

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Г. В. Степанова

Одномерная задача об отражении нестационарной плоской ударной волны от жесткой стенки для малых интервалов времени методом линеаризации решена в работе [1]. За отраженным фронтом распределение скорости оказывается не зависящим от времени ($\partial u/\partial t=0$), а распределение давления не зависящим от координаты ($\partial p/\partial x=0$).

В настоящей работе в предположении $\partial p/\partial x=0$ (на стенке это соотношение является следствием граничного условия $u=0$ и уравнений газовой динамики) определены давление и скорость газа из уравнений газовой динамики в виде простых конечных формул, при линеаризации совпадающих с решением [1]. Проведенное численное решение задачи об отражении плоской сильной ударной волны точечного взрыва [2] от стенки по схеме [3] позволяет оценить погрешность полученных соотношений и подтверждает характер зависимости скорости от времени. Указанные соотношения для больших интервалов времени справедливы в непосредственной окрестности стенки. Для инженерных расчетов особый интерес представляет получающаяся отсюда формула для определения давления на стенке.

С использованием полученных результатов, аналогично [4], определяется координата фронта отраженной ударной волны в виде отрезка ряда Тейлора, что также хорошо согласуется с численным решением.

Уравнения газовой динамики для совершенного газа

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x &= 0; \\ 1/\rho \cdot \partial p / \partial x + \partial u / \partial t + u (\partial u / \partial x) &= 0; \\ \partial p / \partial t + u (\partial p / \partial x) + \gamma p (\partial u / \partial x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

записаны в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} p &= p^*/p_\infty, \quad \rho = \rho^*/\rho_\infty, \quad u = \sqrt{\rho_\infty/p_\infty} u^*, \\ x &= x^*/r_0, \quad t = t^* \sqrt{p_\infty/\rho_\infty}/r_0. \end{aligned}$$

Здесь p_∞ , ρ_∞ — давление и плотность невозмущенного потока, r_0 — радиус эквивалентного по энергии тротилового заряда, а звездочка соответствует размерным величинам.

Исследуем область за фронтом отраженной волны. В предположении

$$\partial p / \partial x = 0 \quad (2)$$

с учетом граничного условия на стенке

$$x = L, \quad u = 0 \quad (3)$$

из второго уравнения системы (1) получаем соотношение

$$\ddot{u}(x, t) = -(x-L)/(t-T_a), \quad (4)$$

а из третьего уравнения —

$$\ddot{p}(t) = p^0 [(t_0 - T_a)/(t - T_a)]^2. \quad (5)$$

Здесь p^0 — давление на стенке в момент отражения t_0 , T_a — константа (см. ниже).

Из второго уравнения (1) с учетом граничных условий (3) следует $(\partial p/\partial x)_L = 0$. Таким образом, в непосредственной окрестности стенки соотношение (2) с достаточной точностью выполняется во все время отражения. Рис. 1—4 показывают, что в непосредственной окрестности стенки формулы (4), (5) дают распределение скоростей и давления (в частности, давление на стенке p_L) для больших интервалов времени после отражения

$$u_2 = \tilde{u}(x, t), \quad (6)$$

$$p_2 = \tilde{p}(t). \quad (6a)$$

Здесь и далее индекс 1 относится к величинам перед отраженной волной, индекс 2 — за волной.

Из численного решения (см. рис. 1, 2) видно, что для небольшого интервала времени после начала отражения соотношение (2) приближенно выполняется во всей области за фронтом отраженной ударной волны. Поэтому при малых значениях $t - t_0$ решение (6) с достаточной точностью будет определять полное распределение скорости и давления за фронтом ударной волны.

Координату фронта отраженной ударной волны определим с учетом полученного решения (6) в виде отрезка ряда Тейлора

$$R_2 = L + (dR_2/dt)_{t_0} (t - t_0) + 1/2 (d^2R_2/dt^2)_{t_0} (t - t_0)^2. \quad (7)$$

Введем обозначения для значений параметров газа на фронте отраженной ударной волны

$$(u_{12}, \rho_{12}, p_{12}, c_{12}) = (u_1, \rho_1, p_1, c_1)_{x=R_2},$$

$$(u_{22}, \rho_{22}, p_{22}, c_{22}) = (u_2, \rho_2, p_2, c_2)_{x=R_2},$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$, $c_2 = \sqrt{\gamma p_2/\rho_2}$ — скорость звука соответственно перед и за фронтом отраженной волны.

Из соотношения на фронте найдем скорость фронта отраженной ударной волны

$$dR_2/dt = D_2 = -1/4(\gamma - 3)u_{12} + 1/4(\gamma + 1)u_{22} - 1/2\sigma, \quad (8)$$

где $\sigma = \sqrt{1/4(\gamma + 1)^2(u_{12} - u_{22})^2 + 4c_{12}^2}$.

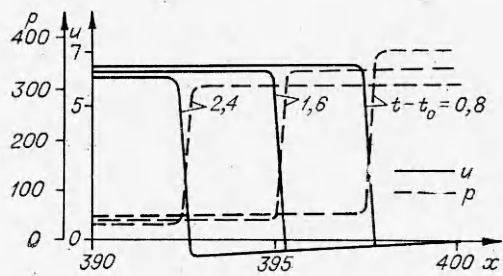
Для определения второй производной продифференцируем равенство (8)

$$d^2R_2/dt^2 = -\{(\gamma - 3)/4 + [(\gamma + 1)^2(u_{12} - u_{22})]/8\sigma\} \cdot du_1/dt - \\ - 1/\sigma (dc_1^2/dt) + \{(\gamma + 1)/4 + [(\gamma + 1)(u_{12} - u_{22})]/8\sigma\} du_2/dt.$$

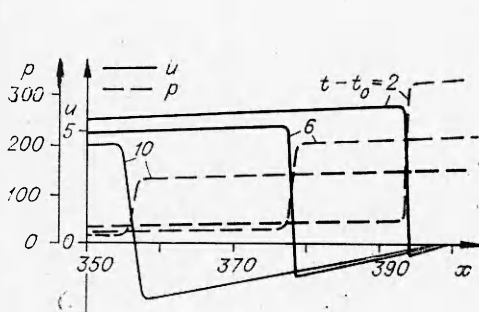
Значения функций и их производных перед фронтом отраженной волны определим в момент $t = t_0$, используя приближенное решение задачи о сильном точечном взрыве [2], записанное в явной форме. Можно использовать также точное решение [5]. Полную производную от скорости газа на фронте du_2/dt вычислим на основании полученного соотношения (6).

После подстановки получим

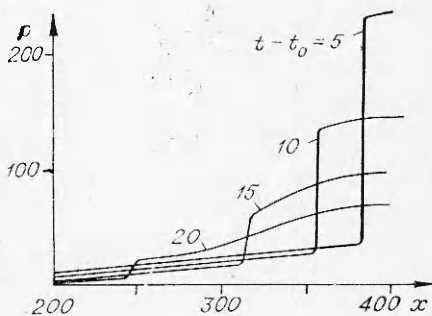
$$\left(\frac{d^2R_2}{dt^2}\right)_{t_0} = \frac{\gamma - 1}{(3\gamma - 1)(\gamma + 1)^2} \left\{ (7\gamma - 1)(\gamma - 1) + 2\gamma \left[\gamma + 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (3\gamma - 1) \left(\left(\frac{dg}{dz}\right)_{t_0} - \left(\frac{dh}{dz}\right)_{t_0} \right) \right] \right\} \frac{(D_1^0)^2}{L} - \frac{2\gamma(\gamma - 1)D_1^0}{(3\gamma - 1)(t_0 - T_a)}. \quad (9)$$



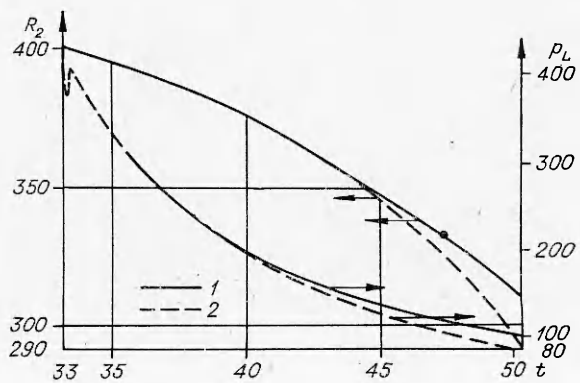
Puc. 1.



Puc. 2.



Puc. 3.



Puc. 4.

Здесь $D^1 = (D_1)_{t_0}$, $z = x/R_1$, а $g(z)$ и $h(z)$ — функции из работы [2].

При $\gamma = 1,4$ это выражение отрицательно, что соответствует физике явления. Отметим, что в работе [3] дано аналогичное решение в предположении $(du_2/dt)_{t_0} = 0$ (в (9) отсутствует второе слагаемое). При этом начальное ускорение волны имеет положительный знак. Из приведенного сравнения на рис. 4 (1 — аналитическое решение, 2 — численное решение) видно, что результаты, полученные численно и аналитически (7) на интервале времени $0 \leq t - t_0 < 10$, практически совпадают.

Константу T_a определим, используя соотношение на фронте отраженной волны

$$p_{22} = p_{12} \{ 1 + 2\gamma / (\gamma + 1) \cdot [(D_2 - u_{12}/c_{12})^2 - 1] \}. \quad (10)$$

Продифференцируем (10) в момент $t = t_0$

$$\left(\frac{dp_2}{dt} \right)_{t_0} = \left\{ \frac{dp_1}{dt} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\left(\frac{D_2 - u_{12}}{c_{12}} \right)^2 - 1 \right) \right] + p_{12} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{a}{dt} \left(\frac{D_2 - u_{12}}{c_{12}} \right)^2 \right\}_{t_0}.$$

Правую часть можно определить воспользовавшись результатами работы [2], левую — на основании (6а).

Разрешая полученное линейное уравнение относительно T_a , получим

$$T_a = t_0 - \mu L / D_1^0,$$

где $\mu = 2\gamma(\gamma^2 - 1) [(3\gamma - 1)^2 + 4\gamma(\gamma - 1)] / (3\gamma - 1)^2 [2(\gamma^2 - 1) + (3\gamma - 1)^2] + 4\gamma^2(\gamma + 1)(3\gamma - 1)$. При построении аналитических зависимостей на рис. 4 было использовано значение T_a , определяемое указанной формулой при $\gamma = 1,4$.

Автор благодарит Т. М. Саламахина, А. А. Шакина за постановку задачи и ценные указания, а также В. Г. Грудницкого, Л. В. Шуршалова за обсуждение результатов и полезные замечания.

Военно-инженерная академия
им. В. В. Куйбышева,
Москва

Поступила в редакцию
1/VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Я. Тугазаков, А. С. Фонарев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, 5.
2. Н. С. Мельникова, Т. М. Саламахин. ПМТФ, 1964, 4.
3. Л. В. Шуршалов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, 5.
4. T. S. Chang, O. Laporte. Phys. Fluids, 1964, 7, 8.
5. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.

ПОПРАВКА

В № 2 за 1976 г. на стр. 289 в формуле (12) (первая строка) напечатано:
 $\psi \rightarrow \infty : u \rightarrow u_\infty, T \rightarrow T_\infty, C_1 \rightarrow 0$, следует читать: $\psi = 0 : du/d\psi = dT/d\psi = dC_1/d\psi = 0$;