

УДК 532.526

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ

А. О. Бекетаева, А. Ж. Найманова

Институт математики Министерства образования и науки Республики Казахстан,
480100 Алматы

С использованием уравнений Навье — Стокса численно моделируется плоское сверхзвуковое течение при наличии симметричного перпендикулярного вдува струй через щели на стенках. Исследовано влияние нерасчетности и числа Маха струи на структуру течения. Получены зависимости угла наклона ударной волны и длины отрывной зоны от нерасчетности. Выявлено влияние нерасчетности на увеличение подъемной силы, возникающей при взаимодействии потока с вдуваемой струей.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, вдув струй, уравнения Навье — Стокса.

Введение. При истечении поперечной струи в сверхзвуковой поток на поверхности летательного аппарата возникает подъемная сила, действующая по нормали к поверхности. Использование этой силы с целью управления привлекательно вследствие эффективности и быстрого действия на любой высоте полета летательного аппарата. Из физических соображений следует, что сила взаимодействия зависит от параметров вдуваемой струи.

Обтекание струй и препятствий достаточно хорошо исследовано экспериментально [1–4]. Среди теоретических исследований известны работы, в которых численно моделируется поперечный вдув водорода в канале ПВД [5–7]. Однако в этих работах в основном производятся тестовые расчеты и практически отсутствует численное исследование влияния таких важных с практической точки зрения параметров, как число Маха, ширина щели, нерасчетность, на структуру течения. Это обусловлено сложным характером течения в области вдува: области отрыва возникают как перед струей, так и за ней. В этом случае необходимо использовать полные уравнения Навье — Стокса.

В данной работе рассматривается плоское сверхзвуковое течение с перпендикулярным вдувом струй из щелей, расположенных симметрично на нижней и верхней стенках канала. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки. Схема течения показана на рис. 1.

Постановка задачи. Исходной является система двумерных уравнений Навье — Стокса для турбулентного течения сжимаемого газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{U}, U_x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{U}, U_z)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_1(\mathbf{U}, U_x)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{W}_2(\mathbf{U}, U_z)}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + P)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \end{bmatrix},$$

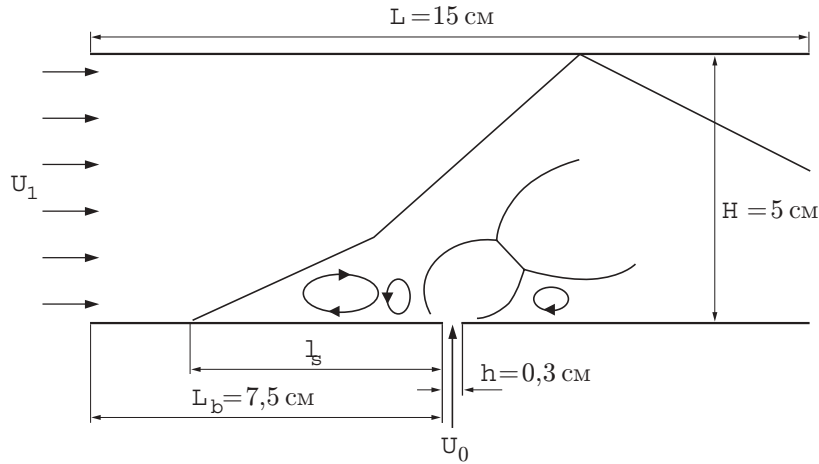


Рис. 1. Схема течения

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu_t \frac{\partial w}{\partial x} \\ \mu_t w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu_t u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \\ \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu_t w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu_t u \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_t \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu_t u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu_t w \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{4}{3} \mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \\ \mu_t u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4}{3} \mu_t w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu_t}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$P = (\gamma - 1) \left(E_t - \rho \frac{u^2 + w^2}{2} \right), \quad T = \frac{1}{\rho c_v} \left(E_t - \rho \frac{u^2 + w^2}{2} \right), \quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1) M_\infty^2}.$$

Здесь u, w — компоненты скорости потока в продольном и поперечном направлениях; ρ — плотность; P — давление; T — температура; E — энергия; c_v — теплоемкость при постоянном объеме; γ — показатель адиабаты; M_0, M_∞ — числа Маха струи и потока; μ_t — коэффициент турбулентной вязкости; Re — число Рейнольдса; Pr — число Прандтля; индекс “ ∞ ” относится к значениям параметров потока, индекс 0 — к значениям параметров струи.

Исходная система уравнений (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе ($u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$), давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является ширина щели.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина — Ломакса [8].

Граничные условия имеют следующий вид:

на входе ($x = 0, 0 \leq z \leq H$)

$$u = 1, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1;$$

на нижней стенке ($z = 0, 0 < x \leq L$)

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

на щели ($z = 0, L_b \leq x \leq L_b + h$)

$$u = 0, \quad T = 0,6, \quad w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty, \quad P_0 = nP_\infty$$

(здесь $n = P_0/P_\infty$ — степень нерасчетности; P_0 — давление в струе; P_∞ — давление потока);

во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, профиль продольной скорости аппроксимируется степенным законом [9];

на верхней границе ($z = H, 0 < x \leq L$) — условие симметрии

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

на выходе задается условие неотражения [10].

Метод решения. Для более точного учета течения в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели, т. е. в областях больших градиентов, вводится сгущение сетки в продольном и поперечном направлениях с помощью преобразований

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(z). \quad (2)$$

При этом уравнения (1) в обобщенных координатах запишутся в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial \eta}, \quad (3)$$

где $\tilde{U} = J^{-1}U$, $\tilde{E} = \xi_x J^{-1}E$, $\tilde{F} = \eta_z J^{-1}F$, $\tilde{V}_1 = \xi_x J^{-1}V_1$, $\tilde{V}_2 = \xi_x J^{-1}V_2$, $\tilde{W}_1 = \eta_z J^{-1}W_1$, $\tilde{W}_2 = \eta_z J^{-1}W_2$, $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$ — якобиан преобразования.

Далее для удобства записи знак “ \sim ” опускается.

Линеаризованная относительно вектора U система (3) решается методом Бима — Уорминга:

$$U^{n+1} + \Delta t \left(\frac{\partial E^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial F^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial V_1^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial V_2^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial W_1^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial W_2^{n+1}}{\partial \eta} \right) = U^n + O(\Delta t^2), \quad (4)$$

где

$$E^{n+1} \approx A^n U^{n+1}, \quad F^{n+1} \approx B^n U^{n+1}; \quad (5)$$

$A = \partial E / \partial U$, $B = \partial F / \partial U$ — матрицы Якоби [12].

Члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух векторов:

$$V_1^{n+1} = V_{11}^{n+1} + V_{12}^n, \quad W_2^{n+1} = W_{21}^{n+1} + W_{22}^n, \quad (6)$$

где

$$V_{11}^{n+1} = \frac{\mu_t \xi_x}{\text{Re } J} \left[0, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

$$W_{21}^{n+1} = \frac{\mu_t \eta_z}{\text{Re } J} \left[0, \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

а векторы V_{12}^n и W_{22}^n содержат оставшиеся диссипативные функции вида

$$V_{12}^n = \frac{\xi_x^2}{\text{Re } J} \left[0, 0, 0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]^n \right]^T,$$

$$\mathbf{W}_{22}^n = \frac{\eta_z^2}{\text{Re } J} \left[0, 0, 0, \left[\left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^n \right]^T.$$

Для векторов потоков со смешанными производными используем аппроксимацию по явной схеме при равномерном шаге по времени:

$$\mathbf{V}_2^{n+1} = 2\mathbf{V}_2^n - \mathbf{V}_2^{n-1} + O(\Delta t^2), \quad \mathbf{W}_1^{n+1} = 2\mathbf{W}_1^n - \mathbf{W}_1^{n-1} + O(\Delta t^2). \quad (7)$$

С учетом (5)–(7) система (4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A^n}{\partial \xi} + \frac{\partial B^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{\text{Re } J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathbf{U}_1^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{\text{Re } J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\mathbf{U}_1^n} \right) \right\} \right] \mathbf{U}^{n+1} = \\ & = \mathbf{U}^n + \Delta t \left[2 \left(\frac{\partial \mathbf{V}_2^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{W}_1^n}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{V}_2^{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{W}_1^{n-1}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \mathbf{V}_{12}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{W}_{22}^n}{\partial \eta} \right] + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя факторизацию к (8), получаем два одномерных оператора, решение которых производится матричной прогонкой:

$$\begin{aligned} \text{1-й шаг:} \quad & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial A^n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mu_t \xi_x^2}{\text{Re } J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathbf{U}_1^n} \right) \right\} \right] \mathbf{U}^* = \mathbf{RHS}^n, \\ \text{2-й шаг:} \quad & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial B^n}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu_t \eta_z^2}{\text{Re } J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\mathbf{U}_1^n} \right) \right\} \right] \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^* \end{aligned} \quad (9)$$

(\mathbf{RHS}^n — правая часть уравнения (8)).

При аппроксимации производных в конвективных и диффузионных членах использованы центрально-разностные операторы со вторым порядком точности.

Анализ результатов. Параметры преобразования координат (2) имели следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \xi &= K + \frac{1}{\tau} \text{arsh} \left[\left(\frac{x}{x_c} - 1 \right) \text{sh} (\tau K) \right], \\ \eta &= H \left[(\beta + 1) - (\beta - 1) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1-z/a} \right] / \left[\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1-z/a} + 1 \right], \end{aligned}$$

где $K = \frac{1}{2\tau} \ln \frac{1 + (e^\tau - 1)x_c/L}{1 - (e^\tau - 1)x_c/L}$; β, τ — коэффициенты сгущения ($\beta > 1, \tau > 1$); a — высота расчетной области в обобщенных координатах; x_c — точка, относительно которой производится сгущение. Для подавления высокочастотных возмущений в решение (9) вводилось сглаживание второго порядка с малым коэффициентом ε при сглаживающих членах. Расчет производился на разнесенной сетке по пространственным координатам размером 101×61 .

Предварительно, для апробации численного метода, была решена тестовая задача: через щель шириной 0,0559 см производился перпендикулярный вдув газа с параметрами $M_0 = 1, T = 217 \text{ K}, P = 1,24 \text{ МПа}$ в поток воздуха $M_\infty = 2,9, T = 108 \text{ K}, P = 0,0663 \text{ МПа}$ в канале прямоугольного сечения. Высота канала 7,62 см, длина 15 см. Щель располагалась на расстоянии 10 см от входного сечения. Результаты численного эксперимента удовлетворительно соответствуют опытным данным и численным расчетам других авторов [5, 6].

На рис. 2–6 приводятся результаты численного расчета задачи с параметрами $M_\infty = 4, M_0 = 1, \text{Pr} = 0,9, \text{Re} = 10^4, \gamma = 1,4$.

Распределения изобар для двух значений параметра нерасчетности представлены на рис. 2. Видно, что вследствие торможения набегающего потока давление перед струей

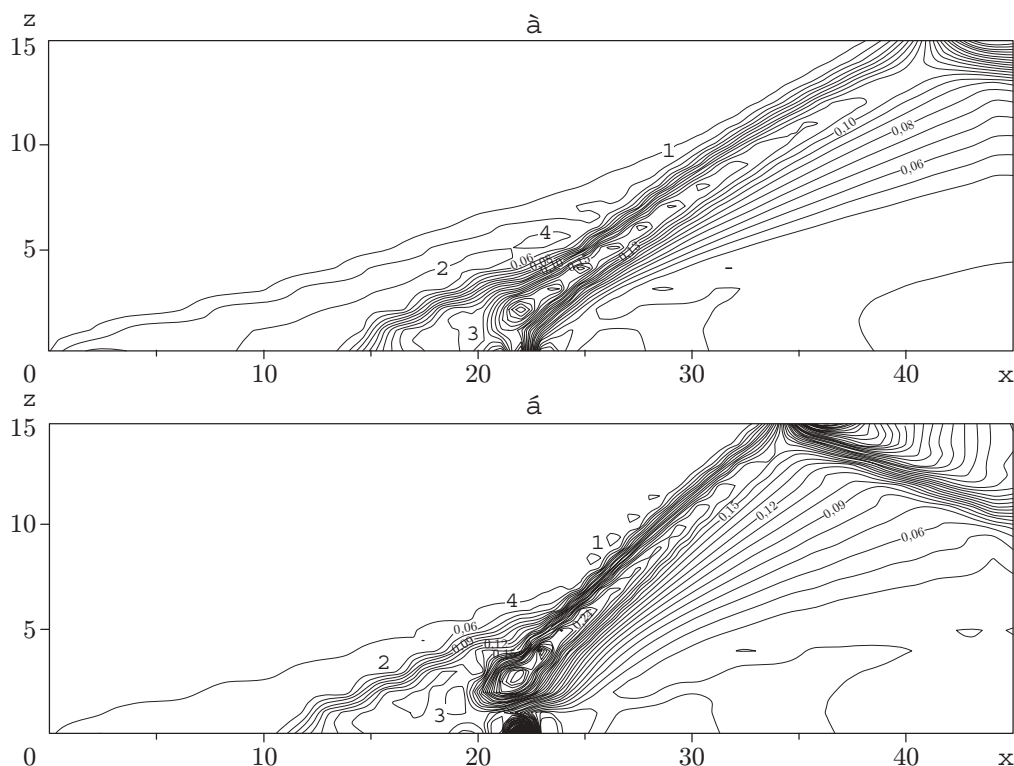


Рис. 2. Поле изобар:
 а — $n = 4$; б — $n = 10$

повышается и образуется головной скачок уплотнения (1 на рис. 2). От головного скачка уплотнения вверх по потоку отходит косой скачок уплотнения 2. За косым скачком уплотнения кроме отрывной области существует участок сверхзвуковой зоны; последующее торможение потока сопровождается появлением второго скачка — замыкающего скачка 3, параллельного оси струи. Из рис. 2 следует, что отошедший головной скачок, косой и замыкающий скачки уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют сложную λ -образную систему скачков уплотнения 4. Давление вдоль передней границы струи постоянно. Как следует из эксперимента [3], оно максимально в области, лежащей за тройной точкой, в частности за замыкающим скачком. Из распределений изобар видно, что максимум давления ($P_{\max} = 0,15$ на рис. 2,а и $P_{\max} = 0,24$ на рис. 2,б) находится за нижней частью замыкающего скачка уплотнения.

Анализ влияния нерасчетности на головной скачок уплотнения показывает, что угол его наклона возрастает с увеличением отношения давления за скачком и перед ним (ср. рис. 2,а и рис. 2,б). Влияние нерасчетности на угол наклона головного скачка уплотнения показано на рис. 3 (здесь $\alpha = \arctg(\max(w/u))$).

Поле вектора скорости для двух значений нерасчетности показано на рис. 4. В зоне, примыкающей к стенке, перед струей имеются два вихря, образовавшиеся в результате первичного и вторичного отрывов потока от стенки. Направления движения в них противоположные вследствие того, что часть потока воздуха непосредственно вблизи стенки, проходя участки скачков уплотнения, поворачивает вниз к стенке и проникает в зону отрывного течения, затем растекается в противоположных направлениях. При этом вихрь, расположенный ближе к струе, движется против часовой стрелки, а вихрь, отстоящий на большем расстоянии от нее, движется по часовой стрелке, что согласуется с результатами экспериментальных исследований [1]. На рис. 4 хорошо заметно также отклонение векто-

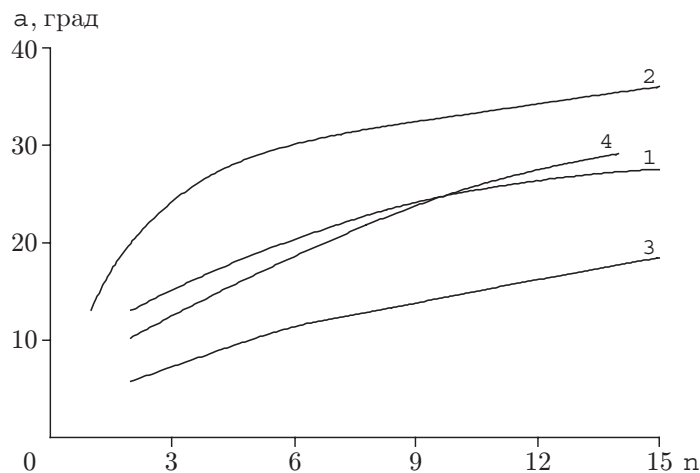


Рис. 3. Влияние нерасчетности на углы наклона головного скачка уплотнения (1, 2) и отраженного скачка (3, 4):

1 — $M_0 = 1$; 2 — $M_0 = 2$; 3 — $M_0 = 1$; 4 — $M_0 = 2$

ра скорости потока вверх из-за наличия косого и головного скачков уплотнения, причем из сравнения рис. 4,а и рис. 4,б следует, что с ростом параметра нерасчетности это отклонение увеличивается. Как видно из графиков, вихревая зона перед струей значительно превышает размеры отрывной области за ней. Очевидно, отрыв пограничного слоя перед струей обусловлен двумя факторами: наличием встречного градиента давления и взаимодействием головного скачка уплотнения с пограничным слоем. На отрывную область за струей в случае сверхзвуковых течений дополнительно оказывает влияние зона разрежения [5]. При нерасчетности $n = 10$ (рис. 4,б) отрывная область перед струей намного больше, чем при $n = 4$ (рис. 4,а), что также подтверждает влияние головного скачка уплотнения на формирование вихревой зоны.

Результаты численного анализа показывают, что схема обтекания струи эквивалентна схеме обтекания цилиндра диаметром, равным ширине щели, установленного на стенке под некоторым углом [4]. Это подобие было выявлено в экспериментальных исследованиях [2]. В экспериментах [1, 3] вместо замыкающего скачка наблюдался прямой скачок уплотнения. Это связано с тем, что эксперименты [1, 3] проводились с очень большими степенями нерасчетности ($n = 50 \div 200$).

Сила взаимодействия есть интеграл от произведения избыточного давления в области отрыва на элемент площади. Подъемная сила определяется из распределения давления на стенке по формуле $F = \int_{l_s} (P - P_\infty) dl_s$, где l_s — длина отрывной зоны. Из результатов расчетов следует, что $F = 2,88$ и $4,03$ при $n = 4$ и 10 соответственно, т. е. увеличение степени нерасчетности в 2,5 раза приводит к росту подъемной силы в 1,4 раза.

На рис. 5 зависимость длины отрывной зоны от нерасчетности сравнивается с опытными данными [1], при этом $M_\infty = 3$, $Pr = 0,9$, $Re = 1,87 \cdot 10^7$, $\gamma = 1,4$. Следует отметить, что эксперимент соответствовал пространственному случаю. Качественная картина для двумерного случая аналогична трехмерному, однако значения l_s больше, что объясняется отсутствием бокового растекания.

Структура течения вблизи струи показана на рис. 6, где представлено распределение местного числа Маха $M = \sqrt{u^2 + w^2} / c$ (здесь c — местная скорость звука). В случае $n = 10$ (рис. 6,б) струя, входя в поток со звуковой скоростью, на некотором расстоянии пе-

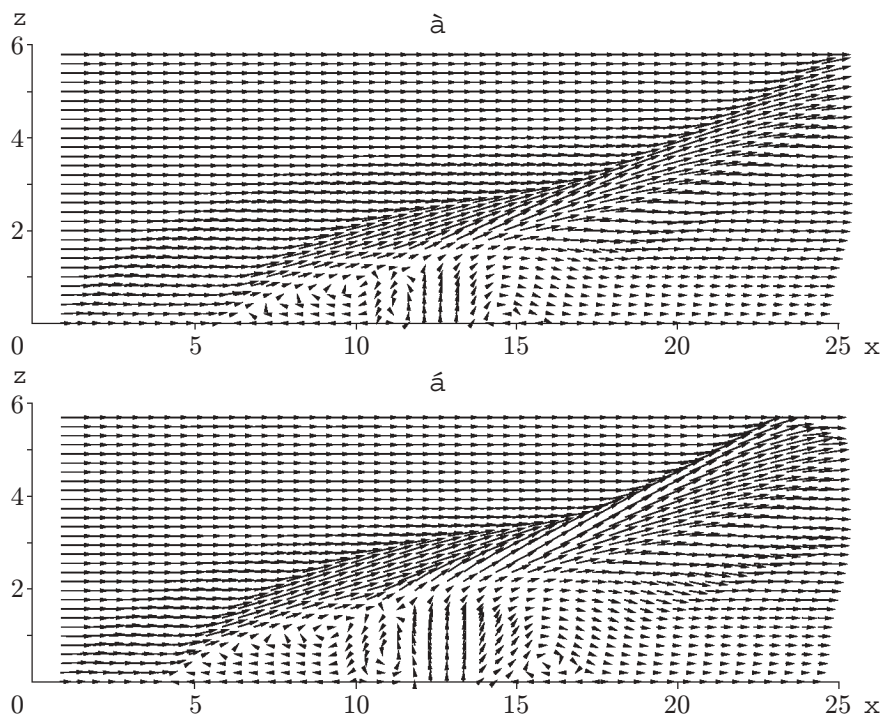


Рис. 4. Поле вектора скорости:
 а — $n = 4$; б — $n = 10$

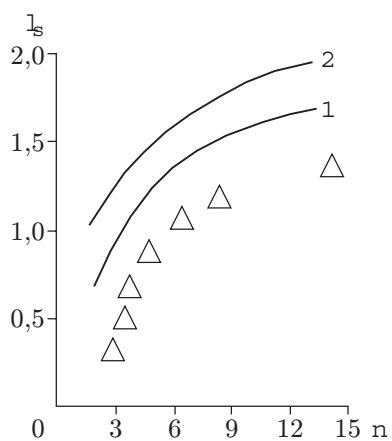


Рис. 5. Влияние нерасчетности на длину отрывной зоны при $M_\infty = 3$, $Pr = 0,9$, $Re = 1,87 \cdot 10^7$, $\gamma = 1,4$ и ширине щели 14 мм:
 1 — $M_0 = 1$; 2 — $M_0 = 1,5$; точки — эксперимент [1]

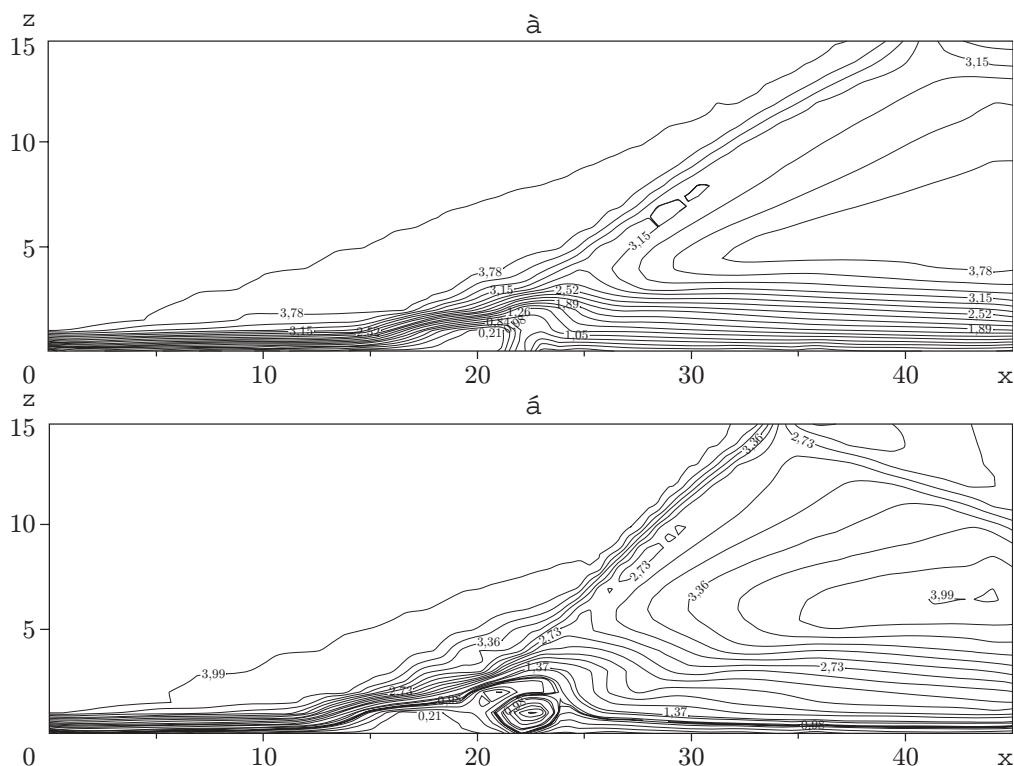


Рис. 6. Распределение местного числа Маха:
a — $n = 4$; *б* — $n = 10$

реходит в сверхзвуковую зону вследствие резкого ускорения струи непосредственно после вдува, при этом значение числа Маха увеличивается до 1,9. Затем граница образовавшейся сверхзвуковой зоны замыкается, очерчивая круг. По-видимому, этот круг соответствует бочке, которая является следствием взаимодействия системы скачков уплотнения, разделяющих сверхзвуковые и дозвуковые зоны в самой струе. Аналогичная бочка была получена в численных расчетах [7], верхней границе которой соответствует диск Маха. За бочкой течение замедляется и становится дозвуковым со значением числа Маха $M = 0,8$. В конечном итоге течение струи, ускоряясь, переходит в сверхзвуковую зону, а числа Маха увеличиваются до $M = 3$ и выше, что соответствует значению M в основном потоке. В зависимости от нерасчетности наблюдается заметное увеличение размеров круга. В частности, для меньшего значения $n = 4$ (рис. 6,*a*) поток не столь резко ускоряется и значение числа Маха внутри бочки увеличивается только до 1,2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С. 97–102.
2. Авдуевский В. С., Медведев К. И., Полянский М. Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 5. С. 193–197.
3. Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А. Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С. 99–102.

4. **Авдеевский В. С., Медведев К. И.** Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 25–33.
5. **Шунь Дж. Ш., Юнь С.** Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU-факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосм. техника. 1990. № 10. С. 102–113.
6. **Вайднер Э. Х., Драммонд Дж. Ф.** Расчетное исследование схемы вдува топлива в канал ПВРДсг с последовательным расположением щелей // Аэрокосм. техника. 1983. Т. 1, № 5. С. 103–111.
7. **Ramakrishnan R., Singh D. J.** Modeling scramjet combustor flowfields with a grid adaptation scheme // AIAA J. 1994. V. 32, N 5. P. 930–935.
8. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. С. 544–574.
10. **Thompson K. W.** Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Computational Phys. 1987. N 68. P. 1–24.
11. **Бим Р. М., Уорминг Р. Ф.** Неявная факторизованная разностная схема для уравнений Навье — Стокса течения сжимаемого газа // Ракет. техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 4. С. 145–156.
12. **Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 12.
13. **Шифф Л. Б., Стегер Дж. Л.** Численный расчет стационарных сверхзвуковых вязких течений // Ракет. техника и космонавтика. 1980. Т. 18, № 12. С. 16–29.

*Поступила в редакцию 3/IV 2003 г.,
в окончательном варианте — 8/IX 2003 г.*
