

УДК 533.6

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА
В ПОТОКЕ ГАЗООБРАЗНОГО ОКИСЛИТЕЛЯ

Г. М. Махвиладзе

(Москва)

Рассматривается горение твердого топлива при нестационарном распространении тепла в его прогретом слое. Уравнение теплопроводности в топливе решается в конечном виде для случая резкого изменения скорости горения; найденная временная зависимость градиента температуры в твердом топливе у его поверхности позволяет проследить, как происходит срыв диффузационного пламени над поверхностью топлива.

Анализируется устойчивость горения твердого топлива в канале с большим свободным объемом. Возмущения газодинамических величин связываются с возмущением скорости горения и тем самым со свойствами теплового слоя в топливе. Анализ дисперсионного соотношения для предельного случая распространения звуковых волн в покоящемся газе показывает, что продольные акустические возмущения, возникающие в канале, могут расти со временем, взаимодействуя с прогретым приповерхностным слоем топлива.

1. Нестационарное горение твердых и жидкых топлив сопровождается изменением состояния прогретого приповерхностного слоя топлива, которое характеризуется градиентом температуры у его поверхности. При диффузационном режиме горения скорость горения определяется в первом приближении скоростью поступления окислителя в диффузационное пламя и, таким образом, существенно зависит от параметров газового потока окислителя, омывающего поверхность топлива. Физико-химические свойства самого топлива, его теплота газификации, теплоемкость, теплопроводность и т. п. оказывают на скорость горения более слабое влияние, так что им можно пренебречь [1].

Нестационарное распространение тепла в прогретом слое топлива описывается линейным одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - w(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (1.1)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\tau = 0, \theta = e^{-\xi}, w = 1; \xi = 0, \theta = 1; \xi = \infty, \theta = 0 \quad (1.2)$$

Задача (1.1) и (1.2) записана в безразмерных переменных

$$\xi = \frac{u^\circ}{\kappa} y, \quad \tau = \frac{u^\circ t}{\kappa}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad w(\tau) = \frac{u(t)}{u^\circ}$$

Здесь t — время, y — нормальная к поверхности топлива координата (топливо расположено при $y > 0$), $\kappa = \lambda_1 / \rho_1 c_1$ — температуропроводность топлива, u° — стационарная скорость горения, которая поддерживалась при $t < 0$, в результате чего установилось стационарное распределение температуры, T_s — температура поверхности топлива, T_0 — температура в глубине топлива. Стационарные значения величин отмечены значком $^\circ$ сверху. Временная зависимость скорости горения $u(t)$ задается условиями обтекания поверхности топлива окислителем.

При резком изменении скорости горения $w(\tau) = k = \text{const}$ можно найти решение (1.1), (1.2) в аналитической форме, используя преобразование Лапласа. Введем преобразованную температуру по формуле

$$\theta(\xi, s) = \int_0^\infty \theta(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Из уравнения (1.1) и условий (1.2) имеем

$$\theta(\xi, s) = \frac{\exp(-\xi)}{k+s-1} + \frac{(k-1)\exp(-1/2k + \sqrt{1/4k^2 + s})\xi}{s(k+s-1)}$$

Применяя формулу обращения, получим

$$\theta(\xi, \tau) = e^{-\xi-(k-1)\tau} + (k-1)e^{-1/2k\xi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(\tau s - \sqrt{1/4k^2 + s}\xi)}{s(k+s-1)} ds \quad (1.3)$$

Линия интегрирования в (1.3) проходит на комплексной плоскости s правее особенностей подынтегральной функции, которые располагаются в точках $s_1 = 0$ (полюс), $s_2 = 1 - k$ (полюс, расположенный в зависимости от величины k на отрицательной или положительной полуоси), $s_3 = -1/4k^2$ (точка ветвления). Воспользовавшись стандартным методом вычисления оригинала по изображению [2], убедимся, что интеграл в правой части (1.3) равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах s_1 , s_2 и интегралу по берегам разреза на комплексной плоскости s , который удобно провести от точки ветвления s_3 вдоль действительной оси до $s \rightarrow -\infty$. В результате получим

$$\begin{aligned} 2\theta(\xi, \tau) &= 1 - \Phi(\eta_1) + e^{-k\xi}[1 + \Phi(\eta_2)] + \\ &+ e^{(1-k)\tau-\xi}[1 + \Phi(\eta_3)] - e^{(1-k)\tau+\xi}[1 + \Phi(\eta_4)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\eta_{1,2} = 1/2(k\tau^{1/2} \pm \xi\tau^{-1/2}), \quad \eta_{3,4} = 1/2((k-2)\tau^{1/2} \pm \xi\tau^{-1/2})$$

$$(\Phi(\eta) = \frac{2}{V\pi} \int_0^\eta e^{-t^2} dt)$$

Безразмерный градиент температуры в топливе у его поверхности φ равен

$$\varphi = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{2} \left\{ k \left[1 + \Phi\left(\frac{k\tau^{1/2}}{2}\right) \right] - (k-2)e^{(1-k)\tau} \left[1 + \Phi\left(\frac{(k-2)\tau^{1/2}}{2}\right) \right] \right\} \quad (1.5)$$

2. В [1] показывается, что для возможности существования диффузионного пламени над топливом градиент температуры у его поверхности должен быть меньше некоторой критической величины. При критическом градиенте f_* заданный гидродинамическими условиями поток окислителя в диффузионное пламя q равен предельному [3]

$$\lambda_1 f_* = \alpha T_e + vq(c_1 T_s + Q) - \frac{\alpha E}{2R \ln(k_0 V \rho D / q)} \quad (2.1)$$

$$(f = \frac{u^\circ}{\chi} (T_s - T_0) \varphi)$$

Здесь коэффициент теплоотдачи α определяет отток тепла от диффузионного пламени в газовый поток и рассчитывается из гидродинамических

условий обтекания топлива газовым потоком, T_e — температура внешнего потока, ρ — плотность газа, E и v — энергия активации и стехиометрический коэффициент химической реакции в пламени, R — газовая постоянная, Q — полный тепловой эффект на единицу массы топлива, равный разности между тепловым эффектом реакции в пламени и теплотой газификации топлива, k_0 — безразмерная величина, включающая в себя суммарный порядок реакции, D — коэффициент диффузии.

Проследим, как происходит срыв диффузионного пламени при резком увеличении скорости горения. На фиг. 1 качественно построены зависимости критического (кривая 1) и стационарного $\lambda_1 j^{\circ} = v q c_1 (T_s - T_0)$ (прямая 2) градиентов от величины потока окислителя в пламя (асимптотой кривой 1 является прямая $q = k_0 \sqrt{\rho D}$). Пусть стационарное горение топлива с потоком окислителя в пламя q_0 описывается точкой A_1 . При мгновенном увеличении скорости горения состояние топлива меняется вдоль прямой $A_1 A$, параллельной оси абсцисс, при этом температура пламени возрастает. Затем

при постоянной скорости горения, соответствующей потоку окислителя в пламя q_1 , происходит увеличение градиента температуры и переход из точки A_2 в новую стационарную точку B_1 . Время этого переходного режима τ_1 можно вычислить, приравняв значение градиента из (1.5) величине стационарного градиента в точке B_1

$$k [1 + \Phi(1/2 k \tau_1^{1/2})] - (k - 2) e^{(1-k)\tau_1} [1 + \Phi(1/2 (k - 2) \tau_1^{1/2})] = 2 v q_2 / \rho_1 u^* \quad (2.2)$$

Если происходит достаточно большое увеличение потока окислителя, который поступает в пламя, так что точка, описывающая состояние топлива, двигаясь по прямой $A_1 A$, пересекает кривую 1 (например, переход в точку A_4), то происходит мгновенный срыв диффузионного пламени, поскольку градиент в точке пересечения становится критическим. Если степень увеличения скорости горения такова, что критический градиент достигается при движении изображающей точки вдоль вертикальной прямой (переход $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow B_2$), то срыв диффузионного пламени происходит не сразу, а через некоторое время, необходимое для релаксации прогретого слоя из точки A_3 в точку B_2 . Это время задержки τ_2 можно вычислить, приравняв значение градиента из (1.5) величине критического градиента в точке B_2

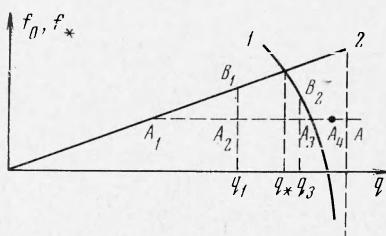
$$k [1 + \Phi(1/2 k \tau_2^{1/2})] - (k - 2) e^{(1-k)\tau_2} [1 + \Phi(1/2 (k - 2) \tau_2^{1/2})] = 2 \left[\alpha T_e + v q_3 (c_1 T_s + Q) - \frac{\alpha E}{2 R \ln(k_0 \sqrt{\rho D} / q_3)} \right] / \rho_1 u^* c_1 (T_s - T_0) \quad (2.3)$$

($k = q_3 / q_0$)

Максимальное увеличение скорости горения k_* , при котором не происходит срыва диффузионного пламени, соответствует потоку окислителя q_* и может быть вычислено из условия пересечения кривых 1 и 2

$$\alpha T_e + v q_* (c_1 T_s + Q) - \frac{\alpha E}{2 R \ln(k_0 \sqrt{\rho D} / q_*)} = v q_* c_1 (T_s - T_0) \quad (2.4)$$

$$(k_* = q_* / q_0)$$



Фиг. 1

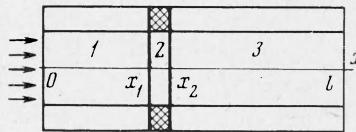
Пусть стационарное горение топлива с потоком окислителя в пламя q_0 описывается точкой A_1 . При мгновенном увеличении скорости горения состояние топлива меняется вдоль прямой $A_1 A$, параллельной оси абсцисс, при этом температура пламени возрастает. Затем

3. Рассмотрим акустическую устойчивость стационарного горения твердого топлива в цилиндрическом канале, через который протекает газообразный окислитель (фиг. 2). Предположим, что в зоне 2 ($x_1 \leq x \leq x_2$, $x_{1,2} = x_0 \pm \frac{1}{2}b$), имеющей малую протяженность по сравнению с длиной канала, происходит диффузионное горение твердого топлива, а остальная часть канала (зоны 1 и 3) не содержит топлива (область занятая топливом, заштрихована на фигуре).

Будем пользоваться одномерными газодинамическими уравнениями идеального газа с источниками тепла и массы, сосредоточенными на стенах канала в зоне 2; интенсивность этих источников зависит от параметров газового потока в соответствии со следующим выражением для массовой скорости горения (см. [4]):

$$m = B_0 c j^n \quad (3.1)$$

где c — относительная весовая концентрация окислителя, B_0 и n — постоянные величины, j — массовая скорость газового потока.



Фиг. 2

Исследование будем вести по схеме, подробно изложенной в [5]. На стационарные решения в зонах 1 и 3 наложим малые возмущения, зависящие от времени как $\exp \beta t$, $\beta = v + i\omega$. Произведя линеаризацию уравнений в зонах 1 и 3 относительно этих возмущений, получим решения в виде стоячих звуковых волн [5]

$$\begin{aligned} \delta v &= \frac{1}{2a^\circ \rho^\circ} \left[A \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ + a^\circ} \right) + B \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ - a^\circ} \right) \right] \\ \delta p &= \frac{1}{2} \left[A \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ + a^\circ} \right) - B \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ - a^\circ} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь x — координата вдоль оси канала, v — скорость газа, p — давление, a — скорость звука, A и B — константы, через $\delta\psi$ будет обозначаться возмущение величины ψ , стационарные значения величин здесь и ниже отмечены значком $^\circ$ сверху. Возмущения энтропии S и концентрации окислителя сносятся потоком газа

$$\delta S = C \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ} \right), \quad \delta c = H \exp \beta \left(t - \frac{x}{v^\circ} \right) \quad (3.3)$$

В качестве граничных акустических условий во входном сечении канала выберем условия, используемые в [5], именно

$$x = 0, \quad \rho v = \text{const}, \quad \rho v c = \text{const} \quad (3.4)$$

Условия (3.4) предполагают, что газ подается в канал через сверхзвуковое сопло; поэтому расход газа, поступающего в канал, постоянен. Кроме того, поскольку акустические колебания не производят возмущения энтропии того же порядка малости, положим

$$x = 0, \quad S = \text{const} \quad (3.5)$$

Считая, что течение газа через сверхзвуковое сопло, которым заканчивается канал, является квазистационарным (т. е. период акустических колебаний велик по сравнению с временем движения элемента жидкости через сопловую часть, а длина волны энтропии, переносимая течением, много больше расстояния от выходного сечения канала до критического сечения сопла на выходе из канала), имеем (см. [4])

$$x = l, \quad M = \text{const} \quad (M — \text{число Маха}) \quad (3.6)$$

Линеаризуя (3.4) — (3.6), получим

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \frac{\delta v}{v^\circ} + \frac{1}{\gamma} \frac{\delta p}{p^\circ} = 0, \quad \delta c = 0, \quad \delta S = 0 \\ x = l, \quad \delta M = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где γ — отношение теплоемкостей. Границные условия на входе в канал дают

$$B_- = \frac{M_-^\circ + 1}{M_+^\circ - 1} A_-, \quad C_- = 0, \quad H_- = 0 \quad (3.8)$$

Здесь и ниже величины, относящиеся к зоне 1, имеют индекс минус; величины, относящиеся к зоне 3, помечены плюсом.

Заметим, что при отсутствии зоны горения течение, естественно, устойчиво. Действительно, подставляя (3.2) и (3.3) в (3.7) и учитывая (3.8), получим

$$\begin{aligned} v &= \frac{(M^{\circ 2} - 1) a^\circ}{2l} \ln \frac{(1 + M^\circ)[2 + (\gamma - 1) M^\circ]}{(1 - M^\circ)[2 - (\gamma - 1) M^\circ]} \\ \omega &= \frac{\pi a^\circ}{l} (1 - M^{\circ 2}) N, \quad N = 0, 1, 2 \dots \end{aligned}$$

Так как $M^\circ < 1$, то $v < 0$. Затухание стоячих звуковых волн вызвано рассеиванием акустической энергии через сопло.

Течение газа в зоне горения 2 описывается следующими уравнениями, использованными в [4] для расчета переходных режимов горения твердых топлив в канале

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= v_1 \frac{2}{r} m \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial \rho c v}{\partial x} &= -v_2 \frac{2}{r} m, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \rho v \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{2}{r} (Qm - \lambda_1 f) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где v_1, v_2 — стехиометрические коэффициенты, r — радиус канала.

Следуя [5], заменим зону 2 расположенной при $x = x_0$ плоскостью сильного разрыва, на левой стороне которой возмущения течения совпадают с возмущениями при $x = x_0 - 1/2 b$, а возмущения на правой стороне плоскости $x = x_0$ — с соответствующими величинами при $x = x_0 + 1/2 b$. Введя вместо реальной зоны горения плоскость сильного разрыва, следует наделить эту плоскость всеми существенными свойствами зоны 2; в результате решения (3.2) и (3.3) слева и справа от этой зоны окажутся связанными между собой условиями, учитывающими приток массы и тепловой энергии при горении. Получим одно из этих условий. Интегрируя первое уравнение (3.9) по x в пределах, ограниченных зоной горения, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx + \rho_+ v_+ - \rho_- v_- = v_1 \frac{2}{r} B_0 \int_{x_1}^{x_2} c j^n dx \quad (3.10)$$

Интеграл в левой части (3.10) равен нулю, так как массоподвод происходит в области, неподвижной относительно стенок канала и имеющей малую протяженность в направлении его оси ($b \rightarrow 0$). Примем упрощающее предположение о том, что массовая скорость горения зависит от параметров течения при $x = x_0 = 0$. Тогда (3.10) имеет вид

$$x = x_0, \quad \rho_+ v_+ - \rho_- v_- = v_1 \frac{2}{r} B_0 c_- j_-^n b$$

Таким же образом получим условия на плоскости разрыва для трех других уравнений (3.9). Линеаризуя получившиеся соотношения относительно малых добавок, учитывая (3.8) и используя полученную в теории горения порохов [6] связь между малым изменением скорости горения (которое при помощи (3.1) выражается через возмущения концентрации окислителя и массовой скорости газового потока) и возмущением градиента температуры в топливе у его поверхности, записанную в виде

$$\frac{\delta f}{f^\circ} = \frac{\sqrt{1 + 4\beta t_0} - 1}{2\beta t_0} \frac{\delta m}{m^\circ}$$

где $t_0 = \kappa / u^{\circ 2}$ — характерное время перестройки теплового слоя в топливе, получим следующие условия, связывающие решения в зонах 1 и 3:

$$\begin{aligned} \rho_+^\circ \delta v_+ + \frac{v_+^\circ}{a_+^\circ} \delta p_+ - \frac{j_+^\circ}{c_p} \delta S_+ &= \Delta_1 \left(\rho_-^\circ \delta v_- + \frac{v_-^\circ}{a_-^\circ} \delta p_- \right) \\ \rho_+^\circ c_+^\circ \delta v_+ + j_+^\circ \delta c_+ + \frac{v_+^\circ c_+^\circ}{a_+^\circ} \delta p_+ - \frac{j_+^\circ c_+^\circ}{c_p} \delta S_+ &= \Delta_2 \left(\rho_-^\circ \delta v_- + \frac{v_-^\circ}{a_-^\circ} \delta p_- \right) \\ (1 + M_+^\circ)^2 \delta p_+ + 2j_+^\circ \delta v_+ - \frac{j_+^\circ v_+^\circ}{c_p} \delta S_+ &= (1 - M_-^\circ)^2 \delta p_- + 2j_-^\circ \delta v_- \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} v_+^\circ \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} M_+^\circ \right) \delta p_+ + \rho_+^\circ a_+^\circ \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{3}{2} M_+^\circ \right) \delta v_+ - \frac{v_+^\circ j_+^\circ}{2c_p} \delta S_+ &= \\ = v_-^\circ \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} M_-^\circ + \frac{\Delta_3}{\gamma-1} \right) \delta p_- + \rho_-^\circ a_-^\circ \left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{3}{2} M_-^\circ + \frac{\Delta_3}{\gamma-1} \right) \delta v_- & \\ \Delta_1 = 1 + 2v_1 n \frac{b}{r} \frac{m_-^\circ}{j_-^\circ}, \quad \Delta_2 = c_-^\circ - 2v_2 n \frac{b}{r} \frac{m_-^\circ}{j_-^\circ}, \quad \Delta_3 = z_1 \left(1 - z_2 \frac{\sqrt{1+4\beta t_0}-1}{2\beta t_0} \right) & \\ z_1 = 2n \frac{bm_-^\circ Q}{rj_-^\circ c_p T_-^\circ}, \quad z_2 = \frac{c_1(T_s - T_0)}{Q} & \end{aligned}$$

Эти соотношения имеют место при $x = x_0$. Здесь c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, z_1 — параметр, характеризующий интенсивность источников в зоне горения, z_2 — отношение тепла, запасаемого в твердом топливе, к величине полного теплового эффекта. Добавим к соотношениям (3.11) граничное условие на срезе канала (3.7), записанное в виде

$$x = l, \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta p_+}{p_+^\circ} + \frac{\delta S_+}{c_p} - 2 \frac{\delta v}{v_+^\circ} = 0 \quad (3.12)$$

Подставим теперь полученные выше решения (3.2), (3.3) в (3.11) и (3.12), учитывая соотношения (3.8). Второе уравнение (3.11), определяющее величину H_+ через A_- , при анализе устойчивости можно опустить, поскольку величина H_+ входит только в это уравнение. (Это следствие того факта, что возмущения концентрации окислителя, генерируемые в зоне горения и сносящиеся с потоком газа, не взаимодействуют с возмущениями давления и скорости на срезе канала и в области 3.) В результате имеем систему трех уравнений, выражающих величины A_+ , B_+ , C_+ через константу A_- , которая остается неопределенной. Условие разрешимости этой системы уравнений, заключающееся в равенстве нулю ее определителя, очень громоздко и не поддается исследованию в полном объеме. Рассмотрим поэтому случай небольших чисел Маха — M_-° , $M_+^\circ \ll 1$. Оставляя только члены нулевого порядка по M_-° , M_+° и считая величины a_-° , a_+° конечными (акустические колебания в покоящемся газе), $a v > 0$ (ищем неустойчивые корни), получим следующее уравнение

ние относительно β :

$$\operatorname{th} \beta t_+ \operatorname{cth} \beta t_- = -d \left[1 + z_1 \left(1 - z_2 \frac{\sqrt{1+4\beta t_0} - 1}{2\beta t_0} \right) \right] \quad (3.13)$$

$(d = a_-^\circ / a_+^\circ)$

Здесь $t_- = x_0 / a_-^\circ$, $t_+ = (l - x_0) / a_+^\circ$ — времена распространения звуковой волны через зону I и зону 3 соответственно.

В случае равенства времен распространения звуковой волны в зонах I и 3 решение (3.13) легко находится

$$vt_0 = z_1 z_2 \frac{z_1 z_2 - 1 - d}{(1 + z_1 + d)^2}, \quad \omega = 0 \quad (3.14)$$

Для реальных значений z_1 и z_2 — числитель дроби в (3.15) отрицательный и $v < 0$; поэтому при $t_- = t_+$ решений с $v > 0$ нет.

Если не учитывать нестационарный характер прогретого слоя в конденсированной фазе, т. е. перестройку его, вызываемую колебаниями скорости горения, то возмущения затухают и горение устойчиво. Действительно, в этом случае уравнение (3.13) принимает вид

$$\operatorname{th} \beta t_+ \operatorname{cth} \beta t_- = -d(1 + z_1)$$

Выделяя в этом соотношении действительную и мнимую части, имеем

$$\frac{\sin 2\omega t_- \operatorname{sh} 2\omega t_+ + \sin 2\omega t_+ \operatorname{sh} 2\omega t_-}{(\operatorname{ch} 2\omega t_- - \cos 2\omega t_-)(\operatorname{ch} 2\omega t_+ + \cos 2\omega t_+)} = -d(1 + z_1) \quad (3.15)$$

$$\sin 2\omega t_+ = \operatorname{sh} 2\omega t_+ \sin 2\omega t_- / \operatorname{sh} 2\omega t_- \quad (3.16)$$

Подставляя выражения для $\sin 2\omega t_+$ из (3.16) в (3.15), убедимся, что левая часть (3.15) положительна при $v > 0$. Поскольку правая часть этого уравнения отрицательна, то система уравнений (3.15), (3.16) не имеет решений в области $v > 0$.

Покажем теперь, что учет нестационарного процесса перестройки теплого слоя в твердой фазе топлива приводит к появлению неустойчивых корней. Для этого рассмотрим уравнение (3.13), считая, что

$$vt_- \ll 1, \quad vt_+ \ll 1, \quad \omega \gg v, \quad \omega t_0 \gg 1 \quad (3.17)$$

Условия (3.17) позволяют вместо (3.13) рассмотреть следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\omega t_+ \sin 2\omega t_- + iv(t_- \sin 2\omega t_+ - t_+ \sin 2\omega t_-)}{4\cos^2 \omega t_+ \sin^2 \omega t_-} &= \\ &= -d \left[1 + z_1 \left(1 - z_2 \frac{1-i}{\sqrt{2\omega t_0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

При получении (3.18) используются также условия

$$\begin{aligned} \sin 2\omega t_- &\neq 0, \quad \sin 2\omega t_+ \neq 0, \quad vt_- \ll |\sin \omega t_-| \\ vt_+ &\ll |\sin \omega t_+|, \quad v^2 t_- t_+ \ll |\sin 2\omega t_- \sin 2\omega t_+| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Условия (3.17) и (3.19) подлежат проверке после нахождения корней.

Выделяя в (3.18) действительную и мнимую части и пренебрегая величиной $z_1 z_2 / \sqrt{2\omega t_0}$ по сравнению с единицей в силу одного из условий

(3.17), получим

$$F(\Omega) = \operatorname{ctg} \omega t_- \operatorname{tg} \omega t_+ = -d_1^2 \quad (d_1^2 = d(1+z)) \quad (3.20)$$

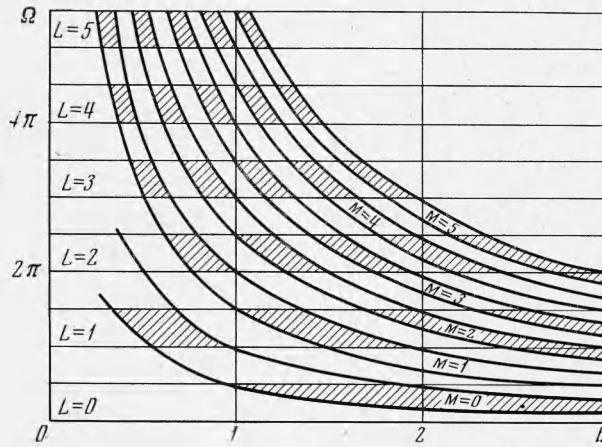
$$v = d_2^2 \cdot \frac{\sin^2 \omega t_- \cos^2 \omega t_+}{t_+ \sin 2\omega t_- - t_- \sin 2\omega t_+} \quad d_2^2 = \sqrt{\frac{2}{\omega t_0}} dz_1 z_2 \quad (3.21)$$

Легко показать, что величина v положительна, если корень уравнения (3.20) удовлетворяет условиям $\operatorname{ctg} \omega t_- > 0$, $\operatorname{tg} \omega t_+ < 0$, которые перепишем так:

$$\pi L < \Omega < \frac{1}{2}\pi(1+2L), \quad \frac{\pi(1+2M)}{2h} < \Omega < \frac{\pi(1+M)}{h} \quad (3.22)$$

$$(\Omega = \omega t_-; \quad h = t_+ / t_-; \quad L, M = 0, 1, 2 \dots)$$

На фиг. 3. изображена плоскость $h\Omega$, на которой построены области, определяемые неравенствами (3.22), для различных L и M ; они представляют собой четырехугольники, ограниченные двумя прямыми $\Omega = \pi L$,



Фиг. 3

$\Omega = \frac{1}{2}\pi(1+2L)$ и двумя гиперболами $\Omega = \frac{\pi(1+2M)}{2h}$, $\Omega = \frac{\pi(1+M)}{h}$. Чтобы для данного h выделить значения Ω , которые дают $v > 0$, нужно провести прямую, параллельную оси ординат, как это сделано на фиг. 3 для $h = 2$; между ординатами верхней и нижней точек пересечения этой прямой и сторон данного четырехугольника находится область искомых Ω . Для $h = 1$ таких областей нет, поскольку прямая $h = 1$ не пересекает ни один четырехугольник; для любого другого h их бесконечно много (для $h < 1$ проекции на ось абсцисс областей (3.22), построенных при фиксированном M , покрывают все значения h из-за перекрывания проекций двух соседних четырехугольников; все значения $h > 1$ покрываются проекциями на ось абсцисс четырехугольников, построенных при фиксированном L).

Теперь покажем, что в каждой такой области, найденной для данного h , имеется корень уравнения (3.20). Действительно, при $\Omega \rightarrow \pi L + 0$ и $\Omega \rightarrow \pi(1+2M)/2h + 0$ функция $F(\Omega) \rightarrow -\infty$, а при $\Omega \rightarrow \frac{1}{2}\pi(1+2L) - 0$ и $\Omega \rightarrow \pi(1+M)/h - 0$ $F(\Omega) \rightarrow -0$. Значит при изменении Ω внутри данной области функция обязательно примет значение, равное $-d_1^2$. Итак, для любого $h \neq 1$ существует бесконечно много корней урав-

нения (3.14) с $v > 0$. Выбирая среди них корни с достаточно большим значением ω , можно удовлетворить условиям (3.17), (3.19).

В заключение автор благодарит В. Б. Либровича за постановку задачи и ее обсуждение, А. Г. Истратова и В. Г. Маркова за ценные замечания.

Поступила 28 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Либрович В. Б. О воспламенении твердых топлив. ПМТФ, 1968, № 2.
 2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Физматгиз, 1960.
 3. Зельдович Я. Б. О горении неперемешанных газов. Ж. техн. физ., 1949, т. 19, № 9.
 4. Либрович В. Б., Махвадзе Г. М. Расчет переходных режимов горения твердого топлива в канале. ПМТФ, 1969, № 5.
 5. Раушебах Б. В. Вибрационное горение. М., Физматгиз, 1961.
 6. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
-