УДК 517.392

Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева на классе функций, обращающихся в нуль на одном конце и в бесконечность на другом конце интервала интегрирования

Ш.С. Хубежты

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, ул. Ватутина, 44-46, Владикавказ, Респ. Северная Осетия-Алания, 362025
E-mail: shalva57@rambler.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 14, 2021.

Хубежты Ш.С. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева на классе функций, обращающихся в нуль на одном конце и в бесконечность на другом конце интервала интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 331–341.

Строятся вычислительные схемы для приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода, ограниченного на одном конце и не ограниченного на другом конце интервала интегрирования $[-1, 1]$.

Решение уравнения ищется в виде ряда по многочленам Чебышева третьего и четвертого родов. Ядро и правая часть уравнения разлагаются в ряды с применением многочленов Чебышева третьего и четвертого родов, коэффициенты которых вычисляются приближенно по квадратурным формулам Гаусса, т. е. с наиболее высокой алгебраической степенью точности. Для коэффициентов разложения многочленов Чебышева третьего рода в ряды по многочленам Чебышева четвертого рода и обратно найдены точные значения. Коэффициенты разложения искомой функции, т. е. решения уравнения, находятся из решения систем линейных алгебраических уравнений.

Для обоснования построенных вычислительных схем используются методы функционального анализа и теории ортогональных многочленов. При выполнении условия существования у заданных функций производных до некоторого порядка, принадлежащих классу Гёльдера, оценивается погрешность вычисления и дается порядок ее стремления к нулю.

DOI: 10.15372/SJNM20210308

Ключевые слова: *сингулярные интегралы, индекс уравнения, квадратурные формулы, вычислительные схемы, наилучшая равномерная аппроксимация, оценка погрешности.*

Khubezhty Sh.S. An approximate solution of singular integral equations using the Chebyshev series on the class of functions vanishing at one end and turning into infinity at the other end of the integration interval // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 331–341.

Computational schemes for an approximate solution of a singular integral equation of the first kind, bounded at one end and not bounded at the other end of the integration interval are constructed $[-1, 1]$.

The solution of the equation is sought for in the form of a series in the Chebyshev polynomials of the third and the fourth kinds. The kernel and the right-hand side of the equation decompose into series with the use of the Chebyshev polynomials of the third and the fourth kinds, whose coefficients are approximately calculated by the Gaussian quadrature formulas, i. e. the highest algebraic degree of accuracy. For the coefficients of the expansion of the Chebyshev polynomials, exact values in the series are found. The coefficients of the expansion of the unknown function, i. e. solutions of the equation, are found from the solution to systems of linear algebraic equations.

To justify the constructed computing schemes, the methods of functional analysis and the theory of orthogonal polynomials are used. When the existence condition for the given functions of the derivatives up to some order belonging to the Holder class is satisfied, the calculation error is estimated and the order of its turning into zero is given.

Keywords: *singular integrals, equation index, quadrature formulas, computational schemes, best uniform approximation, error estimation.*

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Т. Карлемана, Н.И. Мусхелишвили, С.Г. Михлина, З. Пресдорфа и т. д.

Однако решение сингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении можно отметить труды В.В. Иванова, И.К. Лифанова, Б.Г. Габдулхаева, Д.Г. Саникидзе, И.В. Бойкова и др. Указанные авторы в основном рассматривают методы, в которых находят приближенные значения решения в конечном числе точек. Во многих случаях требуется получить аналитические приближенные решения, пригодные на всем отрезке. К этому типу методов принадлежат разработанные для интегральных уравнений [4] методы, связанные с многочленами Чебышева.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение I рода:

$$\mathbb{K}\varphi_0 \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $-1 < x < 1$, $K(x,t)$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Оператор $\mathbb{K}$ действует из пространства X в Y. X — пространство функций вида $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функции, имеющие производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера $H(\alpha)$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1\right)$, Y — пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.*

Действительно, оператор $\mathbb{K}$ состоит из сингулярного и регулярного операторов. Для сингулярного оператора справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}\,dt + \varphi(x)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{dt}{t-x} = I(x) + \varphi(x).$$

Рассмотрим разность

$$I(x+h)-I(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x+h)}{t-x-h}\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}\,dt.$$

Введем обозначения: $L=[-1,1]$, $l=(x-h,x+h)$, $L\setminus l=[-1,x-h)\cup(x+h,1]$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned}I(x+h)-I(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{l}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x+h)}{t-x-h}\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{l}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}\,dt+\\ \frac{\varphi(x)-\varphi(x+h)}{\pi}\int\limits_{L\setminus l}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{dt}{t-x-h}+\frac{h}{\pi}\int\limits_{L\setminus l}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x+h)}{(t-x)(t-x-h)}\,dt\\ =I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)+I_4(x).\end{aligned}$$

Эти интегралы вычисляются, оцениваются и в результате получаем $|I_1(x)|=O(h)$, $|I_2(x)|=O(h)$, $|I_3(x)|=O(h)$, $|I_4(x)|=O(h|\ln h|)=O(h^{\alpha}h^{1-\alpha}|\ln h|)=O(h^{\alpha})$, $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

Следовательно, получаем $|I(x+h)-I(x)|\le Ah^{\alpha}$, $A=\mathrm{const}$, т.е. $I(x)\in H(\alpha)\in Y$.

Для регулярного интеграла имеем

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}K(x+h,t)\varphi(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}K(x,t)\varphi(t)\,dt\right|\\ &=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}(K(x+h,t)-K(x,t))\varphi(t)\,dt\right|\\ &=\left|h\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}K'_x(\xi,t)\varphi(t)\,dt\right|=O(h).\end{aligned}$$

Этим доказывается, что оператор $\mathbb{K}$ действует из пространства X в пространство Y.

Если уравнение (1) сравнить с общим видом сингулярного интегрального уравнения (см. [1, с. 157]), то заметим, что $A(x)=0$, $B(x)=1$ и $G(x)=(A(x)-B(x))/(A(x)+B(x))=-1$. С помощью функции $G(x)$ определяется индекс $\varkappa$ и вид решения уравнения (1).

Соответственно, решение уравнения (1) ищется как (см. [2, с. 341])

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t),\quad \varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t)\quad\text{при}\quad\varkappa=0,$$

$$\varphi_0(t)=\sqrt{1-t^2}\,\varphi(t)\quad\text{при}\quad\varkappa=-1,\quad \varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi(t)\quad\text{при}\quad\varkappa=1,$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1,1]$. В статьях [5, 6] изучены случаи $\varkappa=\pm1$. Построены вычислительные схемы с применением рядов Чебышева для приближенного решения уравнения (1).

В этой статье будем рассматривать случаи:

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)\quad\text{и}\quad\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t),\quad\text{т.е. }\varkappa=0.$$

1. Вычислительная схема для случая $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$

Рассмотрим случай, когда решение уравнения (1) ограничено на левом конце и не ограничено на правом конце, т. е. ищется решение вида $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1;1]$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\mathbb{K}_0\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Как известно (см. [1, с. 192; 2, с. 356]), для уравнения (2) индекс $\varkappa = 0$, и после регуляризации относительно его характеристической части оно сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. То есть для уравнения (2) справедливы теоремы Фредгольма. Мы будем подразумевать ядро $K(x,t)$ такое, что существует единственное решение и, следовательно, обратный оператор $\mathbb{K}_0^{-1}$ ($\mathbb{K}^{-1}$).

Разложим $\varphi(t)$, $K(x,t)$ и $f(x)$ в ряды по многочленам Чебышева третьего рода вида

$$C_n(t) = \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\arccos t}{\cos\frac{1}{2}\arccos t}, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Имеем:

$$\begin{gathered}\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t),\\ K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{il} C_i(x) C_l(t),\\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x).\end{gathered} \tag{3}$$

Коэффициенты a_k ($k = 0,1,2,\dots$) — неизвестные, так как функция $\varphi(t)$ — неизвестная. Остальные коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{gathered}c_{il} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,K(x,t)C_i(x)\,dx\right)C_l(t)\,dt,\\ d_i = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,f(t)C_i(t)\,dt.\end{gathered} \tag{4}$$

Подставляя разложения (3) в (2), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{1}{t-x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t)\right)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{il} C_i(x) C_l(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t)\,dt$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x).$$

Используя формулу обращения [7, с. 85]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\frac{C_k(t)}{t-x}\,dt=S_k(x),$$

где

$$S_k(x)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}$$

есть многочлен Чебышева четвертого рода, свойства ортогональных многочленов и следующее свойство рядов Чебышева: ряды Чебышева по многочленам I рода равномерно сходятся для широкого класса функций [4, с. 107–112], то в формуле (4), используя равенство [7] $C_k(t)=\frac{T_i(t)+T_{i+1}(t)}{1+t}$, где $T_i(t)=\cos i(\arccos t)$ — многочлены Чебышева I рода, для коэффициентов d_i получаем:

$$\begin{aligned}d_i&=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,f(t)\,C_i(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\,f(t)\,\frac{T_i(t)+T_{i+1}(t)}{1+t}\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,f(t)\big(T_i(t)+T_{i+1}(t)\big)\,dt=\bar d_i+\bar d_{i+1}.\end{aligned}$$

Это означает, что ряды Чебышева по многочленам III рода также равномерно сходятся. Поэтому можно заменить порядок суммирования. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kS_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{i=0}^{\infty}c_{ik}C_i(x)=\sum_{i=0}^{\infty}d_iC_i(x). \tag{5}$$

Разложим еще многочлен Чебышева $S_k(x)$ $(k=1,2,\dots)$ в ряд Чебышева по многочленам $C_i(x)$. Имеем

$$S_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_{ik}C_i(x), \tag{6}$$

где

$$b_{ik}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,S_k(t)C_i(t)\,dt.$$

Они вычисляются следующим образом. Сделаем замену переменных $t=\cos\vartheta$, получаем

$$\begin{aligned}b_{ik}&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}}\,\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{2i+1}{2}\,\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{1}{2}\,\vartheta}\,\sin\vartheta\,d\vartheta\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,\sin\frac{2k+1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{2i+1}{2}\,\vartheta\,d\vartheta\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{2i+1}{2}\,\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,\sin\frac{2k+1}{2}\,\vartheta\,\cos\frac{2i+1}{2}\,\vartheta\,d\vartheta=I_1+I_2.\end{aligned}$$

I_1 и I_2 можно преобразовать в виде:

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{\sin\vartheta}\big(\sin(k+i+1)\,\vartheta + \sin(k-i)\,\vartheta\big)\,d\vartheta,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\big(\sin(k+i+1)\,\vartheta + \sin(k-i)\,\vartheta\big)\,d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{\sin\vartheta}\big(\sin(k+i+2)\,\vartheta + \sin(k+i)\,\vartheta + \sin(k-i+1)\,\vartheta + \sin(k-i-1)\,\vartheta\big)\,d\vartheta.$$

Воспользовавшись формулами [8, с. 186]

$$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$$

$$\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^n \frac{\sin 2kx}{2k} + x,$$

после вычисления величин I_1 и I_2 получаем

$$b_{ik} = \begin{cases} 2, & i < k, \\ 1, & i = k, \\ 0, & i > k. \end{cases}$$

С учетом (6) из (5) получаем

$$\sum_{k=0}^\infty a_k\left(\sum_{i=0}^\infty b_{ik}C_i(x)\right) + \sum_{k=0}^\infty a_k\sum_{i=0}^\infty c_{ik}C_i(x) = \sum_{i=0}^\infty d_iC_i(x)$$

или

$$\sum_{i=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^\infty a_kb_{ik}\right)C_i(x) + \sum_{i=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^\infty a_kc_{ik}\right)C_i(x) = \sum_{i=0}^\infty d_iC_i(x).$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=0}^\infty a_kb_{ik} + \sum_{k=0}^\infty a_kc_{ik} = d_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \tag{7}$$

Система (7) — это бесконечная система с бесконечным числом неизвестных. Ее можно решать приближенно, рассматривая конечную систему из n уравнений:

$$\sum_{k=0}^n a_k(b_{ik} + c_{ik}) = d_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{8}$$

После нахождения неизвестных a_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ приближенное решение будет выражаться функцией

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n a_kC_k(t). \tag{9}$$

2. Обоснование вычислительной схемы

Рассмотрим приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (1) в предположении, что ищется решение, обращающееся в нуль на левом конце, а в бесконечность на правом конце интервала интегрирования $[-1,1]$, т. е. вида $\varphi_0(t)=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$.

Для обоснования выше построенной вычислительной схемы поступаем следующим образом. Обозначим через X пространство функций вида $x(t)=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t)$, функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на $[-1,1]$, удовлетворяющую условию Гёльдера $H(\alpha)$ с показателем α $\left(\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1\right)$ [3, 10].

Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|x\|=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|+\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi'(t)|+\sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\quad 0<\beta<\alpha.$$

Введем обозначения: Y — пространство функций вида $y(t)=\psi(t)$ из класса $H(\alpha)$ с нормой

$$\|y(t)\|=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\psi(t)|+\sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\quad 0<\beta<\alpha;$$

X_n — пространство функций вида $x_n(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi_n(t)$, $\varphi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_kC_k(t)$, с нормой

$$\|x_n(t)\|=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_n(t)|+\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi_n'(t)|+\sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi_n'(t_1)-\varphi_n'(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\quad 0<\beta<\alpha;$$

Y_n — пространство функций вида $y_n(t)=\psi_n(t)$, $\psi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_kC_k(t)$, с нормой

$$\|y_n(t)\|=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\psi_n(t)|+\sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\psi_n(t_1)-\psi_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},\quad 0<\beta<\alpha.$$

Согласно лемме 1, оператор $\mathbb{K}$ действует из пространства X в пространство Y.

Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство Y на пространство Y_n по формуле $P_n[y(t)]=P_n[\psi(t)]$, где $\psi(t)\in C[-1,1]$, $P_n[\psi(t)]$ — оператор, проектирующий непрерывные функции на множество многочленов вида $\sum_{k=0}^{n}\alpha_kC_k(t)$. Известно, что $\|P_n\|\leqslant C\ln n$, $C=\mathrm{const}$ [10].

В рядах Чебышева с использованием многочленов Чебышева I рода для операторов проектирования непрерывных функций на множество многочленов вида $\sum_{k>0}^{n}\alpha_kT_k(t)$ $(T_k(t)=\cos i(\arccos t))$ верна оценка $\|P_n\|\leqslant C\ln n$, $C=\mathrm{const}$. В нашем случае проектирование проводится на множество многочленов вида

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_kC_k(t),\quad \text{где}\quad C_k(t)=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\arccos x}{\cos\frac{1}{2}\arccos x}.$$

Норма вычисляется с помощью коэффициентов α_k. Но эти коэффициенты удовлетворяют равенству $\alpha_k=\bar{d}_k+\bar{d}_{k+1}$. Тогда для нашего случая справедлива также указанная оценка.

Приближенное решение (1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sum_{k=0}^{n} a_k C_k(t),$$

где $C_k(t)$ — ортогональные многочлены с весом $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ на отрезке $[-1,1]$, т. е. полиномы Чебышева III рода.

Коэффициенты a_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений (8), представленной в операторной форме уравнением

$$P_n\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_n(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\,P_n^{\tau}\big[K(t,\tau)\varphi_n(\tau)\big]\,d\tau\right\} = P_n\big[f(t)\big], \tag{10}$$

где $P_n[\psi(t)]$ — оператор проектирования на множестве полиномов степени n вида $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k C_k(t)$, $\psi(t) \in C[-1,1]$.

Воспользовавшись формулой обращения [7, с. 86] и квадратурными формулами Гаусса [9, с. 134], уравнение (10) представим как

$$\mathbb{K}_n x_n = P_n\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_n(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right] + P_n^t\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\,P_n^{\tau}\big[K(t,\tau)\big]\varphi_n(\tau)\,d\tau\right] = P_n\big[f(t)\big]. \tag{11}$$

Покажем [11], что при n таком, что

$$q = C\big\|\mathbb{K}^{-1}\big\|\,n^{\beta}\big(\overline{E}_n^{\,t}(K(t,\tau)) + \overline{E}_n^{\,\tau}(K(t,\tau))\big)\ln n < 1,$$

система уравнений (11) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка

$$\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leqslant Cn^{\beta}\big\|\mathbb{K}^{-1}\big\|\big(\overline{E}_n^{\,t}(K(t,\tau)) + \overline{E}_n^{\,\tau}(K(t,\tau))\big)\ln n,$$

где $x^*(t)$ — решение уравнения (1), $\overline{E}_n^{\,t}(K(t,\tau)) = \max_{-1\leqslant\tau\leqslant 1}|K(t,\tau) - K_n^{\tau}(t,\tau)|$, $K_n^{\tau}(t,\tau)$ — полином наилучшего равномерного приближения степени n по переменной τ к функции $K(t,\tau)$.

Введем оператор

$$\overline{\mathbb{K}}_n x_n = P_n\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_n(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right] + P_n^t\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,\tau)x_n(\tau)\,d\tau\right] = P_n\big[f(t)\big].$$

Оценим норму

$$\begin{aligned}\big\|\mathbb{K}x_n - \overline{\mathbb{K}}_n x_n\big\| &= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,\tau)x_n(\tau)\,d\tau - P_n^t\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(t,\tau)x_n(\tau)\,d\tau\right]\right\| \\ &\leqslant \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\big(K(t,\tau) - K_n^t(t,\tau)\big)x_n(\tau)\,d\tau\right\| + \\ &\quad \left\|P_n^t\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\big(K(t,\tau) - K_n^t(t,\tau)\big)x_n(\tau)\,d\tau\right]\right\| = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1 \leqslant Cn^\beta \overline{E}_n^t(K(t,\tau))\|x_n\|, \quad I_2 \leqslant Cn^\beta \|P_n\|\overline{E}_n^t(K(t,\tau))\|x_n\|$$

и, следовательно,

$$\big\|\mathbb{K}x_n - \overline{\mathbb{K}}_n x_n\big\| \leqslant Cn^\beta \|P_n\| E_n^t(K(t,\tau))\|x_n\|,$$

$$\overline{E}_n^t(K(t,\tau)) = \max_{-1\leqslant\tau\leqslant 1} E_n^t(K(t,\tau)).$$

Из последнего неравенства и общей теории приближенных методов для обратных операторов [11, гл. V, с. 211; гл. XIV, с. 517] следует, что при n таких, что $q < 1$, существует обратный оператор $\overline{\mathbb{K}}_n^{-1}$ с нормой $\big\|\overline{\mathbb{K}}_n^{-1}\big\| \leqslant \frac{\|\mathbb{K}^{-1}\|}{1-q}$; здесь $q = Cn^\beta \|\mathbb{K}^{-1}\|\|P_n\|\overline{E}_n^t(K(t,\tau))$. Так как оператор $\overline{\mathbb{K}}_n$ конечномерный, то существует линейный оператора $\overline{\mathbb{K}}_n^{-1}$ с той же нормой. Оценим теперь норму $\|\overline{\mathbb{K}}_n - \mathbb{K}_n\|$. Очевидно

$$\big\|\overline{\mathbb{K}}_n x_n - \mathbb{K}_n x_n\big\| = \left\| P_n^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \big(K(t,\tau) - P_n^\tau[K(t,\tau)]\big) x_n(\tau)\, d\tau \right] \right\|$$
$$\leqslant Cn^\beta \|P_n\| \overline{E}_n^t(K(t,\tau))\|x_n\|,$$

где $\overline{E}_n^\tau(K(t,\tau)) = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} E_n^\tau(K(t,\tau))$.

Пусть существует такое n^*, что при $n > n^*$ выполняется неравенство

$$Cn^\beta \|\overline{\mathbb{K}}_n^{-1}\|\|P_n\|\overline{E}_n^\tau(K(t,\tau)) < 1.$$

Тогда из теоремы Банаха [11, с. 211] следует, что

$$\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leqslant Cn^\beta \|P_n\|\big(\overline{E}_n^t(K(t,\tau)) + \overline{E}_n^\tau(K(t,\tau))\big),$$

где x^* и x_n^* — решения уравнений (1) и (11).

Обобщая эти результаты, сформулируем заключение в виде теоремы.

Теорема. *Если существует линейный обратный оператор* $\mathbb{K}_0^{-1}(\mathbb{K}^{-1})$ *и функции* $K(x,t)$ *и* $f(x)$ *принадлежат классу* $H_r(\alpha)$ *(т. е. имеют непрерывные производные порядка* $r-1$*, а производная порядка* r *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* α $(1/2 < \alpha \leqslant 1)$*), то при* n *таких, что*

$$Cn^\beta \big\|\mathbb{K}^{-1}\big\|\big(\overline{E}_n^x(K(x,t)) + \overline{E}_n^t(K(x,t))\big)\ln n < 1,$$

система (8) *имеет единственное решение, и справедлива оценка*

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right) \quad (0 < \beta < \alpha), \tag{12}$$

где $\varphi(t)$ *— решение уравнения* (2), $\varphi_n(t)$ *— его приближенное решение вида* (9).

Аналогично строится вычислительная схема для случая, когда решение уравнения (1) имеет вид $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t)$. Только тогда в роли ортогональных многочленов надо использовать многочлены Чебышева четвертого рода

$$S_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\arccos t}{\sin\frac{1}{2}\arccos t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Литература

1. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966.
2. **Лифанов И.К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: Янус, 1995.
3. **Бойков И.В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2004.
4. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — М.: Наука, 1983.
5. **Бесаева З.В., Хубежты Ш.С.** Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения рядами Чебышева // Владикавказский матем. журн. — 2016. — Т. 18, вып. 4. — С. 15–22.
6. **Хубежты Ш.С., Бесаева З.В.** Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения, не ограниченного на концах интегрирования, с применением рядов Чебышева // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2017. — № 2. — С. 26–31.
7. **Хубежты Ш.С.** Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.
8. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.** Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.
9. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967.
10. **Бойков И.В., Бойкова А.И., Сёмов М.А.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Приволжский регион. Физико-математические науки. Математика. — 2015. — № 3(35). — С. 11–27.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 05 февраля 2018 г.
После исправления 14 июля 2020 г.
Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Muskhelishvili N.I.** Singulyarnye integral'nye uravneniya. — M.: Nauka, 1966.
2. **Lifanov I.K.** Metod singulyarnyh integral'nyh uravnenii i chislennyi eksperiment. — M.: Yanus, 1995.
3. **Boikov I.V.** Priblizhennye metody resheniya singulyarnyh integral'nyh uravnenii. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2004.
4. **Pashkovskii S.** Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva. — M.: Nauka, 1983.
5. **Besaeva Z.V., Khubezhty Sh.S.** Priblizhennoe reshenie singulyarnogo integral'nogo uravneniya ryadami Chebysheva // Vladikavkazskii matem. zhurn. — 2016. — T. 18, vyp. 4. — S. 15–22.
6. **Khubezhty Sh.S., Besaeva Z.V.** Priblizhennoe reshenie singulyarnogo integral'nogo uravneniya, ne ogranichennogo na kontsah integrirovaniya, s primeneniem ryadov Chebysheva // Izv. vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki. — 2017. — № 2. — S. 26–31.
7. **Khubezhty Sh.S.** Kvadraturnye formuly dlya singulyarnyh integralov i nekotorye ih primeneniya. — Vladikavkaz: YUMI VNTS RAN, 2011.
8. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.N.** Integraly i ryady. — M.: Nauka, 1987.
9. **Krylov V.I.** Priblizhennoe vychislenie integralov. — M.: Nauka, 1967.

10. **Boikov I.V., Boikova A.I., Semov M.A.** Priblizhennoe reshenie gipersingulyarnyh integral'nyh uravnenii pervogo roda // Izv. vuzov. Privolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki. Matematika. — 2015. — № 3(35). — S. 11–27.

11. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Funktsional'nyi analiz. — M.: Nauka, 1977.