

УДК 550.362

Моделирование теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое

С.В. Соловьев

Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035
E-mail: solovjovsv@rambler.ru

Соловьев С.В. Моделирование теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 435–451.

В работе, на основе математического моделирования, исследуется конвективный теплообмен электропроводной жидкости с учетом внутренних источников тепла и джоулевой диссипации в сферическом слое при подводе тепла снизу. Исследованы структура течения, поле температуры, магнитное поле и распределение чисел Нуссельта.

DOI: 10.15372/SJNM20150408

Ключевые слова: математическое моделирование, конвективный теплообмен, джоулева диссипация, магнитная гидродинамика, сферический слой.

Solovjov S.V. Heat transfer modeling of an electroconductive liquid in a spherical layer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 4. — P. 435–451.

In this paper, based on mathematical modeling, the convective heat transfer of an electroconductive liquid with regard to the internal sources of heat and the Joule dissipation in a spherical layer with heat from below is investigated. The structure of a flow, temperature field, magnetic field distribution and the Nusselt numbers are investigated.

Keywords: mathematical modeling, convective heat transfer, Joule dissipation, magnetic hydrodynamics, spherical layer.

Математическое исследование гидромагнитного динамо представляет собой сложную задачу [1–3], так как решение уравнений магнитной гидродинамики связано с большими трудностями. Часто теория гидромагнитного динамо исследуется с применением кинематических моделей, в которых поле скорости жидкости задается, а рассчитывается только тепловое и магнитное поля.

В настоящей работе рассматриваются полные уравнения магнитной гидродинамики — это уравнения: энергии, с учетом внутренних источников тепла, равномерно распределенных в жидкости [3], и джоулевой диссипации; движения, с учетом магнитных, инерционных, вязких и подъемных сил; магнитной индукции; неразрывности для скорости и магнитной индукции. Используется приближение Буссинеска. Ускорение свободного падения направлено к центру сферического слоя. Математическая постановка задачи в переменных вихрь–функция тока–температура для стационарного режима в безразмерной форме в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\ & \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \\ & \frac{S}{\operatorname{Re}_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\operatorname{Gr}}{\operatorname{Re}^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = 0; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\operatorname{Pe}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v \right) - \\ & \frac{J}{\operatorname{Pe}} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ & = \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2 B_r}{r^2} - \frac{2 B_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right); \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & = \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

При записи системы дифференциальных уравнений (1)–(5) использованы следующие обозначения: $\vartheta = (T - T_2)\lambda/(qr'_1)$, $B = B'/B_0$, ψ , ω – безразмерные температура, магнитная индукция, функция тока и напряженность вихря; ρ_0 , u_0 , B_0 – характерные масштабы; B' – размерная магнитная индукция; $Q_v = (q_v r'_1)/q$ – безразмерный внутренний источник теплоты; q_v – размерный внутренний источник теплоты; q – размерный тепловой поток тепла, подводимый к внутренней поверхности слоя; $r = r'/r'_2$ – безразмерный текущий радиус; r' – размерный текущий радиус; r'_1 , r'_2 – размерные радиусы внутренней и внешней сферы; θ – полярный угол; D_m – коэффициент магнитной вязкости (диффузии); σ – электрическая проводимость жидкости; $r_2 = r'_2/r'_1$ – безразмерная толщина сферического слоя; $\operatorname{Gr} = \frac{g\beta q r_1'^4}{\nu^2 \lambda}$, $\operatorname{Re} = \frac{u_0 r'_1}{\nu}$, $\operatorname{Pe} = \frac{u_0 r'_1}{a}$, $\operatorname{Re}_m = \frac{u_0 r'_1}{D_m}$, $S = \frac{\sigma B_0^2 r_1'}{\rho_0 u_0}$ – безразмерные числа Грасгофа, Рейнольдса, Пекле, магнитное число Рейнольдса, параметр магнитного взаимодействия. Остальные обозначения общепринятые. Постоянная величина J , входящая в уравнение энергии (3), определяет величину джоулевой диссипации. И в зависимости от типа граничных условий для температуры принимает различные значения.

В данной работе при проведении вычислительного эксперимента для температуры задавались следующие граничные условия: на внутренней поверхности слоя $\Gamma_1 (r = 1)$ граничное условие второго рода (плотность теплового потока) [2], а на внешней поверхности $\Gamma_2 (r = r_2)$ – первого рода (постоянное значение температуры): $-\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 1$; $\vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0$.

На оси симметрии $\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0$. Для граничного условия второго рода на внутренней поверхности слоя постоянная величина J вычислялась по формуле: $J = \frac{D_m r'_1}{4\pi q}$. Граничные условия для функции тока, напряженности вихря и магнитной индукции имели следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \psi \Big|_{\theta=0,\pi} = \omega \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \\ B_r \Big|_{\Gamma_1} = B_r \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_1} = -0.01 \sin \theta; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_2} = 0.01 \sin \theta. \end{aligned}$$

Граничные условия для вихря на границах слоя предполагают линейное изменение его по нормали [5].

Локальные числа Нуссельта на границах слоя рассчитывались по формулам:

$$Nu_1 = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1}, \quad Nu_2 = -r_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{\Gamma_2}.$$

Осредненные числа Нуссельта вычислялись по формулам:

$$\overline{Nu_1} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu_2} = -\frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]_{\Gamma_2} \sin \theta d\theta.$$

Численное решение задачи осуществлялось методом конечных элементов на равномерной сетке $r_i = 1 + i\Delta r$, $\theta_j = j\Delta\theta$, $i = \overline{0, N_r}$, $j = \overline{0, N_\theta}$; $\Delta r = \frac{r_2 - 1}{N_r}$, $\Delta\theta = \frac{\pi}{N_\theta}$ — шаги по радиусу и широте соответственно с количеством узлов в области $Z = N_r N_\theta$. Для аппроксимации рассчитываемых функций использовались билинейные девятиточечные конечные элементы. Пробные решения задавались в виде:

$$\begin{aligned} \psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \psi \Big|_{\theta=0,\pi} = \omega \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \\ \omega(r, \theta) = \sum_{\alpha=1}^Z \omega_\alpha N_\alpha(r, \theta); \quad \psi(r, \theta) = \sum_{\alpha=1}^Z \psi_\alpha N_\alpha(r, \theta); \quad \vartheta(r, \theta) = \sum_{\alpha=1}^Z \vartheta_\alpha N_\alpha(r, \theta); \quad (6) \\ B_r(r, \theta) = \sum_{\alpha=1}^Z B_{r\alpha} N_\alpha(r, \theta); \quad B_\theta(r, \theta) = \sum_{\alpha=1}^Z B_{\theta\alpha} N_\alpha(r, \theta). \end{aligned}$$

Дискретные аналоги системы дифференциальных уравнений (1)–(5) были получены с применением метода взвешенных невязок. При вычислении интегралов использовались квадратуры Гаусса.

Дискретный аналог уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta L_{\alpha\beta}^\omega + \sum_{\beta=1}^3 \vartheta_\beta L_{\alpha\beta}^\vartheta + \\ \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \left[\omega_\beta \psi_\gamma L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} + B_{r\beta} B_{r\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} + B_{r\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta B_r} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} L_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta B_\theta} \right] = 0; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}^{\omega} &= -\frac{1}{\text{Re}} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + N_{\alpha} \frac{\text{ctg } \theta}{r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - N_{\alpha} \frac{N_{\beta}}{r \sin^2 \theta} \right) d\theta dr, \\
L_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\psi} &= \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{N_{\alpha}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \right) d\theta dr, \\
L_{\alpha\beta}^{\vartheta} &= \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} d\theta dr, \quad L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} = -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} d\theta dr, \\
L_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_{\theta}} &= -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} N_{\gamma} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} N_{\gamma} \right) d\theta dr, \\
L_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_{\theta}} &= -\frac{S}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{r} N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} - \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1; & \alpha = \beta \\ 0; & \alpha \neq \beta \end{cases}.
\end{aligned}$$

Дискретный аналог уравнения (2) имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta}^{\psi} \psi_{\beta} + \sum_{\beta=1}^3 M_{\alpha\beta}^{\omega} \omega_{\beta} = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^{\psi} &= -\int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \left(\left(N_{\alpha} + r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \\
M_{\alpha\beta}^{\omega} &= \omega_{\beta} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} r^2 N_{\alpha} N_{\beta} \sin \theta d\theta dr.
\end{aligned}$$

Дискретный аналог уравнения (3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^3 \vartheta_{\beta} K_{\alpha\beta}^{\theta} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \left[\vartheta_{\beta} \psi_{\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} K_{\beta\alpha\gamma}^{B_r B_r} + B_{\theta\beta} B_{r\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_r} + \right. \\
\left. B_{r\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_r} + B_{\theta\beta} B_{\theta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_{\theta}} \right] = K_{\alpha}; \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{\vartheta} &= -\frac{1}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \left(N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - r \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{r} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \\
K_{\alpha\beta\gamma}^{\vartheta\psi} &= \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{N_{\alpha}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} - \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \\
K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_{\theta}} &= -\frac{J}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(\frac{\partial N_{\gamma}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\gamma} \right) d\theta dr, \\
K_{\alpha\beta\gamma}^{B_{\theta} B_r} &= -\frac{J}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^{\pi} r N_{\alpha} \left(\frac{\partial N_{\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{\beta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial \theta} \right) d\theta dr,
\end{aligned}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_\theta} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^\pi r N_\alpha \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial N_\gamma}{\partial r} + \frac{1}{r} N_\gamma \right) d\theta dr,$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{B_r B_r} = -\frac{J}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^\pi r N_\alpha \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \quad K_\alpha = \frac{Q_v}{\text{Pe}} \int_1^{r_2} \int_0^\pi r N_\alpha d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (4) имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=1}^3 B_{\theta\beta} R_{\alpha\beta}^{B_\theta} + \sum_{\beta=1}^3 B_{r\beta} R_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \left[B_{\theta\beta\psi_\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} + B_{r\beta\psi_\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} \right] = 0; \quad (10)$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_r} = \frac{1}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg } \theta}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} N_\alpha N_\beta \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta}^{B_\theta} = \frac{1}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(\frac{2 \text{ctg } \theta}{r} N_\alpha N_\beta + \frac{2}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} N_\beta - \frac{\cos \theta}{r \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} \right) d\theta dr,$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} = \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} N_\beta - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} \right) d\theta dr.$$

Дискретный аналог уравнения (5) имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=1}^3 B_{\theta\beta} S_{\alpha\beta}^{B_\theta} + \sum_{\beta=1}^3 B_{r\beta} S_{\alpha\beta}^{B_r} + \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \left[B_{\theta\beta\psi_\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} + B_{r\beta\psi_\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} \right] = 0; \quad (11)$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_\theta} = -\frac{1}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - r \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\beta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin^2 \theta} N_\alpha N_\beta \right) d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta}^{B_r} = -\frac{1}{\text{Re}_m} \int_1^{r_2} \int_0^\pi \left(\frac{2}{r} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \theta} \right) d\theta dr, \quad S_{\alpha\beta\gamma}^{B_\theta\psi} = -\int_1^{r_2} \int_0^\pi \frac{N_\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\gamma}{\partial \theta} d\theta dr,$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}^{B_r\psi} = -\int_1^{r_2} \int_0^\pi \frac{N_\beta}{\sin \theta} \frac{\partial N_\alpha}{\partial r} \frac{\partial N_\gamma}{\partial r} d\theta dr.$$

Система нелинейных уравнений (7)–(11) решалась методом итераций с применением нижней релаксации. В качестве начальных приближений задавались нулевые значения напряженности вихря, функции тока, температуры, радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции. В результате численного решения задачи были получены поля температуры, функции тока, напряженности вихря, магнитной индукции и распределения локальных чисел Нуссельта.

На рис. 1–16 приведены результаты расчетов полей для следующих значений безразмерных критериев подобия:

$$r_2 = 2, 5; \quad \text{Gr} = 10^2, 10^3, 10^4; \quad \text{Re} = 10; \quad \text{S} = 10^{-5}; \quad \text{Re}_m = 1; \quad \text{Pe} = 10; \quad Q_v = 0, \pm 1.$$

На рис. 1–5 приведены результаты расчетов для значения числа Грасгофа $\text{Gr} = 10^2$.

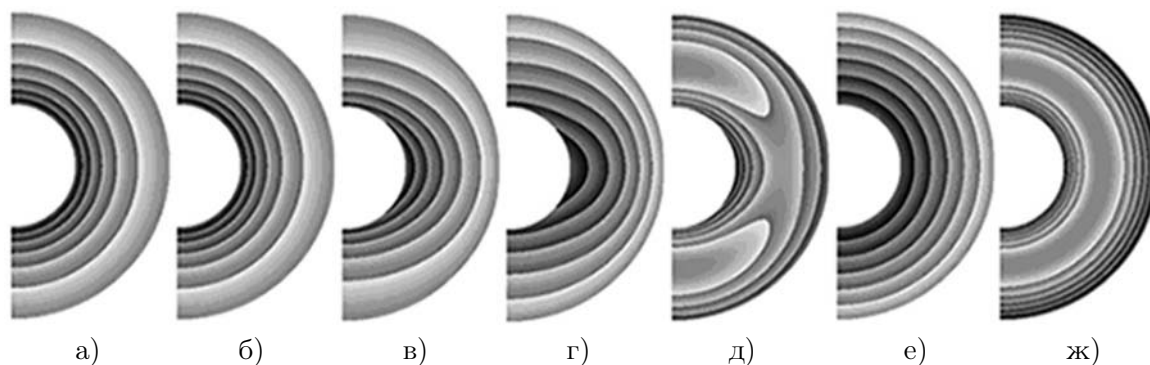


Рис. 1. Поле температуры: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 1 приведены поля температуры. Для неэлектропроводной жидкости поле температуры (рис. 1а) — это концентрические окружности, т. е. перенос энергии в слое осуществляется теплопроводностью. Максимальное значение температуры в слое $T_{\max} = 6.375$. Такое же поле и значение $T_{\max} = 6.375$ сохраняются и для электропроводной жидкости (рис. 1б).

Учет джоулевой диссипации (рис. 1в) изменяет механизм переноса энергии в слое с кондуктивного на конвективный. Изотермы уже отличаются от концентрических окружностей. Максимальное значение температуры $T_{\max} = 8.390$. Учет внутренних источников и стоков тепла (рис. 1г, 1д), совместно с учетом джоулевой диссипации, также приводит к конвективному механизму теплообмена. Максимальное значение температуры для результата на рис. 1г $T_{\max} = 15.248$, а для результата на рис. 1д диапазон изменения температуры $[-2.526; 1.641]$. Неучет джоулевой диссипации, несмотря на наличие внутренних источников (стоков) тепла (рис. 1е, 1ж), изменяет механизм переноса энергии в слое с конвективного на кондуктивный. Максимальное значение температуры для результата на рис. 1е $T_{\max} = 12.934$, а для результата на рис. 1ж диапазон изменения температуры $[-2.940; 0]$.

На рис. 2 приведены распределения чисел Нуссельта. На рис. 2 линия 1 соответствует распределению чисел Нуссельта на внутренней поверхности слоя, причем это распределение совпадает с осредненным и принимает постоянное значение $Nu_1 = \overline{Nu}_1 = 10$ (здесь и далее) согласно заданному граничному условию для температуры. Распределения чисел Нуссельта на внешней поверхности (линия 2), приведенные на рис. 2а, 2б, принимают постоянные значения $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 4.359$. Учет джоулевой диссипации (рис. 2в) значительно изменяет распределение локальных чисел Нуссельта по сравнению с предыдущими результатами. При значении полярного угла $\theta \approx \pi/2$ (экваториальная плоскость) распределение локальных чисел Нуссельта имеет максимум (рис. 2в). Значение осредненного и диапазон изменения локальных чисел Нуссельта: $\overline{Nu}_2 = 8.733$; $4.068 \leq Nu_2 \leq 12.056$. Учет внутренних источников и стоков тепла (рис. 2г, 2д), вместе с учетом джоулевой диссипации, также приводят к распределениям локальных чисел Нуссельта, характерных для конвективного теплообмена. При наличии внутренних источников тепла значения локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности больше значений чисел Нуссельта на внутренней поверхности (рис. 2г). Для стоков тепла (рис. 2д) ситуация обратная. Причем локальные числа Нуссельта принимают отрицательные значения. Для значения полярного угла $\theta \approx \pi/2$ распределения локальных чисел Нуссельта имеют максимум

(рис. 2г, 2д; кривая 2). Значение осредненного и диапазон изменения локальных чисел Нуссельта для результата на рис. 2г: $\overline{Nu}_2 = 27.802$; $18.698 \leq Nu_2 \leq 34.617$; а для результата на рис. 2д: $\overline{Nu}_2 = -10.340$; $-13.468 \leq Nu_2 \leq -8.018$. Неучет джоулевой диссипации, несмотря на наличие внутренних источников (стоков) тепла (рис. 2е, 2ж), приводит к распределению чисел Нуссельта, характерному для режима теплопроводности. Распределения локальных чисел Нуссельта совпадают с осредненными и принимают постоянные значения для результата на рис. 2е: $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 23.433$; для результата на рис. 2ж: $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -14.716$.

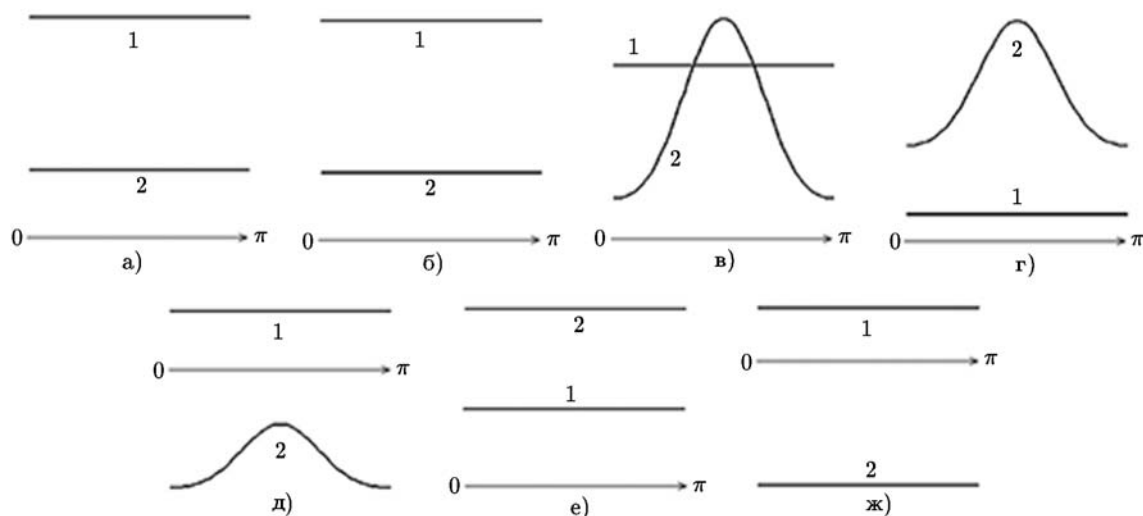


Рис. 2. Распределение чисел Нуссельта: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 3 приведены поля функции тока. Для всех случаев в сферическом слое образуются две конвективные ячейки. На рис. 3а представлено поле функции тока для неэлектропроводной жидкости, которая в северном полушарии слоя движется против часовой стрелки (значения положительные), а в южном — по часовой стрелке (значения отрицательные).

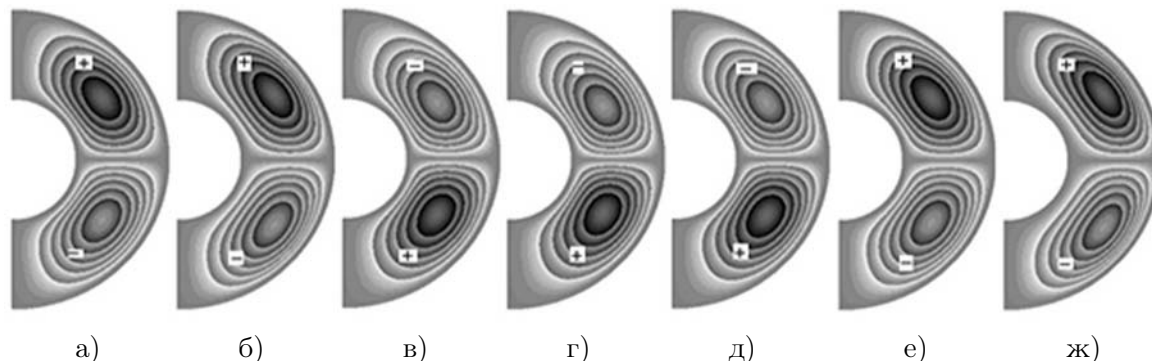


Рис. 3. Поле функции тока: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

Интенсивность движения жидкости в ячейках незначительная (режим теплопроводности), максимальное значение функции тока $|\psi_{\max}| = 1.79 \cdot 10^{-8}$. В случае электропроводной жидкости (рис. 3б) направление течения жидкости в ячейках сохраняется. Максимальное значение функции тока возрастает $|\psi_{\max}| = 1.22 \cdot 10^{-6}$. Учет джоулевой диссипации (рис. 3в) так же, как и учет внутренних источников и стоков тепла (рис. 3г, 3д), совместно с учетом джоулевой диссипации, изменяют направление циркуляции жидкости в конвективных ячейках на противоположное по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3а, 3б. Максимальное значение функции тока возрастает и для результатов, приведенных на рис. 3в–3д, $|\psi_{\max}| = 4.13 \cdot 10^{-2}$; $9.38 \cdot 10^{-2}$; $2.45 \cdot 10^{-2}$. Неучет джоулевой диссипации, несмотря на наличие внутренних источников (стоков) тепла (рис. 3е, 3ж), приводит к изменению направления циркуляции жидкости в ячейках на противоположное по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3в–3д. Максимальное значение функции тока для результатов, приведенных на рис. 3е, 3ж: $|\psi_{\max}| = 3.77 \cdot 10^{-6}$; $7.78 \cdot 10^{-7}$.

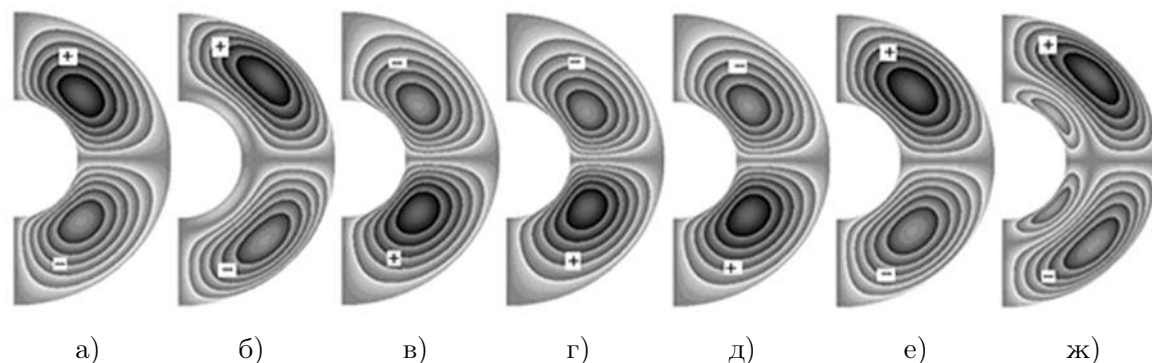


Рис. 4. Поле напряженности вихря: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 4 приведены поля напряженности вихря. В слое, за исключением результата, приведенного на рис. 4ж, образуются два крупномасштабных вихря. Для результатов, приведенных на рис. 4а, 4б, жидкость в северном полушарии движется против часовой стрелки (значения положительные), а в южном — по часовой стрелке (значения отрицательные). Максимальная интенсивность вихрей $|\omega_{\max}| = 8.11 \cdot 10^{-8}$; $6.46 \cdot 10^{-6}$ для результатов, приведенных на рис. 4а, 4б. Для результатов, представленных на рис. 4в–4д, направление движения жидкости в слое меняется на противоположное. То есть учет джоулевой диссипации, как при наличии внутренних источников (стоков) тепла, так и без них, приводит к смене направления циркуляции жидкости в вихревых ячейках. Максимальная интенсивность вихрей $|\omega_{\max}| = 2.20 \cdot 10^{-1}$; $4.99 \cdot 10^{-1}$; $1.31 \cdot 10^{-1}$ соответственно для результатов, приведенных на рис. 4в–4д. Учет внутренних источников (стоков) тепла (рис. 4е, 4ж) при неучете джоулевой диссипации приводит к изменению направления циркуляции жидкости в слое.

Максимальная интенсивность вихрей $|\omega_{\max}| = 1.90 \cdot 10^{-5}$; $4.63 \cdot 10^{-6}$ соответственно для результатов, приведенных на рис. 4е, 4ж. Для результата, представленного на рис. 4ж, в слое кроме двух крупномасштабных вихрей образуются два мелкомасштаб-

ных вихря в области внутренней границы слоя. Направление циркуляции жидкости в мелкомасштабных вихрях противоположно направлению циркуляции жидкости в крупномасштабных.

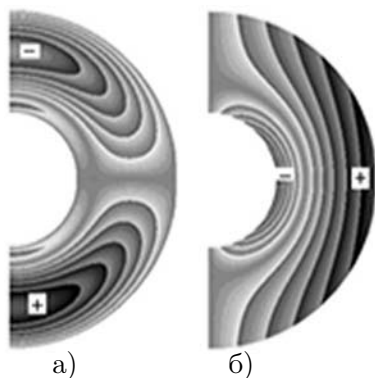


Рис. 5. Поле магнитной индукции: а) — радиальная составляющая; б) — меридиональная составляющая

На рис. 5 приведены поля радиальной и меридиональной составляющей магнитной индукции. Оказалось, что, как качественно, так и количественно, структура поля радиальной и меридиональной составляющей магнитной индукции практически не изменяется для рассмотренных режимов. Радиальная составляющая магнитной индукции (рис. 5а) в северном полушарии принимает отрицательные значения, за исключением небольшой области вблизи внутренней поверхности слоя, а в южном — положительные, за исключением небольшой области вблизи внутренней поверхности слоя. Меридиональная составляющая магнитной индукции (рис. 5б) принимает положительные значения практически во всем слое, за исключением небольшой области у внутренней поверхности, в которой значения меридиональной составляющей магнитной индукции отрицательные. Максимальная интенсивность радиальной составляющей магнитной индукции — $|B_{r_{\max}}| = 4.85 \cdot 10^{-4}$, а меридиональной — $|B_{\theta_{\max}}| = 1.00 \cdot 10^{-2}$.

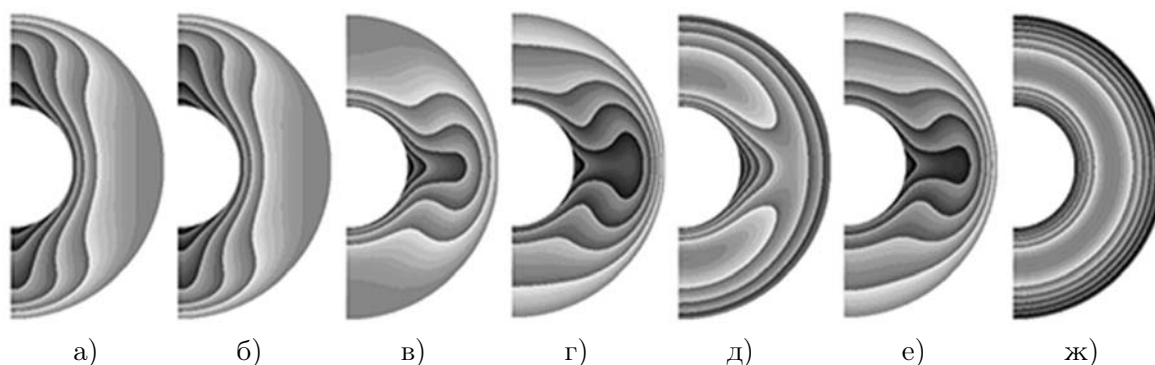


Рис. 6. Поле температуры: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 6–10 приведены результаты расчетов для числа Грасгофа $Gr = 10^3$. Значения остальных безразмерных критериев подобия без изменения.

На рис. 6 приведены поля температуры. Для всех режимов (рис. 6а–6е), за исключением результата, представленного на рис. 6ж, теплообмен в слое осуществляется конвекцией.

Для неэлектропроводной жидкости (рис. 6а) изменение температуры происходит в основном в области полюсов, $T_{\max} = 6.151$. Для электропроводной жидкости (рис. 6б) поле температуры и значение T_{\max} аналогичны результату, приведенному на рис. 6а. Учет джоулевой диссипации (рис. 6в) изменяет поле температуры, смещая область теплообмена в экваториальную часть, где в основном и происходит изменение температуры, $T_{\max} = 5.426$. Учет внутренних источников тепла, совместно с джоулевой диссипацией (рис. 6г), расширяет область теплообмена. Изменение температуры происходит практически во всей полости, $T_{\max} = 7.865$. Учет внутренних стоков тепла приводит к значительным изменениям поля температуры (рис. 6д). Значения температуры принимают как положительные, так и отрицательные значения. Интервал изменения температуры $[-2.608; 1.538]$. Неучет джоулевой диссипации (рис. 6е) также сохраняет конвективный механизм теплообмена при учете внутренних источников тепла, а при учете внутренних стоков тепла (рис. 6ж) механизм переноса энергии в полости осуществляется теплопроводностью. Максимальное значение температуры для результата, приведенного на рис. 6е, $T_{\max} = 7.693$, а для результата, приведенного на рис. 6ж, диапазон изменения температуры $[-2.940; 0]$.

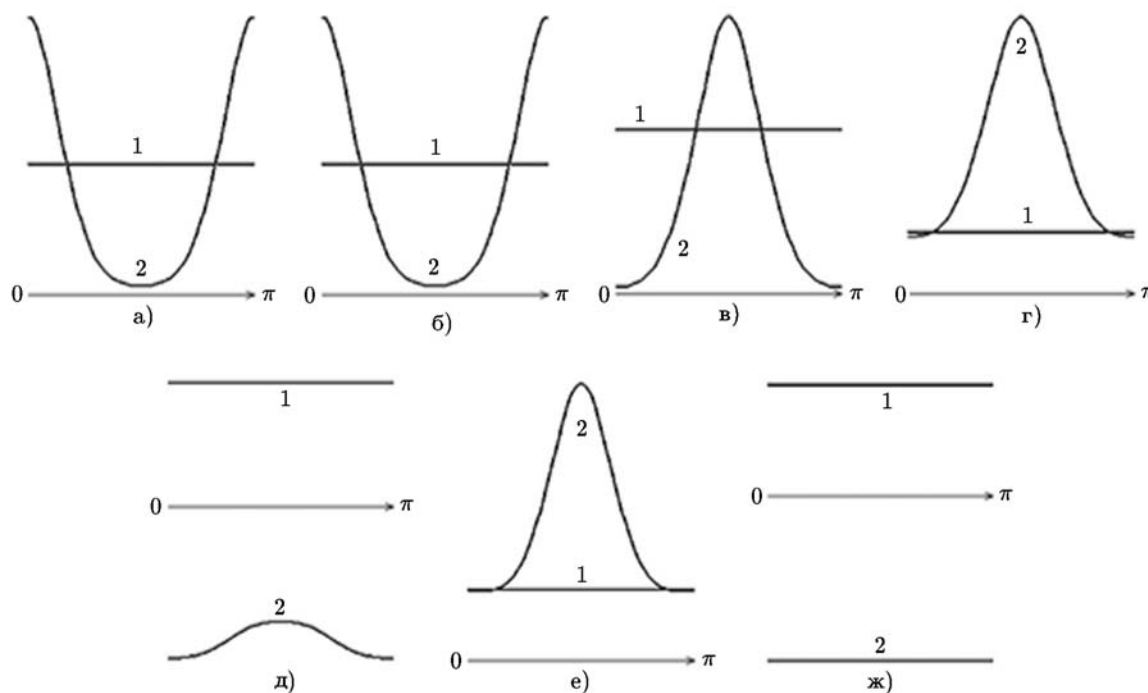


Рис. 7. Распределение локальных чисел Нуссельта: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 7 приведены распределения локальных чисел Нуссельта. Для неэлектропроводной и электропроводной жидкости распределение локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности одинаково (рис. 7а, 7б; кривая 2) и имеет минимум при $\theta \approx \pi/2$; $\overline{Nu}_2 = 4.359$; $0.695 \leq Nu_2 \leq 21.256$.

Учет джоулевой диссипации (рис. 7в) значительно изменяет характер распределения локальных чисел Нуссельта по сравнению с результатом, приведенным на рис. 7а,

76. При значении полярного угла $\theta \approx \pi/2$ распределение имеет максимум (рис. 7в); $\overline{Nu}_2 = 8.685$; $0.407 \leq Nu_2 \leq 16.905$. Учет внутренних источников и стоков тепла (рис. 7г, 7д) также приводит к распределению локальных чисел Нуссельта, характерных для конвективного теплообмена. Оба распределения имеют максимум при $\theta \approx \pi/2$. Однако при наличии внутренних источников тепла линия 2 (рис. 7г) лежит практически на прямой 1, а при наличии стоков (рис. 7д) — ниже ее, находясь в отрицательной области. Значение осредненного и диапазон изменения локальных чисел Нуссельта для результата, приведенного на рис. 7г, $\overline{Nu}_2 = 27.743$; $9.296 \leq Nu_2 \leq 45.138$; а для результата, приведенного на рис. 7д, $\overline{Nu}_2 = -10.358$; $-12.271 \leq Nu_2 \leq -9.313$. Неучет джоулевой диссипации при наличии внутренних источников тепла (рис. 7е) качественно аналогичен результату, приведенному на рис. 7г, $\overline{Nu}_2 = 23.433$; $9.806 \leq Nu_2 \leq 38.885$. При учете внутренних стоков тепла (рис. 7ж; кривая 2) распределение локальных чисел Нуссельта находится в области отрицательных значений и соответствует режиму теплопроводности: $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = -14.716$.

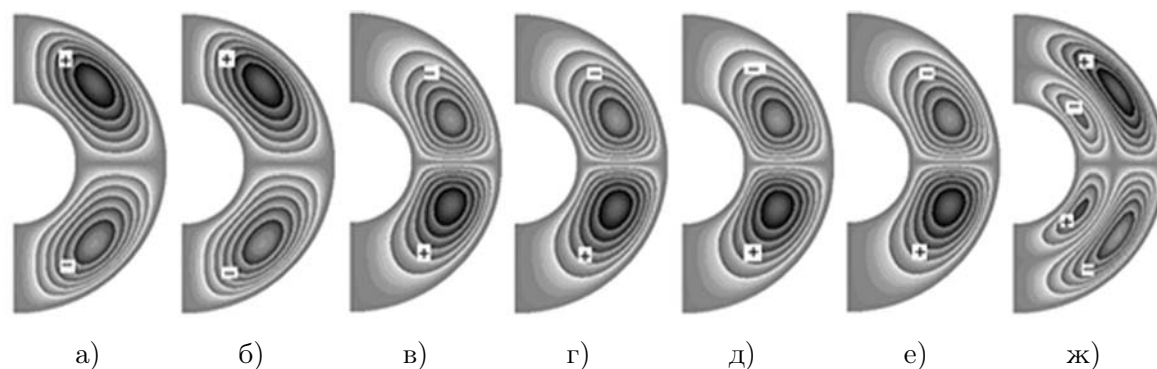


Рис. 8. Поле функции тока: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 8 приведены поля функции тока. Для всех случаев, за исключением режима, представленного на рис. 8ж, в сферическом слое образуются две крупномасштабные конвективные ячейки. Для результатов, приведенных на рис. 8а, 8б, 8ж, в северном полушарии слоя жидкость движется против часовой стрелки (значения положительные), а в южном — по часовой стрелке (значения отрицательные).

Учет джоулевой диссипации, как с внутренними источниками (стоками) тепла, так и без них (рис. 8в–8д), изменяет направление циркуляции жидкости в ячейках. Такое же направление течения жидкости в ячейках характерно и для режима без учета джоулевой диссипации, но при наличии внутренних источников тепла (рис. 8е). Для результата, приведенного на рис. 8ж, у внутренней поверхности слоя образуются еще две мелко-масштабные конвективные ячейки, в которых жидкость движется в противоположном направлении по сравнению с направлением движения жидкости в крупномасштабных ячейках. Максимальные значения функции тока для результатов, приведенных на рис. 8а–8ж, следующие: $|\psi_{\max}| = 4.36 \cdot 10^{-1}$; $4.36 \cdot 10^{-1}$; $6.47 \cdot 10^{-1}$; $9.80 \cdot 10^{-1}$; $2.43 \cdot 10^{-1}$; $8.96 \cdot 10^{-1}$; $2.62 \cdot 10^{-7}$.

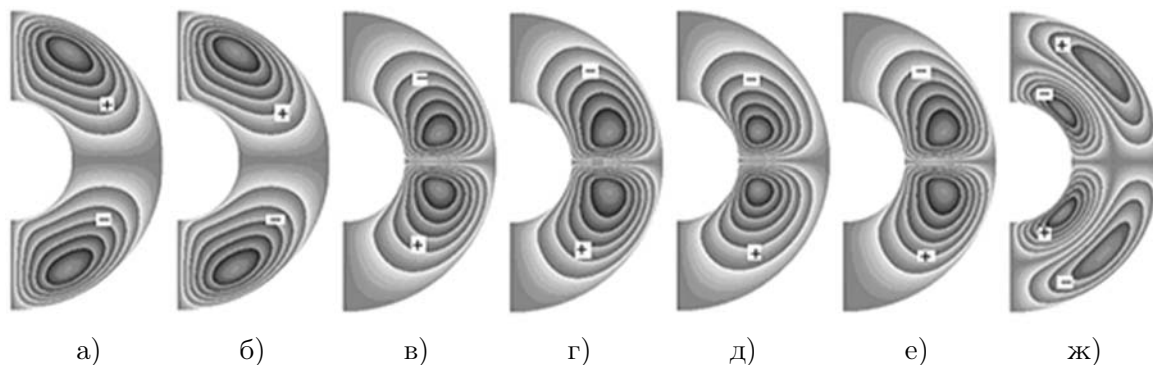


Рис. 9. Поле напряженности вихря: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 9 приведены поля напряженности вихря. Для всех случаев, за исключением режима, представленного на рис. 9ж, в полости образуются два крупномасштабных вихря.

Для результатов, приведенных на рис. 9а, 9б, 9ж, в северном полушарии жидкость движется против часовой стрелки (значения положительные), а в южном — по часовой стрелке (значения отрицательные). Учет джоулевой диссипации, как с внутренними источниками (стоками) тепла, так и без них (рис. 9в–9д), изменяет направление циркуляции жидкости в вихревых ячейках. Такое же направление течения жидкости характерно и для режима без учета джоулевой диссипации, но при наличии внутренних источников тепла (рис. 9е). Для режима, представленного на рис. 9ж, у внутренней поверхности слоя образуются еще два мелкомасштабных вихря, в которых жидкость течет в противоположном направлении по сравнению с направлением течения жидкости в крупномасштабных. Максимальные значения вихря для результатов, приведенных на рис. 8а–8ж, следующие: $|\omega_{\max}| = 3.24; 3.24; 3.52; 4.94; 1.60; 4.62; 4.73 \cdot 10^{-6}$.

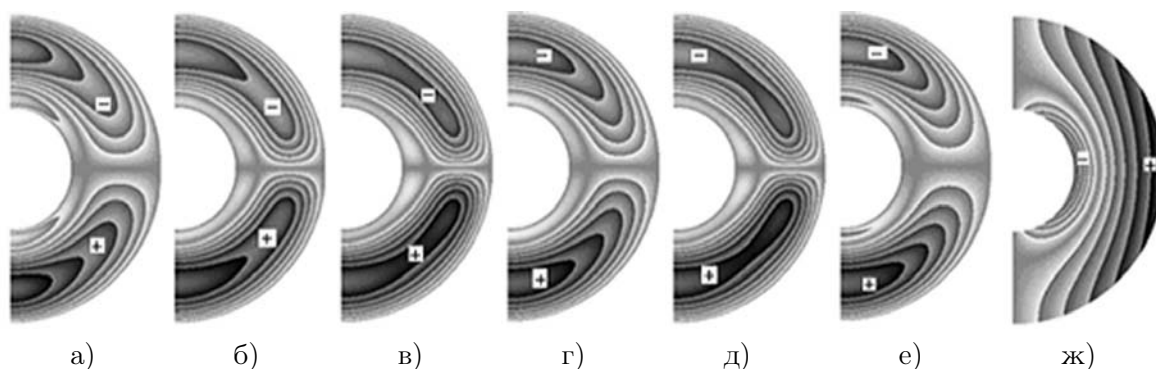


Рис. 10. Поле магнитной индукции. Радиальная составляющая: а) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; д) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$; ж) — меридиональная составляющая

На рис. 10 приведены результаты расчетов поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции.

Для всех режимов значения радиальной составляющей (рис. 10а–10е) в северном полушарии отрицательные, за исключением небольшой области у внутренней поверхности слоя, а в южном — положительные, за исключением небольшой области у внутренней поверхности слоя, $|B_{r_{\max}}| = 9.46 \cdot 10^{-4}$. Значения меридиональной составляющей (рис. 10ж) положительные практически во всей полости, за исключением небольшой области у внутренней поверхности, в которой ее значения отрицательные, $|B_{\theta_{\max}}| = 1.00 \cdot 10^{-2}$. Оказалось, что качественно и количественно структура поля меридиональной составляющей магнитной индукции практически не изменяется для рассмотренных режимов.

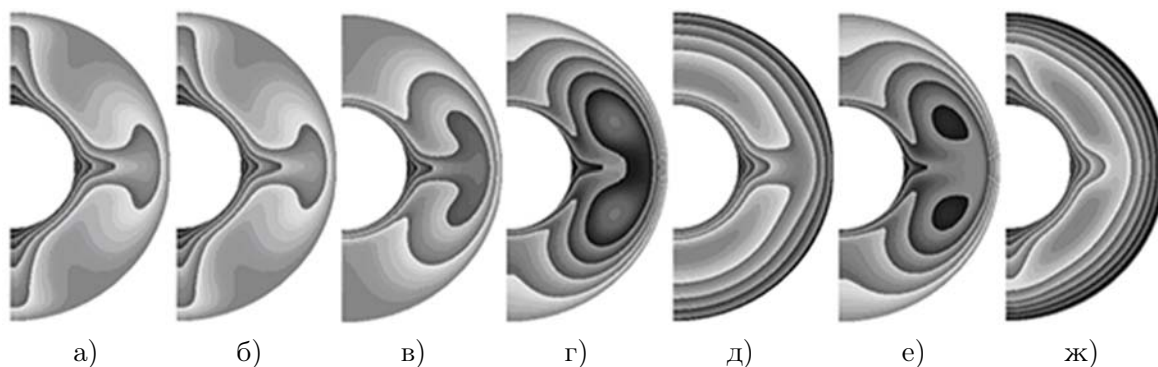


Рис. 11. Поле температуры: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 11–16 приведены результаты расчетов для числа Грасгофа $Gr = 10^4$.

На рис. 11 приведены поля температуры. Для всех режимов теплообмен в слое происходит конвекцией. Для результатов, представленных на рис. 11а, 11б, имеет место качественное и количественное сходство. Основное изменение температуры происходит в небольших областях полюсов и экватора, $T_{\max} = 3.519$. Учет джоулевой диссипации, как с внутренними источниками (стоками) тепла, так и без них (рис. 11в, 11г), приводит к изменению поля температуры. Изменение температуры практически происходит в области экватора (рис. 11в; $T_{\max} = 3.342$), причем эта область увеличивается при учете внутренних источников тепла (рис. 11г; $T_{\max} = 4.589$).

Учет внутренних стоков тепла (рис. 11д) изменяет температурное поле. Значения температуры принимают как положительные, так и отрицательные значения. Интервал изменения температуры $[-2.289; 0.853]$. Неучет джоулевой диссипации при учете внутренних источников или стоков тепла (рис. 11е, 11ж) также приводит к изменению поля температуры. Для результата, приведенного на рис. 11е, $T_{\max} = 4.408$, а для результата, приведенного на рис. 11ж, диапазон изменения температуры $[-3.125; 0.065]$.

На рис. 12 приведены распределения чисел Нуссельта. Для всех режимов (рис. 12; линия 2) распределение локальных чисел Нуссельта носит “волновой” характер и соответствует конвективному теплообмену. Распределение локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности одинаково для неэлектропроводной и электропроводной жидкости (рис. 12а, 12б; кривая 2) и имеет два минимума при $\theta \approx \pi/4; 3\pi/4$ и один максимум при $\theta \approx \pi/2$; $\overline{Nu}_2 = 4.359$; $0.408 \leq Nu_2 \leq 9.347$. Учет джоулевой диссипации (рис. 12в)

значительно изменяет характер изменения локальных чисел Нуссельта по сравнению с результатом, приведенным на рис. 12а, 12б. При $\theta \approx \pi/2$ распределение имеет максимум (рис. 12в; $\overline{Nu}_2 = 8.750$; $0.244 \leq Nu_2 \leq 15.283$). Учет внутренних источников и стоков тепла (рис. 12г, 12д) также приводит к распределению локальных чисел Нуссельта, характерных для конвективного теплообмена. На рис. 12г распределение имеет один максимум при $\theta \approx \pi/2$, а на рис. 12д — два максимума и один минимум. Распределение локальных чисел Нуссельта при неучете джоулевой диссипации и при наличии внутренних источников тепла (рис. 12е; $\overline{Nu}_2 = 23.433$; $5.714 \leq Nu_2 \leq 37.075$) качественно аналогично результату, приведенному на рис. 12г. При учете внутренних стоков тепла (рис. 12ж) распределение чисел Нуссельта имеет два максимума и один минимум и находится в области отрицательных значений: $\overline{Nu}_2 = -14.715$; $-17.818 \leq Nu_2 \leq -14.201$. При наличии внутренних стоков тепла (рис. 12д) локальные числа Нуссельта принимают отрицательные значения. Значение осредненного и диапазон изменения локальных чисел Нуссельта для результата, приведенного на рис. 12г: $\overline{Nu}_2 = 28.036$; $5.669 \leq Nu_2 \leq 42.680$; а для результата, приведенного на рис. 12д: $\overline{Nu}_2 = -10.350$; $-12.565 \leq Nu_2 \leq -9.307$.

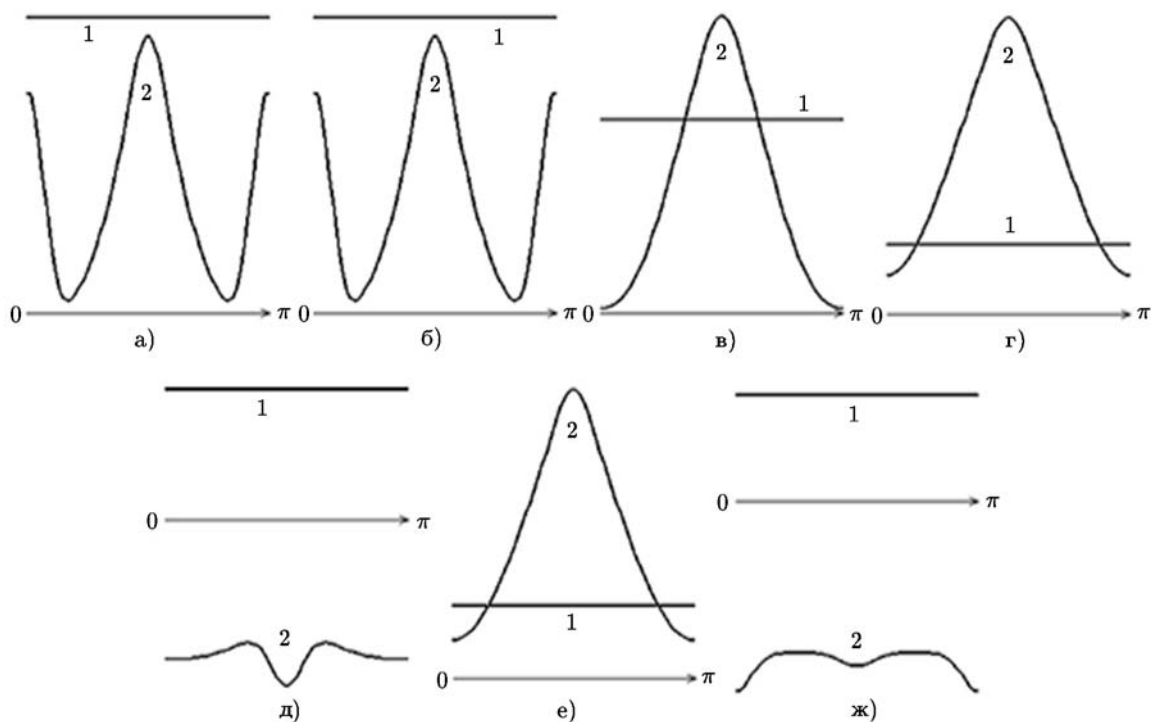


Рис. 12. Распределение локальных чисел Нуссельта: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 13 приведены поля функции тока. Для всех случаев, за исключением режима, представленного на рис. 13ж, в слое образуются две крупномасштабные конвективные ячейки. Для результатов, приведенных на рис. 13а–13е, в северном полушарии слоя жидкость движется по часовой стрелке (значения отрицательные), а в южном — против часовой стрелки (значения положительные).

Структура течения жидкости в слое для результата, приведенного на рис. 13ж, представлена четырьмя конвективными ячейками. Максимальное значение функции тока для результатов, приведенных на рис. 13а–13ж: $|\psi_{\max}| = 1.81; 1.81; 2.29; 3.35; 7.16 \cdot 10^{-1}; 3.17; 3.25 \cdot 10^{-1}$.

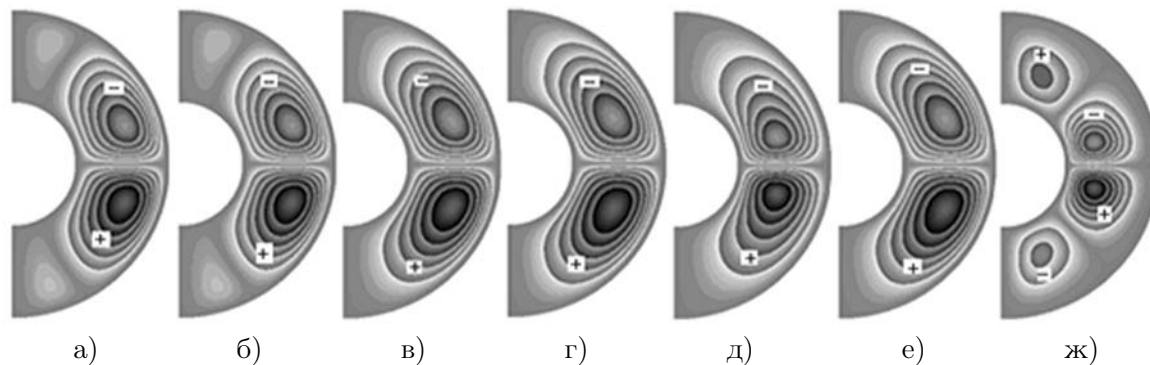


Рис. 13. Поле функции тока: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

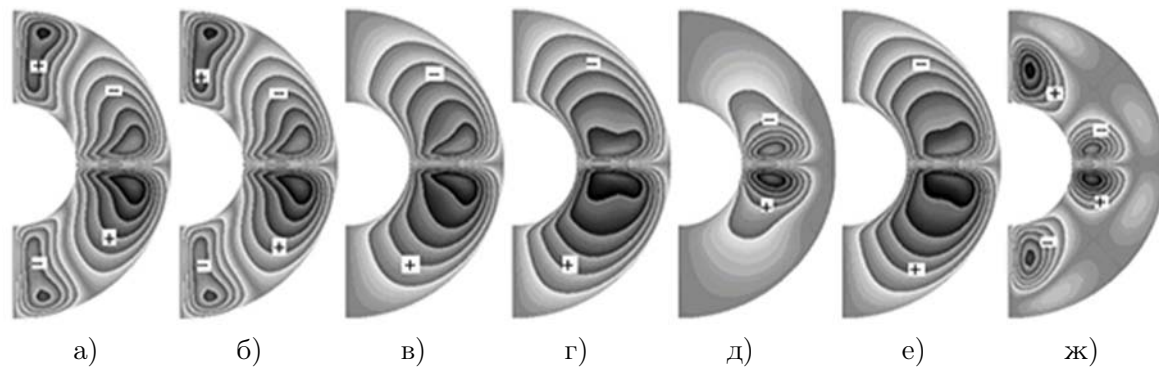


Рис. 14. Поле напряженности вихря: а) — без учета магнитных сил, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; д) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; ж) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

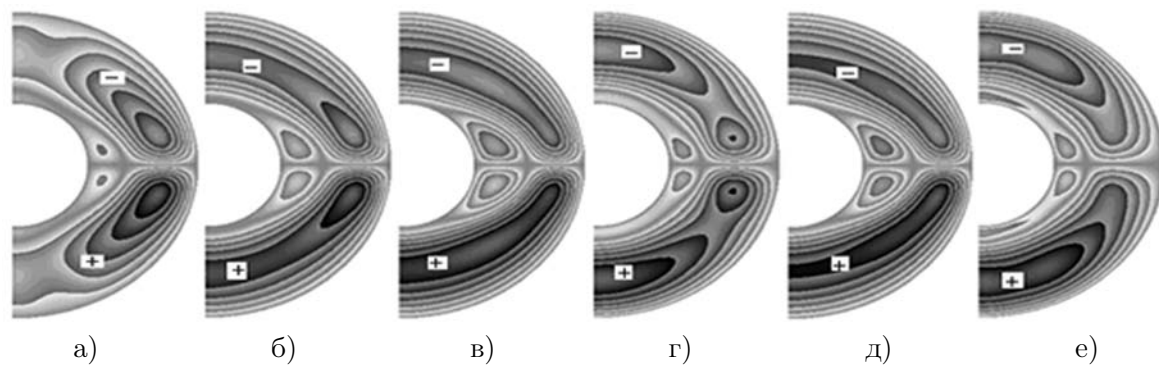


Рис. 15. Поле радиальной составляющей магнитной индукции: а) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = 1$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0$, $Q_v = -1$; д) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = +1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0$, $Q_v = -1$

На рис. 14 приведены поля напряженности вихря. В слое в зависимости от режима образуются четыре (рис. 14а, 14б, 14ж) и два вихря (рис. 14в–14е).

Для результатов, приведенных на рис. 14а, 14б, 14ж, в северном полушарии в области полюсов жидкость движется против часовой стрелки, а в южном — по часовой стрелке. В вихрях, расположенных в области экватора, направление движения жидкости в ячейках противоположное. Учет джоулевой диссипации, как с внутренними источниками (стоками) тепла, так и без них (рис. 14в–14д), изменяет направление циркуляции жидкости в вихревых ячейках. Такое же направление течения жидкости сохраняется и для режима без учета джоулевой диссипации, но при наличии внутренних источников тепла (рис. 14е). Для результатов, представленных на рис. 14д, 14ж, структура вихрей — мелкомасштабная. Максимальные значения напряженности вихря для результатов, показанных на рис. 14а–14ж, следующие: $|\omega_{\max}| = 1.09 \cdot 10^{-3}; 1.09 \cdot 10^{-3}; 1.21 \cdot 10^{-3}; 1.68 \cdot 10^{-3}; 8.26; 1.55 \cdot 10^{-3}; 6.64$.

На рис. 15 приведены результаты расчетов поля радиальной составляющей магнитной индукции. Для всех случаев (рис. 15) радиальная составляющая в северном полушарии принимает отрицательные значения, за исключением небольшой области у внутренней поверхности слоя, а в южном — положительные, за исключением небольшой области у внутренней поверхности слоя. Структура поля радиальной составляющей в зависимости от режимов претерпевает значительные изменения. Максимальные значения радиальной составляющей $|B_{r_{\max}}| = 1.64 \cdot 10^{-3}; 1.60 \cdot 10^{-3}; 1.75 \cdot 10^{-3}; 9.21 \cdot 10^{-4}; 1.76 \cdot 10^{-3}; 6.79 \cdot 10^{-4}$ для результатов рис. 15а–15е соответственно.

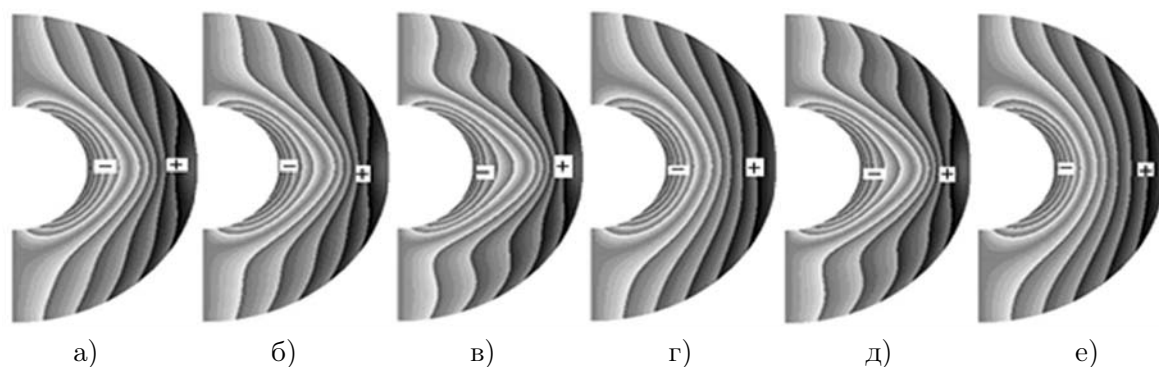


Рис. 16. Поле меридиональной составляющей магнитной индукции: а) — с учетом магнитных сил, $J = 0, Q_v = 0$; б) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0, Q_v = 0$; в) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0, Q_v = 1$; г) — с учетом магнитных сил, $J \neq 0, Q_v = -1$; д) — с учетом магнитных сил, $J = 0, Q_v = +1$; е) — с учетом магнитных сил, $J = 0, Q_v = -1$

На рис. 16 приведены результаты расчетов поля меридиональной составляющей магнитной индукции.

Для всех рассмотренных вариантов (рис. 16) значения меридиональной составляющей магнитной индукции положительные практически во всем сферическом слое, за исключением небольшой области у внутренней поверхности, в которой ее значения отрицательные. В структуре поля меридиональной составляющей магнитной индукции происходят заметные изменения, которые усиливаются при учете джоулевой диссипации (рис. 16в). Учет джоулевой диссипации и внутренних источников тепла (рис. 16г) уменьшает эти изменения, которые затем усиливаются при учете внутренних источников тепла без джоулевой диссипации (рис. 16д). Максимальное значение меридиональной составляющей магнитной индукции не превышает величину $|B_{\theta_{\max}}| = 1.00 \cdot 10^{-2}$.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- при $Gr = 10^2$ в слое образуются две конвективные ячейки. Учет электропроводности жидкости изменяет направление ее движения в ячейках на противоположное. Для $Gr = 10^3$ направление движения жидкости в ячейках то же, что и для $Gr = 10^2$, за исключением режима с учетом магнитных сил и внутренних источников тепла. При учете магнитных сил и внутренних стоков тепла ($Gr = 10^3; 10^4$) в слое образуются четыре ячейки;
- для значений чисел Грасгофа $Gr = 10^2; 10^3$ учет джоулевой диссипации изменяет направление циркуляции жидкости в конвективных ячейках. При $Gr = 10^4$ этого не происходит, по-видимому, влияние конвекции значительно превышает вклад джоулевой диссипации;
- при $Gr = 10^2$ поле радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех режимов практически не изменяется. При $Gr = 10^3$ структура поля радиальной составляющей магнитной индукции изменяется в зависимости от режима, а меридиональная составляющая практически не изменяется. При $Gr = 10^4$ поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции изменяются в зависимости от режима;
- интенсификация конвекции в сферическом слое приводит к изменению механизма теплообмена, распределения температуры, структуры поля течения и магнитной индукции. Предложенная модель и полученные результаты могут быть полезными при исследовании тепловых процессов в сферических слоях, например в жидком ядре Земли.

Литература

1. **Жарков В.Н.** Внутреннее строение Земли и планет. — М.: Наука, 1983.
2. **Жарков В.Н., Трубицын В.П., Самсоненко Л.В.** Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. — М.: Наука, 1971.
3. **Яновский Б.М.** Земной магнетизм. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1978.
4. **Соловьев С.В.** Моделирование конвективного теплообмена в жидком ядре Земли // Вестник Тихоокеанского государственного университета. — 2012. — № 2 (25). — С. 73–82.
5. **Госмен А.Д., Пан В.М., Ранчел А.К., Сполдинг Д.Б., Вольфштейн М.** Численные методы исследования течений вязкой жидкости. — М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 29 января 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Zharkov V.N.** Vnutrennee stroenie Zemli i planet. — М.: Nauka, 1983.
2. **Zharkov V.N., Trubitsyn V.P., Samsonenko L.V.** Fizika Zemli i planet. Figury i vnutrennee stroenie. — М.: Nauka, 1971.
3. **Yanovskij B.M.** Zemnoj magnetizm. — L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1978.
4. **Solov'ev S.V.** Modelirovanie konvektivnogo teploobmena v zhidkom yadre Zemli // Vestnik Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2012. — № 2 (25). — S. 73–82.
5. **Gosmen A.D., Pan V.M., Ranchel A.K., Spolding D.B., Vol'fshtejn M.** Chislennye metody issledovaniya techenij вязкой жидкости. — М.: Mir, 1972.

