УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

И. Т. Пирмамедов, Ф. С. Латифов*, А. И. Худиева*

Азербайджанский технический университет, AZ 1148 Баку, Азербайджан
* Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
AZ 1073 Баку, Азербайджан
E-mails: pirmamedov@edu.gov.az, flatifov@mail.ru, aynur-khudiyeva@rambler.ru

Исследуются нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Движение жидкости описывается с помощью линеаризованного уравнения Навье — Стокса. Уравнения движения подкрепленной ортотропной оболочки, заполненной вязкой жидкостью, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского — Гамильтона. Определены зависимости отношения нелинейной частоты к линейной от прогиба оболочки при различном числе подкрепляющих ребер.

Ключевые слова: продольно подкрепленная ортотропная цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, принцип стационарности действия Остроградского — Гамильтона.

DOI: 10.15372/PMTF20220122

Введение. В последнее время возрастает интерес к исследованию напряженно-деформированного состояния ребристых анизотропных оболочек при воздействии на них динамических нагрузок. В работе [1] изучены осесимметричные колебания цилиндрической круговой оболочки при ее взаимодействии с вязкой ньютоновской жидкостью. Нестационарное взаимодействие вязкой жидкости с упругой оболочкой исследовано в работе [2] с использованием линеаризованных уравнений Навье — Стокса и нелинейной теории пологих оболочек Доннелла. В [3] выполнено экспериментальное исследование больших амплитудных колебаний пустых и заполненных жидкостью круглых цилиндрических оболочек, подвергнутых радиальному гармоническому возбуждению. Влияние материальной ортотропии на нелинейные колебания и динамическую неустойчивость круглых цилиндрических оболочек, контактирующих с жидкостью, изучено в работе [4]. При этом использовалась нелинейная теория Доннелла для случая тонкой оболочки и предполагалось, что жидкость не является вязкой несжимаемой. Уравнения движения были получены с помощью подхода Галеркина и решены методом Рунге — Кутты. В работе [5] с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью, под действием внешнего давления. На основе вариационного принципа Остроградского — Гамильтона построены системы дифференциальных уравнений относительно амплитуды перемещений поперечно подкрепленной поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Поверхностные нагрузки, действующие со стороны жидкости на поперечно подкрепленную цилиндрическую оболочку, определяются из решений линеаризованного уравнения Навье — Стокса. В [6] с помощью вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке решена задача о параметрических колебаниях продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с упругой средой и находящейся под действием внутреннего давления. Влияние внешней среды учтено с помощью модели Пастернака. Построены амплитудно-частотные зависимости для параметрических колебаний цилиндрической подкрепленной оболочки, заполненной средой.

В работах [7–18] исследуются волны деформации в упругих оболочках и упругих соосных оболочках, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью. Показано, что амплитуда движущейся волны может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от значения коэффициента Пуассона материала оболочки, т. е. наличие жидкости приводит к разрушению уединенной волны. При этом уравнение, описывающее волновой процесс, не имеет точного решения, поэтому данное явление обнаружено и исследовано с помощью компьютерного моделирования. Решение задачи о взаимодействии слоя жидкости с соосными упругими оболочками сводится к решению связанной системы уравнений, описывающей волновой процесс в оболочках и имеющей точное решение. Особый интерес представляет исследование развития волн деформации во внутренней оболочке при наличии возмущения во внешней оболочке, которое также проводится с использованием компьютерного моделирования.

Анализ литературы показывает, что исследования нелинейных параметрических колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью, не проводились.

В данной работе с использованием вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке решается задача о параметрических колебаниях продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой ньютоновской жидкостью и находящейся под действием внешнего давления. Движение жидкости описывается с помощью линеаризованного уравнения Навье — Стокса.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкой жидкостью, получим на основе вариационного принципа Остроградского — Гамильтона. Выражение для полной энергии системы, состоящей из цилиндрических круговых оболочек, продольных подкрепляющих элементов и вязкой жидкости (рис. 1), можно записать в виде

$$\Pi = G + K + \sum_{i=1}^{k_1} H_i + A, \tag{1}$$

где G, K — потенциальная и кинетическая энергия цилиндрической оболочки; $\sum\limits_{i=1}^{k_1} H_i$ — полная энергия продольных ребер, используемых при подкреплении; A — совершаемая внешними силами работа, при вычислении которой учитывается влияние вязкой жидкости; k_1 — число продольных ребер. Формулы для вычисления этих величин приведены в работах [6, 18]. Контакт между цилиндрической оболочкой и продольными стержнями полагается жестким [18].

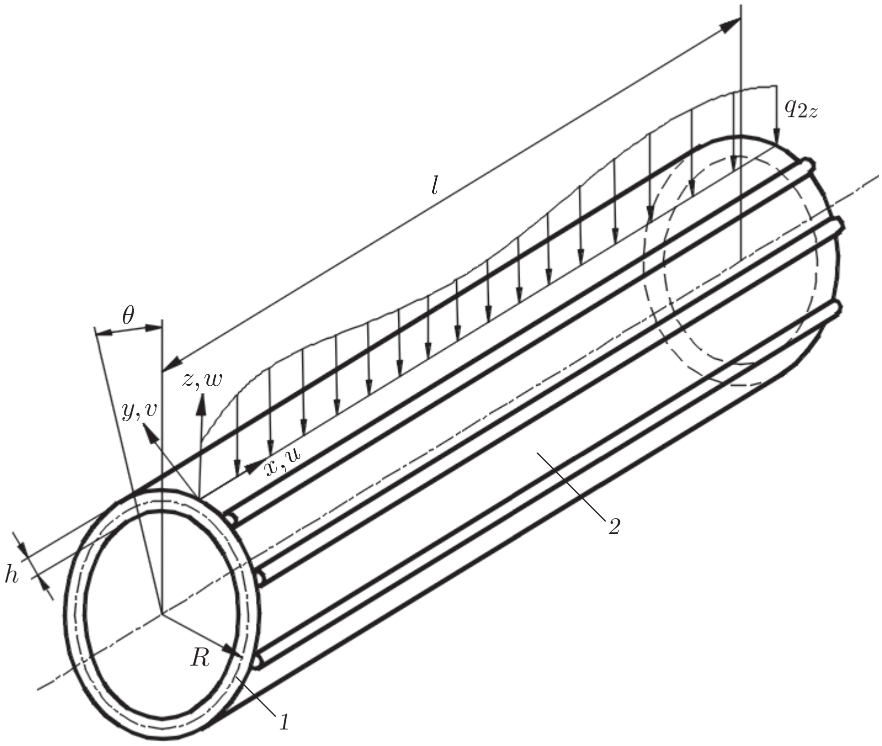

Рис. 1. Схема продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, находящейся под действием радиальной нагрузки, при динамическом взаимодействии с вязкой жидкостью:
1 — ортотропная оболочка, *2* — вязкая жидкость

Интенсивность нагрузки q_x, q_y, q_{z1}, действующей на оболочку со стороны вязкой жидкости, определяется из решения линеаризованного уравнения Навье — Стокса [1]. К выражениям (1) добавляются контактные и граничные условия.

Для оболочки с шарнирно опертыми краями краевые условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют вид

$$N_x = 0, \quad M_x = 0, \quad w = 0, \quad v = 0,$$

где N_x, M_x, v, w — продольные усилия, изгибающий момент, окружная и нормальная составляющие перемещения точек оболочки соответственно.

В точках на внутренней поверхности оболочки при $r = R - h/2$ имеют место следующие соотношения:

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad v_\theta = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad v_r = \frac{\partial w}{\partial t}; \tag{2}$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \qquad q_\theta = -\sigma_{r\theta}, \qquad q_{z1} = -p. \tag{3}$$

Здесь v_x, v_r, v_θ — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v}$ произвольной точки жидкости; p — давление в произвольной точке жидкости; q_x, q_θ, q_{z1} — силы, действующие со стороны вязкой жидкости на оболочку; σ_{rx}, $\sigma_{r\theta}$ — вязкостные силы [1].

Уравнения движения подкрепленной ортотропной оболочки, контактирующей с вязкой жидкостью, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского — Гамильтона

$$\delta W = 0,$$

где $W = \int\limits_{t'}^{t''} \Pi \, dt$ — действие по Гамильтону; t', t'' — заданные произвольные моменты времени.

2. Решение задачи. Рассмотрим нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной круговой ортотропной цилиндрической оболочки под действием радиальной нагрузки $q_{2z} = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \sin(\omega_1 t)$, где $\tilde{q}_0$ — средняя или основная нагрузка; $\tilde{q}_1$ — амплитуда изменения нагрузки; ω_1 — частота изменения давления оболочки, заполненной вязкой жидкостью.

Для описания движения жидкости используем линеаризованное уравнение Навье — Стокса для вязкой сжимаемой жидкости [1]

$$\rho_m \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \bar{\mu} \, \nabla^2 \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Пренебрегая в уравнении (4) изменением плотности, решение уравнения Навье — Стокса запишем через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), имеем

$$\rho_m \frac{\partial (\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi})}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{3} \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \bar{\mu} \, \Delta \boldsymbol{v}. \tag{6}$$

Из (5) нетрудно получить

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta \varphi, \qquad \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Delta \varphi.$$

Используя векторное тождество $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v}$, можно записать

$$\Delta \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Delta \varphi - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

С помощью (5) находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}) = -\operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{\psi},$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} (\Delta \varphi).$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение движения (6), находим

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \varphi) + \operatorname{grad} p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \operatorname{grad} \Delta \varphi - \bar{\mu} \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{\psi} + \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = 0,$$

или

$$\operatorname{grad} \left(\rho_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \, \Delta \varphi \right) + \operatorname{rot} \left(-\bar{\mu} \, \Delta \boldsymbol{\psi} + \rho_m \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение справедливо, если положить

$$\rho_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p - \frac{4}{3} \bar{\mu} \, \Delta \varphi = 0; \tag{7}$$

$$-\bar{\mu} \, \Delta \boldsymbol{\psi} + \rho_m \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, частное решение уравнения (4) можно получить на основе частных решений (7), (8), из которых следует, что для нахождения потенциалов φ и $\boldsymbol{\psi}$ нужно знать давление p и плотность ρ_m жидкости.

Рассмотрим случай, когда жидкость является вязкой ньютоновской. В этом случае к системе линеаризованных уравнений Навье — Стокса (4), содержащей пять неизвестных (три компоненты скорости v_x, v_r, v_θ, давление p и плотность ρ_m), добавляются уравнение неразрывности $\partial\rho/\partial t + \rho_m \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ и замыкающее систему уравнение $\partial p/\partial\rho = a_*^2$. В работе [1] после ряда преобразований получено линеаризованное волновое уравнение

$$\frac{1}{a_*^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial^2 t} = \nabla^2\Big(p + \frac{4\bar{\mu}}{3\rho_m a_*^2}\,\frac{\partial p}{\partial t}\Big), \tag{9}$$

решение которого имеет вид

$$p = (p_0 J_n(\lambda r) + c_0 Y_n(\lambda r))\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

где $\lambda = \sqrt{\omega^2/[a_*^2(1 + 4i\bar{\mu}\omega/(3\rho_m a_*^2))] - k^2}$; J_n, Y_n — функции Бесселя первого и второго рода порядка n соответственно; n — число волн вдоль окружности; $k = m\pi/L$ — волновое число; m — количество продольных волн в оболочке; ω — циклическая частота волны; $\bar{\mu}$ — динамическая вязкость; ρ_m — плотность жидкости в невозмущенном состоянии; a_* — скорость распространения малых возмущений в жидкости; p_0, c_0 — постоянные.

Полагая функцию p ограниченной при $r = 0$, находим $c_0 = 0$, тогда

$$p = p_0 J_n(\lambda r)\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}\,. \tag{10}$$

Из (7) для нахождения φ получаем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{3\rho_m}{4\bar{\mu}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p_0 J_n(\lambda r)\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}\,. \tag{11}$$

Решение однородного уравнения (11) имеет вид

$$\varphi = C_1 I_n(\tilde{k}r) + C_2 K_n(\tilde{k}r),$$

где $\tilde{k} = \sqrt{k^2 + 3i\omega\rho_m/(4\bar{\mu})}$; $I_n(\tilde{k}r)$, $K_n(\tilde{k}r)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка n соответственно; C_1, C_2 — постоянные. С помощью метода вариации постоянных решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\varphi(r) = p_0 f(r) + \mu_1 \dot{I}_n(\tilde{k}r),$$

где

$$f(r) = -\dot{I}_n(\tilde{k}r)\int\limits_r^R \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi) K_n(\tilde{k}\xi)\,d\xi + K_n(\tilde{k}r)\int\limits_0^r \Delta^{-1}(\xi) J_n(\lambda\xi)\dot{I}_n(\tilde{k}\xi)\,d\xi,$$

$$\Delta(r) = \dot{I}_n(\tilde{k}r)K_n'(\tilde{k}r) - \dot{I}_n'(\tilde{k}r)K_n(\tilde{k}r).$$

Уравнение для компонент вектора $\boldsymbol{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ имеет вид

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \frac{\rho_m}{\bar{\mu}}\,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t},$$

или

$$\psi_i''(r) + \frac{1}{r}\,\psi_i'(r) - \Big(k^2 + \frac{i\omega\rho_m}{\bar{\mu}} + \frac{n^2}{r^2}\Big)\psi_i(r) = 0. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$\psi_i = \mu_2 J_n(qr), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Здесь $q = \sqrt{k^2 + i\omega/\bar{\mu}}$.

Используя (4), (9), (10), получаем выражения для компонент вектора скорости

$$v_x = \Big(- \frac{k\omega}{\rho_m a_*^2}\, p_0 f(r) + ikJ_n(kr)\mu_1 + (inJ_n(qr) - qJ_n'(qr))\mu_2 \Big)\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

$$v_\theta = \Big(- \frac{n\omega}{\rho_m a_*^2}\, p_0 f(r) + inJ_n(kr)\mu_1 + i\Big(k - \frac{n}{R}\Big) J_n(qr)\mu_2 \Big)\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

$$v_r = \Big(\frac{i\omega}{\rho_m a_*^2}\, p_0 f'(r) + kJ_n'(kr)\mu_1 + (qJ_n'(qr) - ikJ_n(qr))\mu_2 \Big)\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}.$$

С помощью формулы для силы вязкости [1] находим

$$\begin{aligned}
\sigma_{rx} &= \bar{\mu}\Big[- \frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2}\, f'(r) p_0 + 2ikJ_n'(kr)\mu_1 + \\
&\qquad + \Big(- k\Big(k - \frac{n}{R}\Big) J_n(qr) + \frac{in}{R}\, J_n'(qr) - J_n''(qr) \Big)\mu_2 \Big]\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \\
\sigma_{r\theta} &= \bar{\mu}\Big[- \frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2}\, f'(r) p_0 + \frac{2in}{R}\, J_n'(kr)\mu_1 + \\
&\qquad + \Big(i\Big(k - \frac{n}{R}\Big) J_n(qr) - ikJ_n'(qr) + J_n''(qr) \Big)\mu_2 \Big]\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\sigma_{rr} = p_0 J_n(\lambda r)\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}.$$

Используя контактные условия (3) и выражения (14), получаем компоненты q_x, q_y, q_{z1} силы, действующей со стороны вязкой жидкости на оболочку:

$$\begin{aligned}
q_x &= \bar{\mu}\Big[- \frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2}\, f'(R) p_0 + 2ikJ_n'(kR)\mu_1 + \\
&\qquad + \Big(- k\Big(k - \frac{n}{R}\Big) J_n(qR) + \frac{in}{R}\, J_n'(qR) - J_n''(qR) \Big)\mu_2 \Big]\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},
\end{aligned}$$

$$q_{z1} = p_0 J_n(\lambda R)\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

$$\begin{aligned}
q_y &= \bar{\mu}\Big[- \frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2}\, f'(R) p_0 + \frac{2in}{R}\, J_n'(kR)\mu_1 + \\
&\qquad + \Big(i\Big(k - \frac{n}{R}\Big) J_n(qR) - ikJ_n'(qR) + J_n''(qR) \Big)\mu_2 \Big]\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}.
\end{aligned}$$

Смещение точек оболочки будем искать в виде

$$u = u_{0kn}\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad v = v_{0kn}\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad w = w_{0kn}\, \mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \tag{15}$$

Здесь u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn} — неизвестные постоянные.

Контактные условия (2) приводят к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных p_0, μ_1, μ_2, u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}. Эта система позволяет выразить постоянные p_0, μ_1, μ_2 через постоянные u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}. В результате получаем

$$q_x = \bar{\mu} i\omega \Delta^{-1}\Big[\Big(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R)\Delta_{11} + 2ikJ_n'(kR)\Delta_{12} + \\ + \Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) + \frac{in}{R}J_n'(qR) - J_n''(qR)\Big)\Delta_{13}\Big)u_{0kn} + \\ + \Big(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R)\,\Delta_{21} + 2ikJ_n'(kR)\,\Delta_{22} + \\ + \Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) + \frac{in}{R}J_n'(qR) - J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{23}\Big)v_{0kn} + \\ + \Big(-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2} f'(R)\,\Delta_{31} + 2ikJ_n'(kR)\,\Delta_{32} + \\ + \Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) + \frac{in}{R}J_n'(qR) - J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{33}\Big)w_{0kn}\Big]\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

$$q_\theta = \bar{\mu} i\omega \Delta^{-1}\Big[\Big(-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R)\,\Delta_{11} + \frac{2in}{R}J_n'(kR)\,\Delta_{12} + \\ + \Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) - ikJ_n'(qR) + J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{13}\Big)u_{0kn} + \\ + \Big(-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R)\,\Delta_{21} + \frac{2in}{R}J_n'(kR)\,\Delta_{22} + \\ + \Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) - ikJ_n'(qR) + J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{23}\Big)v_{0kn} + \\ + \Big(-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2} f'(R)\,\Delta_{31} + \frac{2in}{R}J_n'(kR)\,\Delta_{32} + \\ + \Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) - ikJ_n'(qR) + J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{33}\Big)w_{0kn}\Big]\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

$$q_{z1} = J_n(\lambda R) i\omega\,\Delta^{-1}(\Delta_{11}u_{0kn} + \Delta_{21}v_{0kn} + \Delta_{31}w_{0kn})\,\mathrm{e}^{i(kx+n\theta+\omega t)},$$

где Δ — главный определитель; Δ_{sp} $(s, p = 1, 2, 3)$ — вспомогательные определители системы [6].

Вычислим работу действующей со стороны вязкой жидкости на оболочку силы, совершаемую при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное:

$$A_0 = \frac{2\bar{\mu} i\omega\Delta^{-1}}{nk}\,(\mathrm{e}^{ikl}-1)(\mathrm{e}^{\pi ni/2}-1)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\times \\ \times\Big\{\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_0 a_*^2} f'(R)\Delta_{11} + 2ikJ_n'(kR)\Delta_{12} + \\ + \Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR) + \frac{in}{R}J_n'(qR) - J_n''(qR)\Big)\Delta_{13}\Big]u_{0kn}^2 +$$

$$+\Big[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2}\,f'(R)\Delta_{21}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{22}+$$

$$+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{23}\Big]v_{0kn}^2+J_n(\lambda R)\bar{\mu}^{-1}\Delta_{31}w_{0kn}^2+$$

$$+\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2}\,f'(R)\,\Delta_{21}+2ikJ_n'(kR)\,\Delta_{22}+$$

$$+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{23}-$$

$$-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2}\,f'(R)\,\Delta_{11}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\,\Delta_{12}+$$

$$+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{13}\Big]u_{0kn}v_{0kn}+$$

$$+\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_m a_*^2}\,f'(R)\,\Delta_{31}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{32}+$$

$$+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\,\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar{\mu}^{-1}\,\Delta_{31}\Big]u_{0kn}w_{0kn}+$$

$$+\Big[-\frac{2n\omega}{R\rho_m a_*^2}\,f'(R)\Delta_{31}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{32}+$$

$$+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar{\mu}^{-1}\Delta_{21}\Big]\Big\}v_{0kn}w_{0kn}+$$

$$+\frac{1}{nk}\,(\tilde{q}_0+\tilde{q}_1\,\mathrm{e}^{i\omega_*t})(\mathrm{e}^{ikl}-1)(\mathrm{e}^{\pi ni/2}-1)w_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,.$$

Приведем решение задачи в первом приближении. Подставим аппроксимации (15) в выражение для функционала П. После интегрирования по x, y, t с учетом того, что $x_1=0$, $x_2=l$, $y_1=0$, $y_2=2\pi$, $t'=0$, $t''=\pi/\omega$, получаем функцию W, зависящую от искомых величин u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}. Стационарное значение полученной функции определяется нелинейной системой уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial u_{0kn}}=0,\qquad \frac{\partial W}{\partial v_{0kn}}=0,\qquad \frac{\partial W}{\partial w_{0kn}}=0,$$

или

$$\Big\{\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_0 a_*^2}\,f'(R)\Delta_{11}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{12}+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+$$

$$+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\Delta_{13}\Big]-\omega^2\Big(\rho_0 h\,\frac{\pi L}{2}+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i F_i\sin^2 m\theta_i\Big)-$$

$$-\Big(\frac{hRL\pi k^2B_{11}}{2}+\frac{hm^2\pi LB_{66}}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}E_iF_ik^2\sin^2 m\theta_i\Big)\Big\}u_{0kn}+$$

$$
\begin{gathered}
+\Big[-\frac{2k\omega}{\rho a_*^2}\,f'(R)\Delta_{21}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{22}+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\Delta_{23}-\\
-\frac{2n\omega}{R\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{11}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{12}+\\
+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{13}\Big]v_{0kn}+\\
+\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{31}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{32}+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\\
+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar\mu^{-1}\Delta_{31}+\frac{hRk^2\pi LB_{11}}{4}\Big]w_{0kn}=0,\\
\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{21}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{22}+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\\
+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\Delta_{23}-\frac{2n\omega}{R\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{11}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{12}+\\
+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{13}\Big]u_{0kn}+\\
+\Big[-\frac{2n\omega}{R\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{21}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{22}+\\
+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{23}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,k^2\cos^2m\theta_i-\\
-\omega^2\Big(\rho_0h\,\frac{\pi L}{2}+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\cos^2m\theta_i+L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\rho_iJ_{\text{кр}\,i}\cos^2m\theta_i}{R^2}\Big)\Big]v_{0kn}+\\
+\Big[-\frac{2n\omega}{R\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{31}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{32}-\qquad\qquad(16)\\
-\omega^2L\sum_{i=1}^{k_1}\frac{m\rho_iJ_{\text{кр}\,i}\cos^2m\theta_i}{R^2}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,k^2m\cos^2m\theta_i+\\
+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar\mu^{-1}\Delta_{21}\Big]w_{0kn}=\\
=\frac{hR}{2}\,\frac{B_{22}\pi m^2}{R^2}\,L+\frac{hR}{2}\,B_{66}k^2\pi L+\sum_{i=1}^{k_1}E_iJ_{zi}k^4\cos^2m\theta_i,\\
\Big[-\frac{2k\omega}{\rho_0a_*^2}\,f'(R)\Delta_{31}+2ikJ_n'(kR)\Delta_{32}-\frac{hRk^2\pi LB_{11}}{4}+\\
+\Big(-k\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)+\frac{in}{R}\,J_n'(qR)-J_n''(qR)\Big)\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar\mu^{-1}\Delta_{31}\Big]u_{0kn}+
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[-\frac{2n\omega}{R\rho_0 a_*^2}\,f'(R)\Delta_{31}+\frac{2in}{R}\,J_n'(kR)\Delta_{32}-\omega^2 L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2 m\theta_i}{R^2}\,m-\\
&\qquad-\Big(\frac{hm\pi L(B_{12}+B_{22})}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,mk^2\cos^2 m\theta_i\Big)+\\
&\qquad+\Big(i\Big(k-\frac{n}{R}\Big)J_n(qR)-ikJ_n'(qR)+J_n''(qR)\Big)\Delta_{33}+J_n(\lambda R)\bar\mu^{-1}\Delta_{21}\Big]v_{0kn}+\\
&+\Big[-2J_n(\lambda R)\bar\mu^{-1}\Delta_{31}+\pi\tilde q_0\Big(1+\frac{\tilde q_1}{\tilde q_0}\sin\omega_1 t\Big)-\\
&\qquad-\omega^2\Big(\frac{\rho_0 h\pi L}{R^2}+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_iF_i\sin^2 m\theta_i+L\sum_{i=1}^{k_1}\rho_i\,\frac{J_{\text{кр}\,i}\cos^2 m\theta_i m^2}{R^2}\Big)\Big]w_{0kn}-\\
&\qquad-\Big(\frac{9k^4\pi LB_{11}}{32}+\frac{9m^4\pi LB_{22}}{32}+\frac{\pi m^2k^2L(B_{12}+2B_{66})}{16R^2}\Big)w_{0kn}^3=\\
&=\frac{h\pi L(B_{11}+2B_{12}+B_{22})}{2R}+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}E_iI_{yi}k^4\sin^2 m\theta_i+\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{k_1}\frac{G_iJ_{\text{кр}\,i}}{R^2}\,m^2k^2\cos^2 m\theta_i,
\end{aligned}
$$

где F_i, I_{zi}, I_{yi}, $J_{\text{кр}\,i}$ — площадь поперечного сечения i-го продольного ребра и моменты инерции относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; $\tilde E_i$, $\tilde G_i$ — модули упругости и сдвига материала i-го продольного ребра; B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66} — основные модули упругости ортотропного материала оболочки:

$$
B_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2},\quad B_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2},\quad B_{12}=\frac{\nu_2E_1}{1-\nu_1\nu_2}=\frac{\nu_1E_2}{1-\nu_1\nu_2},\quad B_{66}=G_{12}=G,
$$

E_1, E_2 — модули упругости ортотропного материала; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона ортотропного материала; ρ_0, ρ_i — плотность материала оболочки и продольного ребра соответственно; h — толщина оболочки.

Следует отметить, что аналогичную задачу можно решить в случае, когда в решение (13) входят различные постоянные (обозначим их μ_2, μ_3, μ_4). В этом случае контактные условия (2) приводят к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных p_0, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}. Из этой системы можно выразить постоянные p_0, μ_1, μ_2 через постоянные u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}, μ_3, μ_4. Тогда вместо функционала Π получаем функцию W, зависящую от искомых величин u_{0kn}, v_{0kn}, w_{0kn}, μ_3, μ_4. Стационарное значение полученной функции определяется следующей нелинейной системой уравнений:

$$
\frac{\partial W}{\partial u_{0kn}}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial v_{0kn}}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial w_{0kn}}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial \mu_3}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial \mu_4}=0.
$$

Система (16) решена методом Ньютона при следующих исходных данных: $R=0{,}16$ м, $h=0{,}000\,45$ м, $l=0{,}8$ м, $\rho_0=\rho_i=7800$ кг/м^3, $\tilde E_i=6{,}67\cdot 10^9$ Па, $\nu_1=0{,}11$, $\nu_2=0{,}19$, $|h_i|=0{,}013\,75R$, $k_1=10$, $m=8$, $F_i/(2\pi Rh)=0{,}015\,91$, $J_{yi}/(2\pi R^3h)=0{,}8289\cdot 10^{-6}$, $J_{zi}/(2\pi R^3h)=0{,}13\cdot 10^{-6}$, $J_{kpi}/(2\pi R^3h)=0{,}5305\cdot 10^{-6}$, $\tilde q_0/E_1=0{,}002$, $\tilde q_1/\tilde q_0=0{,}3$, $\bar\mu=0{,}355$.

На рис. 2 приведена зависимость отношения нелинейной частоты к линейной от прогиба подкрепленной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, в случае параметрических колебаний при различных значениях отношения E_1/E_2 материала оболочки. Видно, что при фиксированном значении прогиба оболочки с увеличением отношения E_1/E_2 нелинейная частота колебаний рассматриваемой системы увеличивается. На рис. 3 представлена зависимость отношения нелинейной частоты к линейной от количества продольных

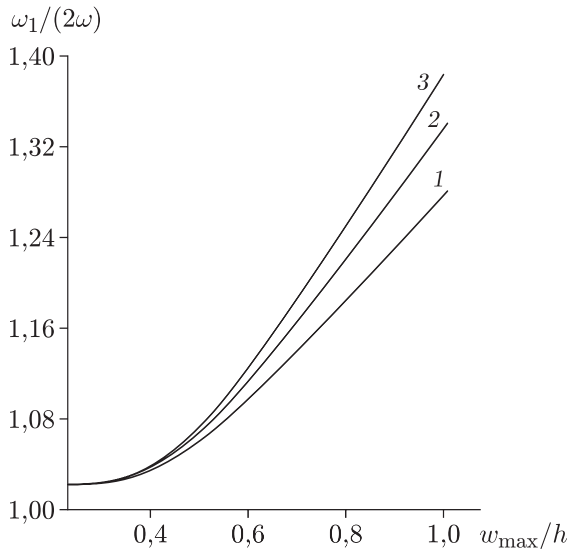

Рис. 2. Зависимость частоты колебаний от прогиба оболочки при $k_1 = 10$ и различных значениях E_1/E_2:
1 — $E_1/E_2 = 0{,}75$, *2* — $E_1/E_2 = 1{,}00$, *3* — $E_1/E_2 = 1{,}25$

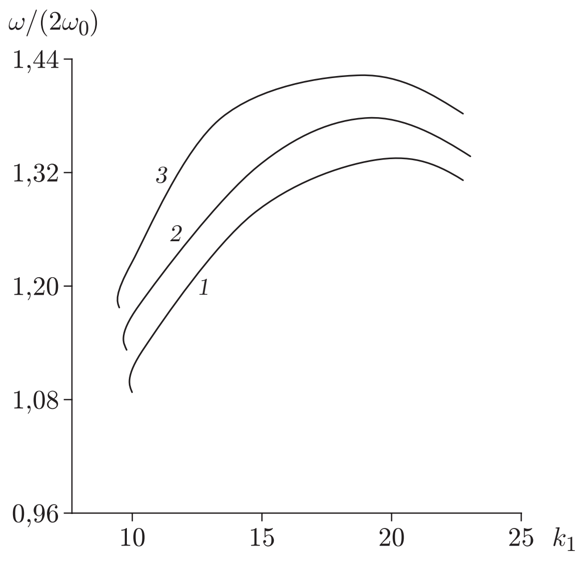

Рис. 3. Зависимость частоты колебаний от количества продольных ребер при $w_{\max}/h = 0{,}6$ и различных значениях E_1/E_2:
1 — $E_1/E_2 = 0{,}75$, *2* — $E_1/E_2 = 1{,}00$, *3* — $E_1/E_2 = 1{,}25$

ребер. Видно, что с увеличением количества продольных ребер нелинейные частоты колебаний сначала увеличиваются, а затем, достигая максимума, начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что с увеличением количества продольных ребер сначала жесткость системы увеличивается, а затем силы инерции превышают силы упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задача гидроупругости. М.: Наука, 1979.
2. **Chueshov I., Ryzhkova I.** Unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic shell modeled by full von Karman equations // J. Different. Equat. 2013. V. 254. P. 1833–1862.
3. **Amabili M.** Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells with imperfections // J. Sound Vibrat. 2003. V. 262. P. 921–975.
4. **del Prado Z., Conclaves P. B., Païdoussis M. P.** Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid // Intern. J. Mech. Sci. 2010. V. 52. P. 1437–1457.
5. **Latifov F. S., Iskanderov R. A., Alimamedov R. G.** Parametrik oscillations of alaterally strengthened, orthotropic, damaged, viscouz fluid-filled shell // Intern. J. Tech. Phys. Problems Engng. 2015. V. 7, N 4. P. 70–74.
6. **Латифов Ф. С., Мехтиев М. А.** Нелинейные параметрические колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с заполнителем // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 4. С. 195–203.
7. **Блинков Ю. А., Иванов С. В., Могилевич Л. И.** Моделирование волн деформаций в физически нелинейной оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость // Тр. Моск. авиац. ин-та. 2013. Т. 69. С. 141–149.
8. **Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалева И. А., Могилевич Л. И.** Волны деформаций в физически нелинейных упругих каналах, заполненных вязкой жидкостью, с круговым и кольцевым сечением // Нелинейные колебания механических систем: Тр. 9-й Всерос. науч. конф. им. Ю. И. Неймарка, Нижний Новгород, 24–29 сент. 2012 г. Б. м., 2012. С. 141–150.
9. **Блинков Ю. А., Иванов С. В., Могилевич Л. И.** Математическое и компьютерное моделирование нелинейных волн деформаций в оболочке, содержащей вязкую жидкость // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Математика. Информатика. Физика. 2012. № 3. С. 52–60.
10. **Иванов С. В.** Моделирование волн деформаций в геометрически и физически нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2012. № 4. С. 22–28.
11. **Иванов С. В.** Моделирование взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с физически и геометрически нелинейной упругой стенкой трубы кругового сечения при воздействии волны деформации // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2012. № 14. С. 110–112.
12. **Иванов С. В., Могилевич Л. И., Попов В. С.** Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2011. № 4. С. 13–19.
13. **Иванов С. В., Могилевич Л. И., Попов В. С.** Колебания и волны в упругой цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-25): Сб. тр. 25-й Междунар. науч. конф. Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012. Т. 3. С. 6–9.
14. **Ковалева И. А.** Динамика нелинейных волн в соосных упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Математические методы в технике и технологиях (МММТ-26): Сб. тр. 26-й Междунар. науч. конф. Саратов: Б. и., 2013. Т. 2. С. 58–61.

15. **Ковалева И. А.** Моделирование динамики нелинейных волн в соосных физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2012. Т. 4, № 1. С. 28–36.
16. **Ковалева И. А., Кузнецова Е. Л., Могилевич Л. И.** Моделирование нелинейных волн деформации в трех упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Проблемы управления, обработки и передачи информации (АТМ-2013): Сб. тр. 3-й Междунар. науч. конф. Издат. дом “Райт-Экспо”, 2013. Т. 2. С. 153–159.
17. **Ковалева И. А., Могилевич Л. И.** Нелинейные волны в соосных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Магистраль: Межвуз. сб. науч. ст. 2011. № 3. С. 11–19.
18. **Амиро И. Я.** Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. Киев: Наук. думка, 1980.

Поступила в редакцию 10/VIII 2020 г.,
после доработки — 13/XI 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.