4. **Новгородов А. Ф., Рыков Г. В., Шейнин А. Н.** Экспериментальные исследования сжимаемости грунтов при кратковременных динамических нагрузках с использованием автоматизированной системы // ПМТФ.— 1990.— № 3.
5. **Критеску Н.** О распространении продольных волн в тонких упруговязкопластических стержнях // Механика.— М., 1966.— № 3.

г. Москва *Поступила 22/IX 1988 г.*

УДК 539.214; 539.374

Р. А. Каюмов

МЕТОД ВАРИАЦИИ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ О ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Одной из задач теории идеальной пластичности является проблема отыскания нагрузок, называемых предельными, при которых конструкция перестает сопротивляться воздействию внешних сил. Их двустороннюю оценку можно получить при помощи статической и кинематической теорем [1]. Ниже излагается методика, основанная на этих теоремах и позволяющая последовательно сближать верхнюю и нижнюю границы предельной нагрузки.

Пусть условие текучести имеет вид (критерий Мизеса — Хилла)

$$I = \sigma^{\mathrm{т}} A\sigma = 1, \tag{1}$$

где σ — вектор-столбец, составленный из компонент тензора напряжений; A — матрица характеристик пластического течения; значок т означает операцию транспонирования.

Уравнения равновесия внутри тела и на ее границе запишем в операторной форме

$$D\sigma(x) = q(x),\ q(x) = q_0(x)t. \tag{2}$$

Здесь D — матрица линейных дифференциальных операторов; $q_0(x)$ — нормированная внешняя нагрузка; t — параметр нагружения; x — радиус-вектор точки тела.

Отыскивается коэффициент t_*, при достижении которого конструкция теряет свою несущую способность.

Нижняя оценка. Решение уравнения (2) представимо в следующем символическом виде: $\sigma = \sigma_0 t$, $\sigma_0 = D^{-1}q_0$. Вычислим функцию I: $I = I_0 t^2$, $I_0 = \sigma_0{}^{\mathrm{т}} A\sigma_0$. Пусть при $t = t_-$ напряжения σ достигли поверхности текучести в какой-либо точке тела. Тогда

$$(I_0)_{\max\limits_x} t_-^2 = 1.$$

Поскольку уравнения равновесия удовлетворены, а напряжения не вышли за поверхность текучести (1), то согласно статической теореме

$$t_* \geqslant t_- = 1\Big/\sqrt{(I_0)_{\max\limits_x}}. \tag{3}$$

Как видно из (3), для лучшей оценки необходимо искать поле напряжений, минимизирующее $(I_0)_{\max\limits_x}$ (см. также [2, 3]). Таким образом, надо найти

$$I_* = \min_{\sigma_0}\left[(I_0)_{\max\limits_x}\right]. \tag{4}$$

Основная идея работы в том [4], что вместо поля σ_0 отыскиваются два поля — поле деформаций $\varepsilon = Lu$ (L — линейный дифференциальный оператор, u — вектор перемещений) и матрица упругих постоянных $E(x)$ некоторого фиктивного закона Гука $\sigma_0 = E\varepsilon$. Появляется возможность варьировать поле E, например, искать его в виде

$$E = E_0(x)\lambda(x).$$

Здесь E_0 — неизменная симметрическая матрица; $\lambda(x)$ — варьируемая скалярная функция радиуса-вектора точки тела, отыскиваемая из условия минимума величины $(I_0)_{\max\limits_x}$.

Особенность $\lambda(x)$ в том, что ее достаточно определять с точностью до постоянного множителя. Действительно, решение уравнения (2) можно записать как $\varepsilon = (DE_0\lambda)^{-1} q_0$. Тогда

$$I_0 = \lambda^2 [E_0(DE_0\lambda)^{-1}q_0]^{\mathrm{T}} A\, [E_0(DE_0\lambda)^{-1}q_0].$$

Из этого выражения в силу линейности D следует высказанное выше утверждение.

Оператор вычисления $(I_0)_{\max\limits_x}$ представим в виде [5]

$$(I_0)_{\max\limits_x} = \lim_{p\to\infty}\left[(\operatorname{mess}\Omega)^{-1/p}\left(\int\limits_\Omega I_0^p\, d\Omega\right)^{1/p}\right] \tag{5}$$

(mess (Ω) — мера объема тела).

Сведение задачи управления к задаче вариационной. Пусть рассматривается изопериметрическая задача вариационного исчисления о минимизации функционала $F(u,\ \lambda)$, где

$$F = \int\limits_\Omega \varepsilon^{\mathrm{T}}\lambda E_0\varepsilon\, d\Omega - \int\limits_\Omega Q_0^{\mathrm{T}} u\, d\Omega - \int\limits_\Gamma P_0^{\mathrm{T}} u\, d\Gamma, \tag{6}$$

при условии, что

$$(I_0)_{\max\limits_x} = \left[\lambda^2 (E_0\varepsilon)^{\mathrm{T}} A\, (E_0\varepsilon)\right]_{\max\limits_x} = c^2 \tag{7}$$

(Q_0, P_0 — нормированные векторы внешних сил; Γ — поверхность тела, на которой задан вектор P_0; $u(x)$ — кинематически возможное поле перемещений; варьируются поля λ и u; $c = \mathrm{const}$). Подставляя (5) в (7) и возводя в степень p, получим вместо (7)

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_\Omega I_0^p/c^{2p}\, d\Omega = \operatorname{mess}\Omega. \tag{8}$$

Использование метода множителей Лагранжа приводит к задаче об отыскании точки стационарности функционала

$$\Phi = F + \mu \lim_{p\to\infty}\int\limits_\Omega I_0^p/c^{2p}\, d\Omega. \tag{9}$$

Варьирование (9) дает (далее $I_{00} = \varepsilon^{\mathrm{T}}E_0AE_0\varepsilon$)

$$\int\limits_\Omega \left[\varepsilon^{\mathrm{T}}E_0\varepsilon + \mu\lim_{p\to\infty}\left(2p\lambda^{2p-1}I_{00}^p/c^{2p}\right)\right]\delta\lambda\, d\Omega + \int\limits_\Omega \delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\Big[2\lambda E_0\varepsilon +$$
$$+ \mu\lim_{p\to\infty}\left(2p\lambda^{2p}I_{00}^{p-1}E_0AE_0\varepsilon/c^{2p}\right)\Big]\, d\Omega - \int\limits_\Omega Q_0^{\mathrm{T}}\delta u\, d\Omega - \int\limits_\Gamma P_0^{\mathrm{T}}\delta u\, d\Gamma = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = \lim_{p\to\infty}\left[-\varepsilon^{\mathrm{T}}E_0\varepsilon I_{00}^{-p}c^{2p}/(2p\mu)\right]^{1/(2p-1)}. \tag{10}$$

Причем p можно выбрать так, чтобы λ было больше нуля:

$$p = \begin{cases}(3+2n)/4, & \mu > 0,\\ (n+1)/2, & \mu < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).\end{cases}$$

Поскольку энергия $\varepsilon^{\mathrm{T}}E_0\varepsilon$ ограничена почти всюду, то из (10)

$$\lambda = I_{00}^{-1/2}\lim_{p\to\infty}\left(-c^{2p}\mu\right)^{1/(2p-1)}.$$

Можно c^2 выбрать так, чтобы $(-c^{2p}\mu)^{-1/(2p-1)} = 1$. Тогда

$$\lambda = 1/\sqrt{I_{00}}. \tag{11}$$

Чтобы показать, что из рассматриваемой вариационной задачи вытекают уравнения равновесия, достаточно вернуться к (6), подставив (11):

$$F = \int_\Omega \varepsilon^{\text{т}} E_0 \varepsilon I_{00}^{-1/2} - \int_\Omega Q_0^{\text{т}} u \, d\Omega - \int_\Gamma P_0^{\text{т}} u \, d\Gamma.$$

Вариация F запишется как

$$\begin{aligned} \delta F = \int_\Omega 2\varepsilon^{\text{т}} E_0 I_{00}^{-1/2} \delta\varepsilon \, d\Omega - \int_\Omega Q_0^{\text{т}} \delta u \, d\Omega - \\ - \int_\Omega \varepsilon^{\text{т}} E_0 \varepsilon \varepsilon^{\text{т}} E_0 A E_0 \delta\varepsilon I_{00}^{-3/2} \, d\Omega - \int_\Gamma P_0^{\text{т}} \delta u \, d\Gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

В силу симметричности выражения $E_0 \varepsilon \varepsilon^{\text{т}} E_0 A E_0$ $\varepsilon^{\text{т}} E_0 \varepsilon \varepsilon^{\text{т}} E_0 A E_0 \delta\varepsilon = \varepsilon^{\text{т}} E_0 A E_0 \varepsilon \varepsilon^{\text{т}} E_0 \delta\varepsilon = I_{00} \varepsilon^{\text{т}} E_0 \delta\varepsilon$. Из (12) с учетом минимальности F

$$\begin{aligned} \delta F = \int_\Omega \varepsilon^{\text{т}} (E_0 \lambda) \, \delta\varepsilon \, d\Omega - \int_\Omega Q_0^{\text{т}} \delta u \, d\Omega - \\ - \int_\Gamma P_0^{\text{т}} \delta u \, d\Gamma = \int_\Omega \sigma_0^{\text{т}} \delta\varepsilon \, d\Omega - \int_\Omega Q_0^{\text{т}} \delta u \, d\Omega - \int_\Gamma P_0^{\text{т}} \delta u \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Условие (13) совпадает с вариационным уравнением Лагранжа, которое эквивалентно уравнениям равновесия. Далее, в силу принципа взаимности задача (6), (7) эквивалентна задаче минимизации $(I_0)_{\max\limits_x}$ при условии постоянства F, уравнениями Эйлера которой также будут уравнения равновесия и условие (11). Следовательно, задача (6), (7) эквивалентна задаче управления (2), (4), а условием оптимальности будет равенство (11).

Верхняя оценка. Определив поле перемещений из уравнений равновесия с использованием упругих характеристик $E = \lambda E_0$, можно найти верхнюю границу предельной нагрузки. Согласно известной теореме [1],

$$t_* \leqslant t_+ = W/U.$$

Здесь W — мощность пластических деформаций; U — мощность внешних единичных сил. В качестве кинематически возможного поля скоростей $\dot{u}(x)$ можно принять поле $u(x)$. Тогда легко подсчитать W, U.

Процедура сближения границ предельной нагрузки строится следующим образом. Для отыскания начального приближения принимается $\lambda^{(1)} = 1$. После решения уравнения (13) отыскиваются $\sigma_0^{(1)}, (I_0)_{\max\limits_x}^{(1)}$, $W^{(1)}$, $U^{(1)}$ и делается оценка коэффициента предельной нагрузки:

$$1 \Big/ \sqrt{(I_0)_{\max\limits_x}^{(1)}} \leqslant t_* \leqslant W^{(1)}/U^{(1)}. \tag{14}$$

Если эта оценка неудовлетворительна, то для отыскания следующего приближения принимается $\lambda^{(2)} = \left[\left(I_{00}^{(1)} \right) \right]^{-1/2}$, вновь решается задача (13), делается оценка (14) и т. д.

Иллюстративный пример. Методику отыскания нижней границы продемонстрируем на задаче об оценке снизу несущей способности элемента изгибаемой пластины толщины h. Согласно гипотезам Кирхгофа — Лява,

$$\sigma = E\varepsilon z, \ \varepsilon^{\text{т}} = \{ \varkappa_{11}, \ \varkappa_{22}, \ 2\varkappa_{12} \}, \ \sigma^{\text{т}} = \{ \sigma^{11}, \ \sigma^{22}, \ \sigma^{12} \}, \tag{15}$$

где ε — вектор кривизн, не зависящий от координаты z, нормальной к срединной поверхности пластины; E — матрица цилиндрических жесткостей. По определению изгибающие моменты M^{11}, M^{22}, M^{12} представляются в виде

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z \, dz, \ M^{\text{т}} = \{ M^{11}, M^{22}, M^{12} \}. \tag{16}$$

Пусть $M = M_0 t$ найден из уравнений равновесия пластины. Выражение (16) можно интерпретировать как интегральное уравнение равновесия.

На первом шаге при $\lambda^{(1)} = 1$, $E = E_0$ из (15), (16)

$$\varepsilon^{(1)} = E_0^{-1} M_0 12/h^2.$$

Из (11) и (15) следует: $\lambda^{(2)} = \operatorname{sign}(z)/z$. Подстановка $E = \lambda^{(2)} E_0$ в (15), а затем в уравнение равновесия (16) дает

$$\sigma_0^{(2)} = 4M_0 \operatorname{sign}(z)/h^2.$$

Получилась обычная двухслойная модель пластины. Поскольку $I_0 = \mathrm{const}$ по всей высоте, то

$$t_- = h^2/(4\sqrt{M_0 A M_0}),$$

что эквивалентно обычному условию текучести, применяемому в теории идеально-пластических пластин.

Использование аналитических решений. Предложенная методика позволяет эффективно использовать аналитические односторонние оценки (обычно легко получить формулы для верхней границы). Тогда сразу можно принять $\lambda^{(1)} = 1\sqrt{I_{00}}$, где I_{00} вычисляется по известному решению.

В качестве примера рассмотрим задачу о предельной нагрузке для балки длины l с одним защемленным и с другим шарнирно опертым концами (рис. 1; m, R — реакции).

Метод пластических шарниров дает [1]:

$$q_+ = q_0 t_+ = 11{,}6\, M_s,\ M_s = 2\sigma_s S_x/l^2 \tag{17}$$

(σ_s — предел текучести при осевом растяжении, S_x — статический момент).

При этом пластические шарниры возникают в заделке ($z = 0$) и на расстоянии $z = \xi l = 0{,}586 l$ от нее. Принимая, что балка состоит из четырех участков с разными жесткостями ($E = E_1$ считается малым на первом и третьем участках, а на втором, четвертом — $E = E_1/\alpha$, $\alpha \ll 1$), отыщем функции u_i, аппроксимирующие прогиб u (см. рис. 1) на участке с номером i:

$$E_1 J_x u_i(\zeta) = \Lambda_i [D_i + C_i \zeta + f(\zeta)], \Lambda_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 3, \\ 0, & i = 2, 4, \end{cases}$$

$$\zeta = z/l,\ f(\zeta) = l^2 m \zeta^2/2 + l^3 \zeta^3 R/6 - l^4 q \zeta^4/24,$$

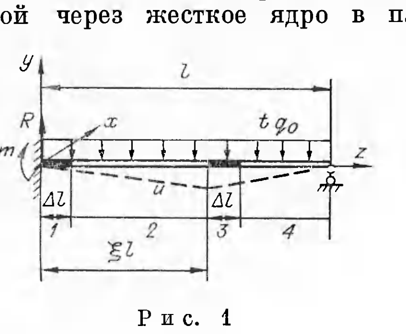
$$D_1 = C_1 = 0,\ C_2 = f'(\Delta)/\alpha,\ D_2 = (f(\Delta) - f'(\Delta)\Delta)/\alpha,$$

$$C_3 = -f'(\xi),\ D_3 = f'(\xi)\xi - f(\xi),\ C_4 = [f'(\Delta) + f'''(\xi)\Delta]/\alpha,$$

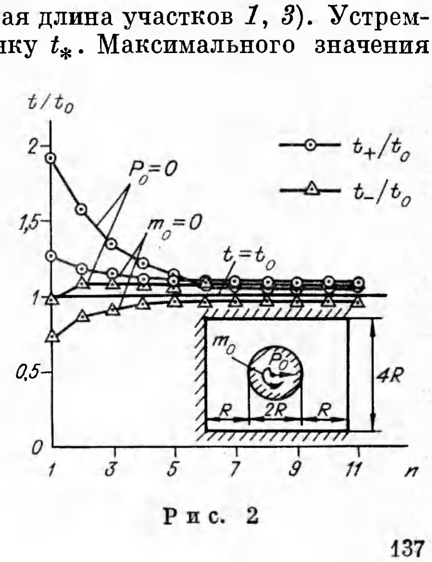
$$D_4 = -\xi f''(\xi)\Delta/\alpha,\ u_4(1) = u_4''(1) = 0$$

(J_x — момент инерции, Δ — относительная длина участков *1*, *3*). Устремляя α и Δ к нулю, можно получить оценку t_*. Максимального значения t_- достигает при $\Delta/\alpha = 0{,}257$ и совпадает с (17).

Результаты численных экспериментов. З а д а ч а 1. Отыскивалось предельное значение нагрузки, приложенной через жесткое ядро в пло-



Р и с. 1



Р и с. 2

скости пластины (рис. 2, t_0 — верхняя граница, полученная в [6]).

Решение по вышеописанной методике проводилось методом конечных элементов (использовались треугольные элементы с линейной аппроксимацией перемещений). Вычисления показали, что через 5, 6 итераций значения t_- и t_+ практически стабилизируются. Более того, при $m = 0$ приближенное значение t_*, вычисляемое как среднее арифметическое от t_+ и t_-, стабилизируется уже после первого приближения. Например, отличие между $t_* = (t_+ + t_-)/2$ на втором и девятом шагах составляет 1,9 %, а на восьмом и девятом —0,08 %. На рис. 2 приведена картина, показывающая сходимость метода в зависимости от числа итераций. Здесь же даны результаты для $P_0 = 0$, которые также подтверждают быструю сходимость метода. Особенность этой задачи в том, что нижняя граница получается сразу достаточно хорошей.

Замечания. Сходимость несомненно зависит от таких параметров, как коэффициент Пуассона, максимально допустимая величина $\eta = E_{\max}/E_{\min}$, степень дискретизации.

Численные эксперименты показали, что, во-первых, от коэффициента Пуассона результат зависит мало — разница составляет не более 0,5 %; во-вторых, существует число η_* такое, что для данной степени дискретизации при $\eta > \eta_*$ результат счета практически не зависит от η, например, для 420 элементов $\eta_* \cong 100$; в-третьих, при недостаточной степени дискретизации нижняя граница может оказаться даже выше верхней, известной из другого решения, например, аналитического. Это — следствие того, что численные методы, как правило, сглаживают пики напряжений, в силу чего $(I_0)_{\max\limits_x}$ получается меньше истинного для принятого распределения модуля упругости. Такой случай имеет место при $P = 0$ и показан на рис. 2.

Задача 2. Оценивалась несущая способность прямоугольных шарнирно опертых пластин под равномерной нагрузкой. Использовались треугольные элементы Зенкевича с кубической аппроксимацией перемещений на сетке 12×12 для четверти области. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,48.

Здесь также наблюдалась быстрая стабилизация среднего арифметического границ предельной нагрузки. Начиная с третьей итерации, результаты отличались друг от друга не более чем на 2 %, а среднее значение предельной нагрузки после пяти итераций при соотношениях сторон 1 и 1,5 превышали аналитические верхние границы на 4 %, 3% соответственно.

Интересно отметить, что по ходу итераций поверхность изогнутой пластины начинала принимать форму пирамиды, которая используется при кинематическом анализе [7]. Кинематически допустимое поле перемещений для квадратной пластины [7] позволяет сразу получить хорошую оценку снизу.

Предложенная методика характерна тем, что позволяет с помощью хорошо разработанных методов решения задач теории упругости за небольшое количество итераций сближать верхнюю и нижнюю границы предельной нагрузки. При этом эффективно используются частные результаты, полученные при решении задачи аналитическими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
2. **Кукуджанов В. И., Любимов В. М., Мышев В. Д.** Метод определения нижних оценок предельной нагрузки // Численные методы в механике твердого деформируемого тела.— М.: ВЦ АН СССР, 1984.
3. **Груздев А. К.** Методика приближенного определения предельных нагрузок для осесимметричного жесткопластического тела // Прикл. механика.— 1971.— Т. 7, вып. 2.
4. **Каюмов Р. А.** О нижней границе предельной нагрузки и задаче оптимизации // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. II Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых.— Казань, 1985.

5. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел.— М.: Наука, 1980.
6. Терегулов И. Г., Каюмов Р. А. Предельное состояние тел с жесткими включениями.— Казань, 1983.— Деп. в ВИНИТИ 27.05.83, № 5728—83.
7. Ржаницин А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек.— М.: Наука, 1983.

г. Казань *Поступила 20/I 1989 г.*

УДК 539.1

К. Атабаев, Н. Мамадалиев, Н. Тураев

О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМУЮ ПЛАСТИЧЕСКУЮ ПОЛОСУ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ОСНОВАНИЕМ

Рассматривается двумерная стационарная задача о воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую пластическую полосу, лежащую на полупространстве из линейно-упругого или пластического материала. При этом в качестве основания полосы, в частности слоя мягкого грунта, могут быть использованы горные породы и защитные прокладки различных подземных сооружений.

Отметим, что задача о воздействии подвижной нагрузки на линейно-сжимаемую пластическую полосу с жестким основанием разобрана в [1, 2]. В данной работе в отличие от [1, 2] волновой процесс в слоистой среде исследуется с учетом нелинейного нагружения материала полосы и напряженно-деформированного состояния основания, изучаются влияния неупругих свойств сред на распределение в них кинематических параметров, напряжений и определена форма поверхности фронта отраженной от упругого скального основания волны.

1. Пусть по верхней границе полосы толщиной h движется монотонно убывающая нормальная нагрузка с постоянной скоростью D, превышающей скорость распространения нагрузо-разгрузочных деформаций среды и основания. Среда, заполняющая полосу, моделируется обобщенным «пластическим газом» [3, 4], и при нагрузке связь между давлением p и объемной деформацией ε принимается в виде $p = \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2$ ($dp/d\varepsilon > 0$, $d^2p/d\varepsilon^2 > 0$). Угол наклона ветви разгрузки E диаграммы $p \sim \varepsilon$ превышает угол наклона ветви нагружения, а профиль нагрузки по мере распространения волн не меняется.

Если материал основания полосы является линейно-упругой и плотной средой, т. е. $\rho_0 < \rho_{\text{ск}}$ (ρ_0, $\rho_{\text{ск}}$ — плотности материалов полосы и основания), то распространяющаяся в полосе волна сжатия с криволинейной поверхностью Σ (рис. 1) при $\xi = x + Dt \geqslant \xi_a$, $\eta = y = h$ после взаимодействия с основанием порождает в нем упругие продольную и поперечную волны, а также отраженную ударную волну с поверхностью Σ_0 в полосе, впереди которой с большой скоростью $c_p = \sqrt{E/\rho_0}$ излучается упругая волна слабого разрыва как характеристика отрицательного направления. Вследствие распространения и взаимодействия волн с границами полосы возникают соответственно возмущенные области *1—4* и *I*, *II* (рис. 1). Решения задачи для областей *1* и *2* обратным способом в случае, когда заданная форма поверхности фронта Σ имеет вид $\eta(\xi) = (R_1 - R_2\xi/2)\xi$ (R_1, R_2 — заданные постоянные величины), ранее были получены в [2]. Ниже излагается аналитическое решение контактной задачи для областей *3* и *I*, *II*.

Решение задачи в области *3* относительно потенциала скорости $\varphi_3(\xi, \eta)$, как в [2], выражается формулой Даламбера

$$\varphi_3(\xi, \eta) = f_3(\xi - \mu\eta) + f_4(\xi + \mu\eta), \tag{1.1}$$

$u_3(\xi, \eta) = \partial\varphi_3/\partial\xi$, $v_3(\xi, \eta) = \partial\varphi_3/\partial\eta$ — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости грунта в области *3*.

В упругих областях *I* и *II* скального полупространства для потенциалов перемещения Φ и ψ согласно [5] при $D > a_0$

$$\Phi(\xi, \eta) = F_3(\xi - \mu_1\eta), \quad \psi(\xi, \eta) = F_4(\xi - \mu_2\eta), \tag{1.2}$$