УДК 165.0
DOI: 10.15372/PS20220413

И.А. Гущин

КОНТЕКСТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ И ВЫБОР МЕЖДУ СЕМАНТИКАМИ*

В статье рассматривается применение предложенных О.А. Козыревой «семантики с агентом» и семантики «без агента» к математическим предложениям. В случае если удастся доказать, что математические предложения зависят от контекста, эти предложения будут нуждаться в семантической интерпретации наравне с другими контекстно зависимыми предложениями. Автор представляет интерпретацию математических предложений как зависящих от контекста через обращение к эпистемическому контекстуализму и эпистемологии компьютерных доказательств. Исходя из этой интерпретации, он высказывает ряд соображений в пользу того, что понимание семантики как «семантики с агентом» совместимо с тезисом о контекстной зависимости математических предложений, тогда как понимание семантики как «семантики без агента» для такой совместимости потребует дополнительной формализации прагматических факторов.

Ключевые слова: доказательство; семантика; прагматика; значение; обозримость; знание; эпистемический контекстуализм

I.A. Gushchin

CONTEXT DEPENDENCE OF MATHEMATICAL SENTENCES AND THE CHOICE BETWEEN SEMANTICS

The article considers the application of the “semantics with an agent” and “semantics without an agent” proposed by O.A. Kozyreva to mathematical sentences. If it is possible to prove that mathematical sentences are context-dependent, these sentences will need semantic interpretation along with other context-dependent sentences. The author presents an interpretation of mathematical sentences as context-dependent by appealing to the epistemic contextualism and the epistemology of computer proof. Based on this interpretation,

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Программы развития Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина в соответствии с программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

he argues that the understanding of semantics as “semantics with an agent” is compatible with the thesis of context dependence of mathematical sentences, while the understanding of semantics as “semantics without an agent” will require additional formalization of pragmatic factors to achieve compatibility with such sentences.

Keywords: proof; semantics; pragmatics; meaning; visibility; knowledge; epistemic contextualism

В открывающей данную дискуссию статье О.А. Козыревой [2] предложены две версии семантики: «семантика без агента» и «семантика с агентом». С точки зрения О.А. Козыревой, разногласия между сторонниками достаточности формальной семантики Д. Каплана и теми, кто находит недостатки в этой семантике, возникают потому, что первые и вторые ставят перед теорией языка разные цели. В настоящей статье я представлю сравнительный анализ двух этих версий не исходя из их внутренних свойств, а через определение того, какая из них окажется более эффективной при описании предложений определенного рода – математических предложений.

Зависят ли предложения математики от контекста?

Традиционно математические предложения понимаются как не зависящие от контекста. Тогда всякое математическое предложение выражает ровно одну пропозицию, которую можно установить, опираясь на принцип композициональности. С этим обстоятельством связано представление об утверждениях математики как «золотом стандарте» нашего знания: возможность построения формальных доказательств кажется «эталонным» способом гарантированного установления значения математических предложений. Математические предложения, понимаемые таким образом, не являются интересным объектом для рассмотрения через разные версии семантики в силу фиксированности их значения.

Альтернативную точку зрения на контекстную зависимость математических предложений представил Б. Леве [7]. Она заключается в том, что предложения математики зависят от контекста, их значение не фиксировано, следовательно, математическое знание – это такое же знание, как и любое другое знание, а доказательство не является «эталонным» способом обоснования. Чтобы вывести такие утверждения, Б. Леве рассматривает классическое представление о математическом знании и находит в нем слабое место.

Это классическое представление задается через стандартное трехчастное определение знания: знать значит иметь *истинное обоснованное убеждение.* Традиционно *истинность* задается посредством принятия платонистской метафизики, в рамках которой считается, что математические истины являются истинами потому, что они соответствуют положению дел среди абстрактных объектов, например чисел. Такое представление не беспроблемно [3; 4; 6], однако Б. Леве при формулировании аргументации в пользу контекстной зависимости предложений математики к аргументам П. Бенацеррафа не обращается. В отношении *убеждения* никакой специфики в случае с математикой Б. Леве также не формулирует. *Обоснованность* достигается через доказательства, которые, как упоминалось выше, функционируют как «эталонные» обоснования. Именно обоснованность становится целью атаки Б. Леве.

С точки зрения классического определения знать некоторое предложение – значит знать обоснование p. Если речь идет о знании математического предложения p, то это знание означает знание доказательства p. Однако, как отмечает Б. Леве, в реальной математической практике такое соблюдается далеко не всегда.

В качестве примера он рассматривает теорему Фейта – Томпсона, примечательность которой заключается в том, что оригинальное доказательство этой теоремы имело большой размер (255 страниц). Из-за его большого размера в реальной математической практике мало кто из «агентов-математиков», даже активно использующих данную теорему, знает ее доказательство. Это порождает следующую затруднительную ситуацию: согласно классическому представлению, знать некоторое математическое предложение p – значит знать доказательство p. Если p – это теорема Фейта – Томпсона, то знает ли «агент-математик» p, не зная доказательство p? В качестве возражения к этому аргументу можно привести тот факт, что даже если не все «агенты-математики» знают доказательство данной теоремы, то хотя бы кто-то знает его.

Аргументацию Б. Леве можно расширить, рассмотрев компьютерные доказательства. Для примера можно взять доказательство теоремы о четырех красках. Доказательство было сделано компьютером, при этом использовалось около 500 правил вывода, а в финальном доказательстве нужно было выполнить редукцию 1482 конфигураций. Для человека это доказательство является необозримым, он не может его проверить по шагам, а значит, не может сказать, что знает его [5]. Тогда по аналогии с предыдущей теоремой можно сформулировать еще более затруднительную ситуацию: ни один из «человеческих агентов-математиков» не знает доказательство теоремы о четырех красках, а значит, возражение в стиле «хотя бы кто-то его знает» здесь не сработает.

Из такой расширенной аргументации Б. Леве можно сделать вывод, что то, как используются доказательства в математической практике, и то, как обосновываются математические предложения, далеко не всегда соответствуют классическому представлению о математическом знании. В рамках реальной математической практики оказывается вполне допустимым использование математических предложений без «знания» об их значении в классическом смысле. Из этого можно сделать вывод, что математическое знание в действительности является контекстно зависимым. Само значение слова «знать», с точки зрения Б. Леве, оказывается подчинено целям коммуникации, а процедуры построения доказательств, как формальных и полных, так и неформальных, оказываются инструментами коммуникации между агентами.

Эта идея совпадает с представлением о знании в рамках эпистемического контекстуализма. Значение предложения «Агент знает, что *p*» оказывается зависящим от контекста, в котором это предложение высказывается, а для самого контекста задаются эпистемические стандарты, в зависимости от строгости которых и будет определяться значение данного высказывания. Для демонстрации этого можно привести пример сравнения контекста «профессионалов» и контекста «обучения математике». В рамках обучения математике полные формальные доказательства зачастую являются излишними, поэтому в таких контекстах для знания не требуется знание доказательства, тогда как в контексте профессионалов эпистемические стандарты выше, поэтому там требование к знанию формальных доказательств возникает значительно чаще. Таким образом, при принятии усиленной версии аргументации Б. Леве математические предложения можно признать зависящими от контекста.

«Семантика без агента», «семантика с агентом» и контекстная зависимость математических предложений

Теперь можно дать ответ на вопрос о совместимости представленной выше интерпретации математических предложений как зависящих от контекста и сформулированных О.А. Козыревой двух версий семантики: «семантики без агента» и «семантики с агентом». Как она отмечает, расхождение между этими версиями возникает из-за того, что перед теорией языка ставятся разные цели. Тогда оценку совместимости этих двух версий с математическими предложениями, зависящими от контекста, можно произвести через определение того, соответствует ли специфика таких предложений целям, которые поставлены перед теорией языка.

«Семантика без агента» описывается О.А. Козыревой следующим образом: «С точки зрения “семантики без агента” анализировать необходимо предложения, а не высказывания, которые совершаются агентами, и этот анализ сводится к определению формальных условий истинности независимо от того, в какой конкретной ситуации это предложение используется» [2]. Такая версия семантики подразумевает, что ключевой целью теории языка является объяснение того, как предложения указывают на объекты.

На первый взгляд кажется очевидным, что данная цель не соответствует специфике математических предложений, зависящих от контекста. Выше отмечалось, что в случае наличия такой зависимости неустранимым элементом объяснения математических предложений оказывается процесс коммуникации, который полностью игнорируется «семантикой без агента». Такое положение дел приводит к тривиальному выводу: «семантика без агента» не подходит для работы с математическими предложениями, зависящими от контекста.

Однако, как отмечают сама О.А. Козырева в статье [2] и Е.В. Борисов в своей реплике [1], если дополнить «семантику без агента» прагматикой, то тогда аспекты функционирования языка, связанные с коммуникацией, будут объясняться именно прагматикой. В таком случае все трудности с определением значения предложений математики, зависящих от контекста, будут разрешаться семантикой и прагматикой, равно как и трудности с другими зависимыми от контекста предложениями. Иными словами, формальная семантика Д. Каплана с дополнением в виде прагматики дает достаточную теорию языка. Но и это решение не лишено проблем. В качестве возражения можно выдвинуть следующее: формальная семантика Д. Каплана за счет того, что это формальная система, дает ясное представление о семантической стороне теории языка, тогда как понятных способов объяснять функционирование прагматической стороны теории языка ни О.А. Козыревой, ни Е.В. Борисовым представлено не было. Это обстоятельство приобретает дополнительную значимость в случае с математическими предложениями: даже если признать, что они зависят от контекста, сама математика как область знания стремится к ясности и четкости собственных обоснований.

В таком случае мотивация предлагать семантику, учитывающую большее количество факторов, чем семантика Д. Каплана, может быть объяснена так: расширение формальной семантики через учет в ней факторов, которые традиционно считаются прагматическими, позволит увеличить количество факторов, которые описаны ясным образом в рамках формальной семантики, и уменьшить количество факторов, которые описаны неясным образом в рамках прагматики. Это и представляется одним из основных преимуществ «семантики с агентом».

О.А. Козырева описывает ее так: «С точки зрения “семантики с агентом” в область интересов семантики должно дополнительно входить то, что до этого считалось областью интересов прагматики: интенции говорящих, язык, на котором совершается высказывание, социальные практики совершения высказываний и т.д.» [2, с.]. В случае с этой версией семантики в число целей, которые ставятся перед теорией языка, добавляются цели: объяснить то, как происходит коммуникация; сформулировать условия успешности коммуникации; показать, как происходит определение выраженной пропозиции в зависимости от коммуникативной ситуации.

Наличие в рамках «семантики с агентом» описания различных факторов, связанных с коммуникацией, позволяет утверждать, что именно такая версия семантики дает возможность охватить специфику математических предложений, зависящих от контекста, так как эта специфика и заключается в значительной роли коммуникации, которой подчиняются способы обоснования математических предложений и процесс определения значения таких предложений.

Безусловно, совершенно не обязательно понимать семантику именно как «семантику с агентом». Но для того чтобы полностью отвергнуть эту версию и использовать более традиционную «семантику без агента», нужно сформулировать для последней конкретный способ представлять факторы, связанные с коммуникацией, в рамках прагматики ясным образом, т.е. так, как представляются сугубо семантические факторы в рамках формальной семантики Д. Каплана, что, вероятно, возможно сделать через развитие систем формальной прагматики.

Литература

1. *Борисов Е.В.* Теория коммуникации в духе Каплана // Философия науки. 2022. № 4 (95).

2. *Козырева О.А.* О разграничении семантики и прагматики // Философия науки. 2022. № 4 (95).

3. *Ламберов Л.Д.* Бенацерраф и теоретико-множественный редукционистский реализм // Эпистемология и философия науки. 2021. Т. 58, № 1. С. 142–160.

4. *Ламберов Л.Д.* Математические объекты, структуры и доказательства // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2022. № 3. С. 361–367.

5. *Ламберов Л.Д.* Практика компьютерных доказательств и человеческое понимание: эпистемологическая проблематика // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2021. № 1. С. 5–19.

6. *Benacerraf P.* Mathematical truth // The Journal of Philosophy. 1973. Vol. 70, No. 19. P. 661–679.

7. *Löwe B.* Mathematical knowledge is context dependent // Grazer Philosophische Studien. 2008. Vol. 76. No. 1. P. 91–107.

References

1. *Borisov, E.V.* (2022). Teoriya kommunikatsii v dukhe Kaplana [Kaplanian theory of communication]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 4 (95).

2. *Kozyreva, O.A.* (2022). O razgranichenii semantiki i pragmatiki [On the distinction between semantics and pragmatics]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 4 (95).

3. *Lamberov, L.D.* (2021). Benatserraf i teoretiko-mnozhestvennyy reduktsionistskiy realizm [Benacerraf and set-theoretical reductionist realism]. Epistemologiya i filosofiya nauki [Epistemology and Philosophy of Science], Vol. 58, No. 1, 142–160.

4. *Lamberov, L.D.* (2022). Matematicheskie obyekty, struktury i dokazatelstva [Mathematical objects, structures and proofs]. Vestnik Permskogo universiteta. Filosofiya. Psikhologiya. Sotsiologiya [Perm University Herald. Series “Philosophy. Psychology. Sociology”], 3, 361–367.

5. *Lamberov, L.D.* (2021). Praktika kompyuternykh dokazatelstv i chelovecheskoe ponimanie: epistemologicheskaya problematika [The practice of computer proof and human understanding: epistemological problems]. Vestnik Permskogo universiteta. Filosofiya. Psikhologiya. Sotsiologiya [Perm University Herald. Series “Philosophy. Psychology. Sociology”], 1, 5–19.

6. *Benacerraf, P.* (1973). Mathematical truth. The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 19, 661–679.

7. *Löwe, B.* (2008). Mathematical knowledge is context dependent. Grazer Philosophische Studien, Vol. 76, 1, 91–107.

Информация об авторе

Гущин Илья Андреевич – Уральский гуманитарный институт Уральского федерального университета (620000, Екатеринбург, просп. Ленина, 51).
gushchin.ilya@gmail.com

Information about the author

Gushchin Ilya Andreevich – Ural Institute of Humanities, Ural Federal University (51, Lenin av., Ekaterinburg, 620000, Russia).

Дата поступления 28.10.2022