и, следовательно, $u_t + u_x = 0$. В случае уравнения (13) это, очевидно, не так, однако возникает гипотеза, что $u_t + u_x = O(\alpha)$. В характеристических переменных $\xi = t - x$, $\eta = t + x$ уравнение движения имеет вид

$$(18) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{4u} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 = 0.$$

Полагая $\partial u / \partial \eta = v$, заметим, что относительно функции $v(\xi, \eta)$ уравнение (18) есть уравнение Риккати

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{4u} v^2 - \frac{\alpha}{2u} \frac{\partial u}{\partial \xi} v + \frac{\alpha}{4u} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 = 0.$$

Если гипотеза о том, что $\partial u / \partial \eta = O(\alpha)$, верна, то член $\alpha v^2 / 4u = O(\alpha^3)$, и им можно пренебречь. В этом случае решение очевидно:

$$(19) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\alpha}{4} u^\alpha \int u^{-(1+\alpha)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

Если же пренебречь величинами порядка α^2 , то (19) можно заменить на

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\alpha}{4} \int u^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

Таким образом, оказывается, что $\partial u / \partial \eta$ порядка α . Это оправдывает выдвинутую гипотезу. Теперь легко показать, что волновой оператор, примененный к комбинации $u_x + u_t$, обращается в нуль с погрешностью $O(\alpha^2)$, т. е. $\square(u_x + u_t) = O(\alpha^2)$. Поэтому линеаризованное уравнение движения есть уравнение третьего порядка

$$(21) \quad \square(u_x + u_t) = 0.$$

Общее решение (21):

$$u = \alpha[f_1(\xi) + f_2(\eta)] + f_3(\xi),$$

где f_1, f_2, f_3 — произвольные функции. Наличие трех произвольных функций позволяет решить весьма нетривиальный вопрос о конфигурации фронта волны слабого разрыва $x = x_0(t)$. Действительно, на границе $x = 0$ заданы деформации $\partial u(0, t) / \partial x = h(t)$ на искомом фронте слабого разрыва $u_x = u_t = 0$ и, кроме того, на границе $x = 0$ из

соотношения (20) следует еще одно условие $u_x + u_t|_{x=0} = -\frac{\alpha}{2} M(t)$, где $M(t) \approx \int_0^t \frac{\dot{u}^2(0, t)}{u(0, t)} dt$. Четыре перечисленных условия полностью определяют три неизвест-

ные функции и конфигурацию фронта $x = x_0(t)$. Полагая $x_0(t) = t\zeta(t)$, запишем

$$(22) \quad -\alpha [f'_2(t) + \dot{M}(t)/4] t \frac{2\zeta}{1-\zeta} = h(t) + \alpha M(t)/4, \\ f_2[t(1+\zeta)/(1-\zeta)] - f_2(t) = M(t)/4.$$

Исключая функцию f_2 из уравнений (22), получаем функциональное уравнение фронта, т. е. зависимость $\zeta(t)$. Конкретный расчет фронта для синусоидального (по деформациям) сигнала приводит к тому, что вначале фронт движется со скоростью $c(1-\alpha)$, что с точностью до малых порядка α^2 совпадает с точным решением для линейно нарастающей нагрузки. Затем скорость фронта увеличивается, однако при всех обстоятельствах $x_0(t)/t < c$.

При резком включении воздействия существует область, где линейризация движения невозможна. В этом случае следует линейризовать движение в области, ограниченной линией $x = 0$ и некоторой волной слабого разрыва $x = x_0(t)$, подлежащей определению. В области же, заключенной между характеристикой $x = ct$ и фронтом $x = x_0(t)$, движение, очевидно, будет автомодельным (фиг. 2, $\alpha = 0,1$, линии 1, 2 соответствуют $x = x_0(t)$, линия 3 — $x = ct$).

Пусть в области, ограниченной линиями $x = x_0(t)$ и $x = 0$, движение описывается уравнением $u'' = u/c^2$, тем самым имеют место соотношения

$$u(x, t) = f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Соответственно

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = f'_2(t + x/c) - f'_1(t - x/c), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f'_2(t + x/c) + f'_1(t - x/c).$$

На втором фронте слабого разрыва (в силу непрерывности скоростей и деформаций):

$$(23) \quad c [\bar{u}'(\xi) - \xi u'(\xi)] = f'_1[t - x_0(t)/c] + f'_2[t + x_0(t)/c];$$

$$(24) \quad c \bar{u}'(\xi) = f'_2[t + x_0(t)/c] - f'_1[t - x_0(t)/c].$$

Кроме того, на границе $x = 0$ задана деформация $e_0(t)$, т. е.

$$c \partial u(0, t) / \partial x = f'_2(t) - f'_1(t),$$

или

$$(25) \quad c e_0[t + x_0(t)/c] = f'_2[t + x_0(t)/c] - f'_1[t + x_0(t)/c].$$

Соотношения (23) — (25) достаточно для определения произвольных функций f_1, f_2 и уравнения второго фронта $x = x_0(t)$. Складывая и вычитая равенства (23), (24), с учетом (25) найдем

$$(26) \quad \bar{u}(\xi) + (1 - \xi) \bar{u}'(\xi) = 2e_0[t + x_0(t)/c] + 2f'_1[t + x_0(t)/c]/c,$$

$$\bar{u}(\xi) - (1 + \xi) \bar{u}'(\xi) = 2f'_1[t - x_0(t)/c]/c.$$

Исключив из (26) неизвестную функцию f'_1 , можно получить функциональное уравнение линии $x = x_0(t)$. Для этого положим $t(1 + \xi) = z$. Тогда уравнения (26) примут вид

$$\bar{u}(z/t - 1) + (2 - z/t) \bar{u}'(z/t - 1) = 2e_0(z) + 2f'(z)/c,$$

$$\bar{u}(z/t - 1) - z \bar{u}'(z/t - 1)/t = 2f'_1[z(1 - \xi)/(1 + \xi)]/c.$$

Полагая во втором соотношении вместо z величину $z(1 + \xi)/(1 - \xi)$ и вычитая второе уравнение из первого, получаем функциональное уравнение второго фронта, связывающее t и ξ :

$$(27) \quad \bar{u}(\xi) - \bar{u}[(1 + \xi)^2/(1 - \xi)] + (1 - \xi) \bar{u}'(\xi) + (1 + \xi)^2 \bar{u}'[(1 + \xi)^2/(1 - \xi) - 1]/(1 - \xi) = 2e_0[t(1 + \xi)].$$

На фиг. 2 приведены расчеты кинематики границы второго слабого разрыва, которая в нелинейной механике обычно называется волной разгрузки.

При $t = 0$ уравнение (27) удовлетворяется подстановкой $\xi = 0$. Следовательно, второй фронт начинает движение с нулевой скоростью. Из расчетов видно, что с течением времени скорость второго фронта приближается к c , так что в дальней зоне у обоих фронтов годографы вступлений — параллельные прямые. Линейризованная задача сразу же показывает затухание плоской волны с расстоянием, ибо для волнового уравнения ставится не граничная задача, как в обычной упругости, а близкая к смешанной, когда одна из границ приближается к характеристике. На этой границе перемещения и деформации стремятся к нулю, что и определяет затухание плоской волны. В оште второй фронт должен обладать гораздо большей интенсивностью, чем первый, так как скорости частиц и деформаций при $x = ct$ равны нулю, и прибор может зафиксировать

ровать лишь вторые производные от перемещений. На втором фронте отличны от нуля перемещения и деформации.

Таким образом, рассмотренная модель показывает, что измерение скоростей акустических волн в микро неоднородных средах — весьма нетривиальная задача. Неустойчивая регистрация скоростей волн в диапазоне от $c(1 - \alpha)$ до c (по данным [5] величина α может для высокопористых тел достигать 0,1—0,15 и более) вполне может привести к кажущемуся эффекту появления отрицательных коэффициентов Пуассона, даже если статические измерения этого не подтверждают. Непостоянство скорости фронта от вида приложенного воздействия может объяснить тот парадоксальный факт, что скорость волн в таких средах зависит не только от самой среды, но и является в некотором смысле функцией экспериментальной установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gregory A. R. Fluid saturation effect on dynamic elastic properties of sedimentary rocks. — *Geophysics*, 1976, v. 41.
2. Усманов Ф. А. Основы математического анализа геологических структур. Ташкент: Фан, 1977.
3. Жигов В. В., Козлов С. М. и др. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов. — *УМН*, 1979, т. 34, № 5.
4. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур. — *ДАН СССР*, 1975, т. 22, № 3.
5. Сибиряков Б. П. Упругие свойства пустых скелетов зернистых коллекторов. — *ПМТФ*, 1983, № 4.

Поступила 18/VII 1984 г.

УДК 534.112

ТЕРМОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦЕЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

А. И. ПОТАПОВ, В. В. СТУПНИ

(Горький)

Многие тонкостенные элементы конструкций вынуждены работать в нестационарных температурных полях. В результате теплообмена с окружающей средой в них возникают пульсирующие термоупругие напряжения, которые могут приводить к динамической потере устойчивости [1]. Простейшей системой, в которой наблюдаются подобные эффекты, является металлическая струна с протекающим по ней переменным электрическим током [2]. Переменное температурное поле, возникающее за счет джоулевых потерь, вызывает периодическую модуляцию натяжения струны и при определенных условиях приводит к параметрическому возбуждению колебаний.

В данной работе экспериментально и теоретически исследован эффект возбуждения поперечных колебаний струны при протекании по ней переменного тока большой плотности. Принятая теоретическая модель позволяет с хорошей точностью рассчитать пороги параметрической неустойчивости, зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока и величины расстройки. В то же время она не предсказывает наличия жестких режимов возбуждения и срыва колебаний.

Эксперимент. При протекании по металлической струне переменного электрического тока промышленной частоты 50 Гц происходит ее нагрев за счет джоулевых потерь. Статическое удлинение проволоки, обусловленное повышением ее средней температуры, выбиралось под действием растягивающего груза N_0 , который задавал постоянную составляющую натяжения.

Схема экспериментальной установки показана на фиг. 1, где 1 — струна из высокоомной проволоки, 2 — груз, задающий постоянное натяжение, 3 — латр.

Сила протекающего тока I_0 и напряжение на рабочем участке измерялись амперметром (А) и вольтметром (В) класса точности 1,5. Температура проводника определялась промышленным пирометром «Проминь», обеспечивающим измерение температуры в диапазоне 1075—5273 К с погрешностью 1—1,5%. Амплитуда колебаний струны измерялась с помощью микрометра. Натяжение струны N_0 задавалось рычажным устройством и изменялось дискретно с помощью разновесок с шагом 10^{-3} Н. Это позволило достаточно плавно менять частоту свободных колебаний струны, которая вычислялась по формуле

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{N_0}{\rho S} [1 + \alpha_T (T_c - T_0)]},$$

где n — номер формы колебаний; ρ — плотность; S — площадь поперечного сечения струны при температуре T_0 ; α_T — коэффициент линейного расширения; T_c , T_0 —