

AMS subject classification: 47H04, 49J53, 65K10, 90C30

Липшицево отображение и его применение к анализу сходимости варианта метода Ньютона*

М.Х. Рашид

Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 55 Zhongguancun east road, Haidian district, Beijing-100190, P.R. China and Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Rajshahi, Rajshahi-6205, Bangladesh

E-mail: harun_math@ru.ac.bd (Рашид М.Х.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

Рашид М.Х. Липшицево отображение и его применение к анализу сходимости варианта метода Ньютона // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 2. — С. 193–212.

Пусть X и Y — банаховы пространства. Пусть $f : \Omega \rightarrow Y$ — дифференцируемая по Фреше функция на открытом подмножестве Ω в X , а F — многозначное отображение с замкнутым графиком. Рассмотрим следующее обобщенное уравнение: $0 \in f(x) + F(x)$.

В статье исследуется вариант метода Ньютона для решения обобщенного уравнения (1) и анализируются полулокальная и локальная сходимость этого метода при более слабых условиях, чем условия Жан-Алексиса и Петруса [13]. Показано, что этот вариант метода Ньютона сходится сверхлинейно, когда производная Фреше от f является (L, p) -Гельдер непрерывной и $(f + F)^{-1}$ — липшицевой в контрольной точке. Кроме того, даны применения этого метода к задаче нелинейного программирования и вариационному неравенству. Приведены численные эксперименты для иллюстрации теоретических результатов.

DOI: 10.15372/SJNM20210206

Ключевые слова: многозначные отображения, липшицевы отображения, обобщенные уравнения, вариант метода Ньютона, полулокальная сходимость.

Rashid M.H. Lipschitz-like mapping and its application to convergence analysis of a variant of Newton’s method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 2. — P. 193–212.

Let X and Y be Banach spaces. Let $f : \Omega \rightarrow Y$ be a Fréchet differentiable function on an open subset Ω of X and F be a set-valued mapping with closed graph. Consider the following generalized equation problem: $0 \in f(x) + F(x)$. In the present paper, we study a variant of Newton’s method for solving generalized equation (1) and analyze semilocal and local convergence of this method under weaker conditions than those considered by Jean-Alexis and Piétrus [13]. In fact, we show that the variant of Newton’s method is superlinearly convergent when the Fréchet derivative of f is (L, p) -Hölder continuous and $(f + F)^{-1}$ is Lipschitz-like at a reference point. Moreover, applications of this method to a nonlinear programming problem and a variational inequality are given. Numerical experiments are provided which illustrate the theoretical results.

Keywords: set-valued mappings, lipschitz-like mappings, generalized equations, variant of Newton’s method, semilocal convergence

*Работа выполнена при поддержке Инициативы международных стипендий президента ИМСП КАН, Академии математики и системных наук Китайской академии наук, Пекин, Китай.

1. Введение

На протяжении всей статьи мы предполагаем, что X и Y — вещественные или комплексные банаховы пространства и Ω — открытое подмножество в X . Пусть $f: \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ — дифференцируемая по Фреше функция, производная которой обозначается $\mathcal{D}f$, и пусть $F: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутым графиком. Нас интересует проблема аппроксимации точки $x \in \Omega$, удовлетворяющей следующему обобщенному уравнению:

$$0 \in f(x) + F(x). \quad (1)$$

Заметим, что обобщенное уравнение (1) широко изучалось и является абстрактной моделью для различных задач. Типичные примеры — это системы неравенств, вариационные неравенства, линейные и нелинейные задачи дополнителности, системы нелинейных уравнений, задачи равновесия и др. (см., например, [37–39]). Для нахождения приближенного решения Дончев [1] ввел классический метод ньютоновского типа вида

$$0 \in f(x_k) + \mathcal{D}f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $\mathcal{D}f(x_k)$ — производная Фреше от f в точке x_k , а в [3] он также доказал устойчивость метода (2). Следуя работе Ортега и Рейнбольтда [14] и Островского [8], Жан-Алексис и Петрус [13] представили следующий метод для решения (1) при $h > 1$:

$$0 \in f(x_k) + h\mathcal{D}f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (3)$$

Отметим, что при $h = 1$ метод (3) совпадает с классическим методом типа Ньютона (2). Для решения обобщенного уравнения (1) использовались различные методы типа Ньютона. Такой подход использовался во многих статьях в этом контексте (см., например, [1, 3–5, 7, 9]). Для решения (1) Клатте и Кумер [29] сгенерировали последовательность Ньютона, в которой шаги Ньютона определяются приближениями $f^{(k)}$ для f около текущей итерации x_k и решения x_{k+1} уравнения

$$0 \in f^{(k)}(x) + F(x),$$

и уделили основное внимание анализу локальной сходимости для метода Ньютона при определенных типах приближений и различных условиях регулярности для $f + F$. Кроме того, авторы [29, предложение 8] представили формулировку типа Канторовича по полулокальной сходимости при псевдoreгулярности $f + F$ при условии, что все построенные последовательности Ньютона допустимы. Кроме того, в [29, теорема 4] представлено расширение [30, лемма 10.1] уравнения для негладкой модели (1) с использованием концепции отображений Ньютона [30]. В предположении свойств регулярности отображения $f + F$ результаты по локальной сходимости точных и неточных методов Ньютона были получены многими исследователями (см., например, [5, секция 6 C & E] и [6, 16, 29] соответственно). Дембо с соавторами [35] ввел следующий приближенный метод Ньютона для решения (1) при $F \equiv 0$, $X = Y = \mathbb{R}^n$ и f непрерывно дифференцируемой с якобианом $\mathcal{D}f$ в конечномерном случае:

$$\left(f(x_k) + \mathcal{D}f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \right) \cap \mathbb{B}(0, \eta_k \|f(x_k)\|) \neq \emptyset, \quad (4)$$

где $\{\eta_k\} \subset (0, \infty)$ — последовательность скаляров и $B(x, \alpha)$ обозначает замкнутый шар с центром в x с радиусом α .

Измаилов и Солодов [18] (см. также монографию [17]) ввели следующий приближенный метод Ньютона для решения обобщенного уравнения (1) в случае конечной размерности:

$$0 \in f(x_k) + \mathcal{D}f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + e_k + F(x_{k+1}), \text{ где } e_k \in \mathbb{R}^n.$$

Было представлено много точных и приближенных итерационных методов решения (1) (см., например, [9, 10, 21–23, 28]). Соответствующие результаты для решения негладкой версии обобщенных уравнений (1) представлены в [32–34, 36].

Зафиксируем $x \in \Omega$ и $h > 1$. Подмножество X , обозначаемое $\mathcal{M}(x)$, определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}(x) := \{s \in X : 0 \in f(x) + h\mathcal{D}f(x)s + F(x + s)\}.$$

Отметим, что при некоторых подходящих условиях теоремы из [13] касаются существования следующей итерации (т. е. метод является выполнимым), а затем устанавливают существование одной последовательности, которая сходится к решению (1). Следовательно, с точки зрения численных расчетов такие методы неудобны. С этой точки зрения мы имеем дело со следующей итерационной процедурой (см. алгоритм), которая является версией итерационного метода, приведенного в [24, Algorithm 1.1].

Алгоритм (Вариант метода Ньютона (ВМН)):

Шаг 1. Пусть $h, \eta \in [1, \infty)$. Выберем $x_0 \in X$ и положим $k := 0$.

Шаг 2. Если $0 \in \mathcal{M}(x_k)$, остановка; в противном случае переход к шагу 3.

Шаг 3. Если $0 \notin \mathcal{M}(x_k)$, выберем s_k такое, что $s_k \in \mathcal{M}(x_k)$ и $\|s_k\| \leq \eta \operatorname{d}(0, \mathcal{M}(x_k))$.

Шаг 4. Обновим $x_{k+1} := x_k + s_k$.

Шаг 5. Заменяем k на $k + 1$ и перейдем к шагу 2.

Отметим, что при $h = 1$ алгоритм сводится к итерационному методу, приведенному в [28]. Когда $\eta = 1$, $h = 1$ и $\mathcal{M}(x)$ имеет одно значение, алгоритм совпадает с методом (3). Для установления сходимости варианта метода Ньютона мы не используем свойство непрерывности $\mathcal{D}f$, которое использовалось в [24]. Фактически мы ослабляем предположение, рассматривая (L, p) -гельдеровское предположение вместо липшицевой непрерывности, которая обсуждалась в [13], чтобы охватить более широкий круг проблем, и следовательно, мы получаем лучший порядок сходимости, чем полученный авторами [13, 24]. Кроме того, когда $p = 0$ и $p = 1$ мы имеем линейную и квадратичную сходимость метода соответственно. Другие статьи по этой теме можно найти в [28].

Целью данной работы является анализ полулокальной сходимости метода, определяемого алгоритмом при предположении, что $\mathcal{D}f$ является (L, p) -гельдеровским на открытом подмножестве в X . Основным инструментом — это свойство липшицевости для многозначных отображений, описание которого можно найти в контексте негладкого анализа [15]. При использовании информации о начальной точке основными результатами являются критерии сходимости, которые обеспечивают достаточные условия, гарантирующие сходимость к решению любой последовательности, генерируемой алгоритмом. Вследствие этого получены результаты по локальной сходимости варианта метода Ньютона.

Статья организована следующим образом. В пункте 2 мы приводим некоторые необходимые понятия и предварительные результаты. Основная теорема представлена в п. 3, где приводятся результаты по полулокальной и локальной сходимости последовательности, полученной алгоритмом. Применение варианта метода Ньютона к задаче нелинейного программирования и вариационному неравенству представлены в п. 4. Кроме того, в этом пункте представлены численные эксперименты, иллюстрирующие теоретические результаты. В последнем пункте 5 мы кратко представляем основные результаты, полученные в ходе этого исследования.

2. Предварительные результаты

Пусть $x \in X$ и $r > 0$. Замкнутый шар с центром в x радиуса r обозначен как $B(x, r) = \{x' \in X : \|x - x'\| \leq r\}$. Пусть $F: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение. Область, обратное отображение и график F обозначены как $\text{dom } F$, F^{-1} и $\text{grh } F$ соответственно, которые определяются следующим образом:

$$\text{dom } F := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\},$$

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\} \quad \text{для каждого } y \in Y$$

и

$$\text{grh } F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Пусть $A, B \subseteq X$. Расстояние от точки $x \in X$ до множества A определяется так:

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Избыток множества A над множеством B определяется следующим образом:

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Понятия псевдолипшицевости и липшицевости многозначных отображений взяты из [24], их также можно найти в [25, 26, 28]. Эти понятия были введены Обеном в [15, 19] и были тщательно изучены.

Определение 1. Пусть $H: Y \rightrightarrows X$ — многозначное отображение и пусть $(y^*, x^*) \in \text{grh } H$. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $M > 0$. Тогда H считается

- (а) липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M , если и только если выполняется следующее неравенство:

$$e\left(H(y_1) \cap B(x^*, a), H(y_2)\right) \leq M \|y_1 - y_2\| \quad \text{для любых } y_1, y_2 \in B(y^*, b);$$

- (б) псевдолипшицевым при (y^*, x^*) , если и только если существуют постоянные $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ и $M' > 0$ такие, что H является липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, b_1) \times B(x^*, a_1)$ с постоянной M' .

Пригодится следующая лемма, взятая из [28, лемма 2.1].

Лемма 1. Пусть $H: Y \rightrightarrows X$ — многозначное отображение и пусть $(y^*, x^*) \in \text{grh } H$. Предположим, что H является липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M . Тогда

$$d(x, H(y)) \leq M d(y, H^{-1}(x))$$

для любых $x \in B(x^*, a)$ и $y \in B\left(y^*, \frac{b}{3}\right)$, удовлетворяющих $d(y, H^{-1}(x)) \leq \frac{b}{3}$.

Завершим этот пункт, представив следующую лемму, взятую из [2].

Лемма 2. Пусть $\Phi: X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение. Пусть $\eta^* \in X$, $r > 0$ и $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$d(\eta^*, \Phi(\eta^*)) < r(1 - \lambda) \quad (5)$$

и

$$e\left(\Phi(x_1) \cap \mathbb{B}(\eta^*, r), \Phi(x_2)\right) \leq \lambda \|x_1 - x_2\| \text{ для любых } x_1, x_2 \in \mathbb{B}(\eta^*, r). \quad (6)$$

Тогда Φ имеет неподвижную точку в $\mathbb{B}(\eta^*, r)$, т. е. существует $x \in \mathbb{B}(\eta^*, r)$ такая, что $x \in \Phi(x)$. Кроме того, если Φ однозначно, то неподвижная точка Φ в $\mathbb{B}(\eta^*, r)$ является единственной.

3. Анализ сходимости

Этот пункт посвящен исследованию полулокальной и локальной сходимости последовательности, порожденной вариантом метода Ньютона, определяемым алгоритмом. Для этого пусть $p \in (0, 1]$, $a > 0$, $b > 0$ и $B(x^*, a) \subset X$. Для нашего исследования сделаем следующие предположения:

(I) однозначная функция $f : X \rightarrow Y$ является дифференцируемой по Фреше на $B(x^*, a)$, а ее производная обозначается как $\mathcal{D}f$;

(II) $\mathcal{D}f$ является p -гельдер непрерывной в x^* , т. е. существует $L > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{D}f(u) - \mathcal{D}f(v)\| \leq L\|u - v\|^p \text{ для всех } u, v \in B(x^*, a);$$

(III) многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ имеет замкнутый график, и $(f + F)^{-1}$ является липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M .

Предположим, что $(x^*, y^*) \in \text{grh}(f + F)$ и пусть $B(x^*, a) \subseteq \text{dom } F$. Пусть $h > 1$, $x \in B(x^*, a)$, и определим отображение Q_x следующим образом:

$$Q_x(\cdot) := f(x) + h\mathcal{D}f(x)(\cdot - x) + F(\cdot).$$

Тогда, построив $\mathcal{M}(x)$, получим

$$\mathcal{M}(x) = \{s \in X : 0 \in Q_x(x + s)\}. \quad (7)$$

Кроме того, для любых $z \in X$ и $y \in Y$ очевидна следующая эквивалентность:

$$z \in Q_x^{-1}(y) \iff y \in f(x) + h\mathcal{D}f(x)(z - x) + F(z). \quad (8)$$

В частности,

$$x^* \in Q_{x^*}^{-1}(y^*). \quad (9)$$

Следующая лемма пригодится для анализа сходимости ВМН. Ее доказательство является уточнением доказательства из [24, лемма 3.1].

Лемма 3. Пусть X и Y — банаховы пространства, $h > 1$ и $p \in (0, 1]$. Предположим, что (I) и (II) верны. Предположим, что многозначное отображение F имеет замкнутый график при (y^*, x^*) . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(i) отображение $(f + F)^{-1}$ является псевдолипшицевым в (y^*, x^*) ;

(ii) отображение $Q_{x^*}^{-1}$ является псевдолипшицевым в (y^*, x^*) .

Доказательство. Определим функцию $t : X \rightarrow Y$ следующим образом:

$$t(x) = -f(x) + f(x^*) + h\mathcal{D}f(x^*)(x - x^*).$$

Тогда мы имеем $Q_{x^*}(x) = (m + (f + F))(x) = f(x^*) + h\mathcal{D}f(x^*)(x - x^*) + F(x)$. Кроме того, $(y^* + m(x^*), x^*) = (y^*, x^*)$. Поэтому, согласно [2, следствие 2], нужно лишь показать, что m непрерывно по Липшицу в x^* для доказательства эквивалентности леммы 3. Отметим, что, согласно предположению (II), p -гельдеровская непрерывность $\mathcal{D}f$ означает, что существует постоянная $L > 0$ такая, что $\|\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x')\| \leq L\|x - x'\|^p$ для любых $x, x' \in B(x^*, a)$. Для этого пусть $\lambda > 0$ такое, что $a < \sqrt[p]{\frac{\lambda(p+1)}{L(2^p+1)(1+(p+1)h)}}$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in B(x^*, a)$ мы получим

$$\begin{aligned} \|m(x_1) - m(x_2)\| &= \|f(x_2) - f(x_1) - h\mathcal{D}f(x^*)(x_2 - x_1)\| \\ &= \|f(x_2) - f(x_1) - \mathcal{D}f(x_1)(x_2 - x_1) + (\mathcal{D}f(x_1) - h\mathcal{D}f(x^*))(x_2 - x_1)\| \\ &\leq \|f(x_2) - f(x_1) - \mathcal{D}f(x_1)(x_2 - x_1) + h(\mathcal{D}f(x_1) - \mathcal{D}f(x^*))(x_2 - x_1)\| \\ &\leq \int_0^1 \|(\mathcal{D}f(x_1 + t(x_2 - x_1)) - \mathcal{D}f(x_1))(x_2 - x_1)\| dt + \\ &\quad h\|\mathcal{D}f(x_1) - \mathcal{D}f(x^*)\|\|x_2 - x_1\| \\ &\leq \frac{L}{p+1}\|x_2 - x_1\|^{p+1} + hL\|x_1 - x^*\|^p\|x_2 - x_1\| \\ &\leq L\left(\frac{1}{p+1} + h\right)\left(\|x_2 - x^*\| + \|x^* - x_1\|\right)^p + \|x_1 - x^*\|^p\|x_2 - x_1\| \\ &\leq L\left(\frac{1}{p+1} + h\right)\left((2a)^p + a^p\right)\|x_2 - x_1\| \leq \frac{L(2^p+1)(1+(p+1)h)a^p}{p+1}\|x_2 - x_1\| \\ &\leq \lambda\|x_2 - x_1\|, \end{aligned}$$

что показывает, что m является Липшиц непрерывной функцией в окрестности x^* с постоянной Липшица λ . Это завершает доказательство леммы. \square

В соответствии с леммой 3 теперь предположим, что отображение $Q_{x^*}^{-1}$ липшицево в (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M , т. е. для любых $u_1, u_2 \in B(y^*, b)$

$$e\left(Q_{x^*}^{-1}(u_1) \cap B(x^*, a), Q_{x^*}^{-1}(u_2)\right) \leq M\|u_1 - u_2\|. \quad (10)$$

Пусть $M > 0$ и $L > 0$. Определим

$$\bar{r} := \min\left\{\frac{2^{p+1}(p+1)b - L(1+3h(p+1))a^{p+1}}{(p+1)2^{p+1}}, \frac{a(2^p - MLha^p)}{M2^{p+2}}\right\}. \quad (11)$$

Тогда

$$\bar{r} > 0 \iff L < \min\left\{\frac{2^{p+1}(p+1)b}{(1+3h(p+1))a^{p+1}}, \frac{2^p}{Mha^p}\right\}. \quad (12)$$

Положим

$$\ell := L(1 + 2^{p+1}(1 + (p+1)h)). \quad (13)$$

Следующая лемма является версией [24, лемма 3.2]. Эта лемма играет важную роль при анализе сходимости варианта метода Ньютона.

Лемма 4. Пусть $h > 1$ и $p \in (0, 1]$. Предположим, что (I)–(III) верны. Пусть $x \in B(x^*, \frac{a}{2})$ и пусть \bar{r} определено в (11) так, что (12) удовлетворяется. Тогда Q_x^{-1} липшицево при (y^*, x^*) на $B(y^*, \bar{r}) \times B(x^*, \frac{a}{2})$ с постоянной $\frac{2^p M}{2^p - MLha^p}$, т. е. для любых $y_1, y_2 \in B(y^*, \bar{r})$

$$e\left(Q_{x^*}^{-1}(y_1) \cap B\left(x^*, \frac{a}{2}\right), Q_{x^*}^{-1}(y_2)\right) \leq \frac{2^p M}{2^p - MLha^p} \|y_1 - y_2\|.$$

Доказательство. Очевидно, что при предположениях (I)–(III) леммы 3 многозначное отображение $Q_{x^*}^{-1}$ является липшицевым в (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M . Теперь легко доказать эту лемму, применяя те же аргументы, что и при доказательстве в [24, лемма 3.2]. Поэтому здесь мы не представляем ее доказательство.

Прежде чем приступить к доказательству нашего основного результата, нам необходимо ввести несколько обозначений. Определим для каждого $x \in B(x^*, a)$ отображение $\Theta_x : X \rightarrow Y$ следующим образом:

$$\Theta_x(\cdot) := f(x^*) + h\mathcal{D}f(x^*)(\cdot - x^*) - f(x) - h\mathcal{D}f(x)(\cdot - x),$$

а многозначное отображение $\Phi_x : X \rightrightarrows X$ – так:

$$\Phi_x(\cdot) := Q_{x^*}^{-1}[\Theta_x(\cdot)]. \tag{14}$$

Тогда для каждых $u', u'' \in B(x^*, a)$

$$\|\Theta_x(u') - \Theta_x(u'')\| \leq h\|\mathcal{D}f(x^*) - \mathcal{D}f(x)\| \|u' - u''\|. \tag{15}$$

3.1. Сверхлинейная сходимость

Следующий результат является эффективным средством для получения сверхлинейной сходимости последовательности, полученной с использованием варианта метода Ньютона.

Предложение. Пусть $p \in (0, 1]$ и $h, \eta \in (1, \infty)$. Предположим, что (I)–(III) верны. Пусть $\delta > 0$ такое, что

- (i) $\delta \leq \min \left\{ \frac{a}{4}, \sqrt[p+1]{\frac{b}{\ell}}, 1, \right\}$,
- (ii) $(4^p h M + 1)L(\eta(1 + (h - 1)(p + 1))\delta^p + (p + 1)h4^{1-p}a^p) \leq 2^p(p + 1)$,
- (iii) $\|y^*\| < \frac{L\delta^{p+1}}{p + 1}$.

Тогда для каждого $x \in B(x^*, 2\delta)$ имеется $\hat{x} \in B(x^*, 2\delta)$, удовлетворяющее

$$0 \in f(x) + h\mathcal{D}f(x)(\hat{x} - x) + F(\hat{x}), \text{ т. е. } \mathcal{M}(x) \neq \emptyset. \tag{16}$$

Доказательство. При предположении (III) и согласно лемме 3, мы находим, что многозначное отображение $Q_{x^*}^{-1}$ является липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M , т. е. (10) верно. Предположения (I) и (II) означают, что существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x')\| \leq L\|x - x'\|^p \text{ для всех } x, x' \in B(x^*, a). \tag{17}$$

Фиксируем $x \in B(x^*, 2\delta)$. Определим

$$r_x := \frac{M(p + 5)}{4(p + 1)} ((L\|x - x^*\|^{p+1}) + (p + 1)\|y^*\|). \tag{18}$$

Поскольку $\eta > 1$, $h > 1$ и $4\delta \leq a$, согласно утверждению (i), из утверждения (ii) следует, что

$$\begin{aligned} (p+5)(4^p Mh+1)L\delta^p &= (4^p Mh+1)L((p+1)\delta^p+4\delta^p) \\ &\leq (4^p Mh+1)L\left(\eta(1+(h-1)(p+1))\delta^p+(p+1)h4^{1-p}a^p\right) \leq 2^p(p+1). \end{aligned}$$

Мы получим

$$2^p MLh\delta^p \leq \frac{p+1}{p+5} \quad \text{и} \quad L\delta^p \leq \frac{2^p(p+1)}{p+5}. \quad (19)$$

Тогда для каждого $x \in B(x^*, 2\delta)$, $h > 1$ и $p \in (0, 1]$, согласно утверждению (iii) и первому условию в (19), для (18) получим

$$\begin{aligned} r_x &\leq \frac{ML(p+5)(2^{p+1}+1)}{4(p+1)}\delta^{p+1} = \frac{(p+5)(2^{p+1}+1)}{4(p+1)}ML\delta^p\delta \\ &\leq \frac{(p+5)(2^{p+1}+1)}{4(p+1)}\frac{(p+1)}{2^p(p+5)h}\delta \leq \delta. \end{aligned} \quad (20)$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что лемма 2 применима к отображению Φ_x при $\eta^* := x^*$, $r = r_x$ и $\lambda := \frac{p+1}{p+5}$. Для этого проверим, что оба предположения: (5) и (6) леммы 2 верны. Отметим, что $x^* \in Q_{x^*}^{-1}(y^*) \cap B(x^*, r_x)$ в соответствии с (9). Согласно определению избытка e и отображения Φ_x в (14), получим

$$\begin{aligned} d(x^*, \Phi_x(x^*)) &\leq e(Q_{x^*}^{-1}(y^*) \cap B(x^*, r_x), \Phi_x(x^*)) \leq e(Q_{x^*}^{-1}(y^*) \cap B(x^*, \delta), \Phi_x(x^*)) \\ &\leq e(Q_{x^*}^{-1}(y^*) \cap B(x^*, a), Q_{x^*}^{-1}[\Theta_x(x^*)]) \end{aligned} \quad (21)$$

(отметим, что $B(x^*, \delta) \subseteq B(x^*, 2\delta) \subseteq B(x^*, a)$). Для каждого $u \in B(x^*, 2\delta)$, согласно определению Θ_x , получим

$$\begin{aligned} \|\Theta_x(u) - y^*\| &= \|f(x^*) + h\mathcal{D}f(x^*)(u - x^*) - f(x) - h\mathcal{D}f(x)(u - x) - y^*\| \\ &= \|f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x) + \mathcal{D}f(x)(x^* - x) - \\ &\quad h\mathcal{D}f(x)(u - x) + h\mathcal{D}f(x^*)(u - x^*) - y^*\| \\ &\leq \|f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x) + h\mathcal{D}f(x)(x^* - x) - \\ &\quad h\mathcal{D}f(x)(u - x) + h\mathcal{D}f(x^*)(u - x^*) - y^*\| \\ &\leq \|f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x)\| + \|y^*\| + \\ &\quad h\|(\mathcal{D}f(x^*) - \mathcal{D}f(x))(u - x^*)\|. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку $f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x) = \int_0^1 (\mathcal{D}f(x + t(x^* - x)) - \mathcal{D}f(x))(x^* - x)dt$, из (17) имеем

$$\|f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x)\| \leq \frac{L}{p+1}\|x^* - x\|^{p+1}. \quad (23)$$

Также отметим, что из (17) получим

$$\|(\mathcal{D}f(x^*) - \mathcal{D}f(x))(u - x^*)\| \leq L\|x^* - x\|^p\|u - x^*\|.$$

Следовательно, из (22) и утверждения (iii) следует, что

$$\|\Theta_x(u) - y^*\| \leq \frac{L(1 + 2^{p+1}(1 + (p+1)h))}{p+1}\delta^{p+1}. \quad (24)$$

С использованием обозначения ℓ в (13) и соотношения $\ell\delta^{p+1} \leq b$, согласно утверждениям (i), (24), получим

$$\|\Theta_x(u) - y^*\| \leq \frac{\ell}{p+1}\delta^{p+1} \leq b. \quad (25)$$

Следовательно, мы имеем

$$\Theta_x(u) \in B(y^*, b) \text{ для всех } u \in B(x^*, 2\delta). \quad (26)$$

В частности, пусть $u = x^*$ в (22). Тогда из (23) получим

$$\begin{aligned} \|\Theta_x(x^*) - y^*\| &\leq \|f(x^*) - f(x) - \mathcal{D}f(x)(x^* - x)\| + \|y^*\| \\ &\leq \frac{L}{p+1} \|x^* - x\|^{p+1} + \|y^*\| \leq \frac{L(2^{p+1} + 1)}{p+1} \delta^{p+1} \leq b. \end{aligned} \quad (27)$$

Это означает, что $\Theta_x(x^*) \in B(y^*, b)$. Следовательно, согласно (27) и липшицеву свойству $Q_{x^*}^{-1}$, из (21) мы имеем

$$\begin{aligned} d(x^*, \Phi_x(x^*)) &\leq M \|y^* - \Theta_x(x^*)\| \leq \frac{M}{p+1} \left(L \|x - x^*\|^{p+1} + (p+1) \|y^*\| \right) \\ &= \left(1 - \frac{p+1}{p+5} \right) r_x = (1 - \lambda)r, \end{aligned}$$

т. е. предположение (5) леммы 2 проверено.

Чтобы выполнить предположение (6) леммы 2, пусть $x', x'' \in B(x^*, r_x)$. Из (20) и утверждения (i) следует, что $x', x'' \in B(x^*, r_x) \subseteq B(x^*, \delta) \subseteq B(x^*, a)$. Кроме того, из (26) мы получим $\Theta_x(x'), \Theta_x(x'') \in B(y^*, b)$. Это, вместе с липшицевым свойством $Q_{x^*}^{-1}$, означает, что

$$\begin{aligned} e\left(\Phi_x(x') \cap B(x^*, r_x), \Phi_x(x'')\right) &\leq e\left(\Phi_x(x') \cap B(x^*, a), \Phi_x(x'')\right) \\ &= e\left(Q_{x^*}^{-1}[\Theta_x(x')] \cap B(x^*, a), Q_{x^*}^{-1}[\Theta_x(x'')]\right) \\ &\leq M \|\Theta_x(x') - \Theta_x(x'')\|. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда для $x \in B(x^*, 2\delta)$ (15) означает, что

$$\|\Theta_x(x') - \Theta_x(x'')\| \leq h \|\mathcal{D}f(x^*) - \mathcal{D}f(x)\| \|x' - x''\| \leq hL \|x^* - x\|^p \|x' - x''\| \leq 2^p hL \delta^p \|x' - x''\|.$$

Объединив два вышеупомянутых неравенства, мы получим из (28) и первого неравенства (19)

$$e\left(\Phi_x(x') \cap B(x^*, r_x), \Phi_x(x'')\right) \leq 2^p hML \delta^p \|x' - x''\| \leq \frac{p+1}{p+5} \|x' - x''\| = \lambda \|x' - x''\|.$$

Отсюда следует, что предположение (6) леммы 2 также проверено. Таким образом, лемма 2 применима и, следовательно, существует неподвижная точка $\hat{x} \in B(x^*, r_x)$, удовлетворяющая $\hat{x} \in \Phi_x(\hat{x})$. Это означает $0 \in f(x) + h\mathcal{D}f(x)(\hat{x} - x) + F(\hat{x})$, и таким образом $\mathcal{M}(x) \neq \emptyset$. Это завершает доказательство леммы. \square

Следующая теорема дает некоторые достаточные условия, обеспечивающие сходимость последовательности, полученной вариантом метода Ньютона.

Теорема. Пусть $p \in (0, 1]$ и $h, \eta \in (1, \infty)$. Предположим, что (I)–(III) верны. Предположим, что \bar{r} определяется посредством (11), так что (12) удовлетворяется и δ описывается, как в предложении, удовлетворяя $3\delta 2^p \leq (p+5)\bar{r}$. Предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow x^*} d(y^*, f(x) + F(x)) = 0. \quad (29)$$

Тогда существует некоторое $\hat{\delta} > 0$ с начальной точкой в $B(x^*, \hat{\delta})$, алгоритм генерирует по крайней мере одну последовательность, и любая сгенерированная последовательность $\{x_n\}$ сверхлинейно сходится к решению \bar{x} (1).

Доказательство. Пусть δ определена в предложении, так что утверждения (i)–(iii) верны. Тогда утверждение (iii) и (29) позволяют взять $0 < \hat{\delta} \leq \delta$ так, что

$$d(0, f(x_0) + F(x_0)) \leq \frac{L\delta^{p+1}}{p+1} \text{ для всех } x_0 \in B(x^*, \hat{\delta}), \quad (30)$$

и, согласно утверждению (ii), мы можем записать

$$\begin{aligned} ML \left(4^p \eta (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p + p + 1 \right) ha^p & \\ & \leq 4^p ML \left(\eta (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p + (p+1) ha^p \right) \\ & \leq 4^p ML \left(\eta (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p + (p+1) h 4^{1-p} a^p \right) \\ & \leq (4^p h M + 1) L \left(\eta (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p + (p+1) 4^{1-p} a^p \right) \\ & \leq 2^p (p+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$ML \left(4^p \eta (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p + (p+1) ha^p \right) \leq 2^p (p+1). \quad (31)$$

Пусть

$$\gamma := \frac{4^p \eta ML (1 + (h-1)(p+1)) \delta^p}{(p+1)(2^p - ML ha^p)}. \quad (32)$$

Из (31) и (32), следует, что

$$\gamma \leq 1. \quad (33)$$

Для завершения доказательства мы будем действовать по индукции. Для этого нам нужно показать, что алгоритм генерирует по крайней мере одну последовательность и любая сгенерированная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ следующим утверждениям:

$$\|x_n - x^*\| \leq 2\delta \quad (34)$$

и

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \gamma \left(\frac{1}{2^p} \right)^{(p+1)^n} \delta. \quad (35)$$

Поскольку наша δ удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения, то мы имеем следующее:

$$\text{для каждого } x \in B(x^*, 2\delta) \Rightarrow \text{имеется } \hat{x} \in B(x^*, 2\delta), \text{ удовлетворяющее (16)}. \quad (36)$$

Для $x_0 \in B(x^*, \hat{\delta}) \subseteq B(x^*, \delta)$ из (36) следует, что существует $\hat{x}_1 \in B(x^*, \delta)$ такое, что

$$0 \in f(x_0) + h\mathcal{D}f(x_0)(\hat{x}_1 - x_0) + F(\hat{x}_1), \text{ т. е. } \mathcal{M}(x_0) \neq \emptyset.$$

Следовательно, согласно алгоритму выберем s_0 такое, что $s_0 \in \mathcal{M}(x_0)$ и

$$\|s_0\| \leq \eta \, d(0, \mathcal{M}(x_0)), \tag{37}$$

и $x_1 := x_0 + s_0$ определено. Определение $\mathcal{M}(x_0)$ в (7) означает, что

$$\mathcal{M}(x_0) := \{s_0 \in X : 0 \in Q_{x_0}(x_0 + s_0)\} = \{s_0 \in X : x_0 + s_0 \in Q_{x_0}^{-1}(0)\}.$$

Из этого следует, что

$$d(0, \mathcal{M}(x_0)) = d(x_0, Q_{x_0}^{-1}(0)). \tag{38}$$

Поскольку $x_0 \in B(x^*, \hat{\delta}) \subseteq B(x^*, \delta) \subseteq B(x^*, \frac{a}{2})$ по утверждению (i) и при выборе $\hat{\delta}$, согласно лемме 4, мы получим, что $Q_{x_0}^{-1}$ является липшицевым при (y^*, x^*) на $B(y^*, \bar{r}) \times B(x^*, \frac{a}{2})$ с постоянной $\frac{2^p M}{2^p - MLha^p}$. Кроме того, утверждение (iii), второе соотношение из (19) и $3\delta 2^p \leq (p + 5)\bar{r}$ означают, что

$$\|y^*\| < \frac{L\delta^{p+1}}{p+1} \leq \frac{L\delta^p}{p+1} \delta \leq \frac{\bar{r}}{3}.$$

Это дает следующее:

$$0 \in B\left(y^*, \frac{\bar{r}}{3}\right). \tag{39}$$

Из (30) мы получим

$$d(0, Q_{x_0}(x_0)) = d(0, f(x_0) + F(x_0)) \leq \frac{L\delta^{p+1}}{p+1} \leq \frac{\bar{r}}{3}. \tag{40}$$

Поэтому лемма 1 применима для $x_0 \in B(x^*, \frac{a}{2})$, (39) и (40), и, следовательно, используя ее, мы получим

$$d(x_0, Q_{x_0}^{-1}(0)) \leq \frac{2^p M}{2^p - MLha^p} d(0, Q_{x_0}(x_0)).$$

Это вместе с (38) дает

$$d(0, \mathcal{M}(x_0)) = d(x_0, Q_{x_0}^{-1}(0)) \leq \frac{2^p M}{2^p - MLha^p} d(0, Q_{x_0}(x_0)). \tag{41}$$

Теперь, используя (41), (40) и (32), мы получим из (37)

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| = \|s_0\| &\leq \eta d(0, \mathcal{M}(x_0)) \leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} d(0, Q_{x_0}(x_0)) \leq \frac{2^p \eta ML}{(p+1)(2^p - MLha^p)} \delta^{p+1} \\ &\leq \frac{2^p \eta ML(1 + (h-1)(p+1)) \delta^p \delta}{(p+1)(2^p - MLha^p)} = \gamma \left(\frac{1}{2^p}\right) \delta. \end{aligned}$$

Это показывает, что (35) верно для $n = 0$.

Будем действовать по индукции. Фактически мы собираемся показать, что каждая последовательность, генерируемая алгоритмом, удовлетворяет (34) и (35) для всех n . Для этого предположим, что точки x_0, x_1, \dots, x_{k+1} построены при помощи алгоритма таким образом, что (34) и (35) верны для $n = 0, 1, \dots, k-1$, и покажем, что утверждения (34) и (35) верны для $n = k$. Согласно нашему предположению, (34) и (35) верны для каждого $n \leq k-1$. Поэтому с использованием (33) мы имеем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|s_i\| + \|x_0 - x^*\| \leq \gamma\delta \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2^p}\right)^{(p+1)^i} + \delta \\ &\leq \gamma\delta \left(\frac{1}{2^p} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2^p}\right)^{(p+1)^i}\right) + \delta \leq \delta + \delta = 2\delta \text{ для } p \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Это показывает, что (34) верно для $n = k$. Кроме того, вновь, используя (36), мы можем получить $\hat{x}_{k+1} \in B(x^*, 2\delta)$ такое, что

$$0 \in f(x_k) + h\mathcal{D}f(x_k)(\hat{x}_{k+1} - x_k) + F(\hat{x}_{k+1}), \text{ т. е. } \mathcal{M}(x_k) \neq \emptyset.$$

Поэтому с использованием алгоритма мы имеем $x_{k+1} := x_k + s_k$ при $s_k \in \mathcal{M}(x_k)$ таким, что

$$\|s_k\| \leq \eta \, d(0, \mathcal{M}(x_k)). \quad (42)$$

С другой стороны, поскольку $x_k \in B(x^*, 2\delta) \subseteq \left(x^*, \frac{a}{2}\right)$, согласно лемме 4, мы получим, что $Q_{x_k}^{-1}$ является липшицевым в (y^*, x^*) на $B(y^*, \bar{r}) \times B\left(x^*, \frac{a}{2}\right)$ с постоянной $\frac{2^p M}{(2^p - MLha^p)}$. Теперь почти с теми же аргументами, что и в случае, когда $n = 0$, из (42) мы имеем

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|s_k\| \leq \eta \, d(0, \mathcal{M}(x_k)) \leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \, d(0, Q_{x_k}(x_k)) \\ &= \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \, d(0, f(x_k) + F(x_k)) \\ &\leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \|f(x_k) - f(x_{k-1}) - h\mathcal{D}f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\| \\ &= \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \left(\|f(x_k) - f(x_{k-1}) - \mathcal{D}f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \right. \\ &\quad \left. (h-1)(\mathcal{D}f(x_k) - \mathcal{D}f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})\| \right) \\ &\leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \left(\|f(x_k) - f(x_{k-1}) - \mathcal{D}f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \right. \\ &\quad \left. (h-1)(\mathcal{D}f(x_k) - \mathcal{D}f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})\| \right) \\ &\leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \left(\|f(x_k) - f(x_{k-1}) - \mathcal{D}f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\| + \right. \\ &\quad \left. (h-1)\|\mathcal{D}f(x_k) - \mathcal{D}f(x_{k-1})\|\|x_k - x_{k-1}\| \right) \\ &\leq \frac{2^p \eta M}{2^p - MLha^p} \left(\frac{L}{p+1} + (h-1)L \right) \|x_k - x_{k-1}\|^{p+1} \\ &\leq \frac{2^p \eta ML(1 + (h-1)(p+1))}{(p+1)(2^p - MLha^p)} \left(\gamma \left(\frac{1}{2^p}\right)^{(p+1)^{k-1}} \delta \right)^{p+1} \\ &\leq \frac{2^p \eta ML(1 + (h-1)(p+1))\delta^p}{(p+1)(2^p - MLha^p)} \left(\frac{1}{2^p}\right)^{(p+1)^k} \delta \leq \gamma \left(\frac{1}{2^p}\right)^{(p+1)^k} \delta. \quad (43) \end{aligned}$$

Это означает, что (35) верно для $n = k$. Следовательно, (34) и (35) верны для каждого n . Это означает, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши, генерируемая алгоритмом; следовательно, $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ и существует $\bar{x} \in B(x^*, a)$ такое, что $x_n \rightarrow \bar{x}$. Таким образом, мы переходим к пределу $\mathcal{M}(x_n)$, и поскольку график F замкнутый, отсюда следует, что $0 \in f(\bar{x}) + F(\bar{x})$. Таким образом, доказательство завершено. \square

В частности, когда x^* является решением (1), мы можем использовать теорему, чтобы доказать следующее следствие, которое дает локальную сходимость последовательности, сгенерированной алгоритмом.

Следствие. Пусть x^* — решение (1). Предположим, что $h, \eta > 1$ и (I) и (II) верны. Пусть $Q_{x^*}^{-1}$ является псевдолипицевым около $(0, x^*)$. Предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow x^*} d(0, f(x) + F(x)) = 0. \tag{44}$$

Тогда существует $\hat{\delta} > 0$ такое, что любая последовательность $\{x_n\}$, сгенерированная алгоритмом с начальной точкой в $B(x^*, \hat{\delta})$, сходится к решению \bar{x} (1).

Доказательство. Псевдолипицевость $Q_{x^*}^{-1}$ около $(0, x^*)$ означает, что существуют постоянные r_0, r_{x^*} и M такие, что $Q_{x^*}^{-1}$ является липшицевым на $B(0, r_0) \times B(x^*, r_{x^*})$ с постоянной M . Пусть $0 < a < r_{x^*}$ и $0 < b < r_0$. Пусть $p \in (0, 1]$ и $L > 0$ такие, что $2^{p+1}(p+1)b - L(1+3h(p+1))a^{p+1} > 0$ и $2^p - MLha^p > 0$.

Поскольку предположения (I) и (II) удовлетворяются, мы получим

$$L\|x - x'\|^p \geq \sup_{x, x' \in B(x^*, \frac{a}{2})} \|Df(x) - Df(x')\|.$$

Пусть \bar{r} и ℓ определены, как в (11) и (13). Возьмем δ так, что условия (i) и (ii) предложения удовлетворяются и $3\delta 2^p \leq (p+5)\bar{r}$. Поскольку (44) верно, существует $0 < \hat{\delta} < \delta$ такое, что для всех $x_0 \in B(x^*, \hat{\delta})$ имеется $y^* \in Q_{x_0}(x_0)$, удовлетворяющее

$$\|y^*\| < \min \left\{ \frac{L\delta^{p+1}}{p+1}, \frac{\bar{r}}{3} \right\}.$$

Отсюда следует, что $B(x^*, a) \subset B(x^*, r_{x^*})$ и $B(y^*, b) \subset B(0, r_0)$. Теперь, согласно нашему предположению о $Q_{x^*}^{-1}$, мы имеем

$$e\left(Q_{x^*}^{-1}(y_1) \cap B(x^*, a), Q_{x^*}^{-1}(y_2)\right) \leq M\|y_1 - y_2\| \quad \text{для любых } y_1, y_2 \in B(y^*, b),$$

т. е. $Q_{x^*}^{-1}$ является липшицевым на $B(y^*, b) \times B(x^*, a)$ с постоянной M . Это (а также лемма 3) означает, что предположение (III) верно. Кроме того, поскольку x^* является решением (1), то $y^* \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$ для каждого $x \in B(x^*, \hat{\delta})$. Таким образом, с использованием (44) мы имеем

$$\lim_{x \rightarrow x^*} d(y^*, f(x) + F(x)) \leq \lim_{x \rightarrow x^*} d(y^*, 0) + \lim_{x \rightarrow x^*} d(0, f(x) + F(x)) = 0,$$

что показывает, что предположение (29) теоремы верно. Теперь мы должны проверить, что все предположения теоремы удовлетворяются. Таким образом, теорема позволяет сделать вывод, что любая последовательность $\{x_k\}$, генерируемая алгоритмом с начальной точкой $x_0 \in B(x^*, \hat{\delta})$, сходится к решению \bar{x} (1). Это завершает доказательство следствия. \square

4. Применения и численные эксперименты

В этом пункте мы приведем некоторые применения варианта метода Ньютона к задаче нелинейного программирования в конечномерном пространстве, а также к вариационному неравенству в бесконечномерном пространстве. Кроме того, приведем численные эксперименты, иллюстрирующие теоретические результаты.

4.1. Применение к задаче нелинейного программирования

Для иллюстрации нашего результата, рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования: минимизировать $h_0(x)$ при условии

$$\begin{cases} h_i(x) = 0 & \text{для } i \in [1, p]; \\ h_i(x) \leq 0 & \text{для } i \in [p+1, m], \end{cases}$$

где $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции на \mathbb{R}^n . Лагранжева функция $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, связанная с задачей минимизации, определяется следующим образом:

$$l(x, \lambda) = h_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x).$$

Тогда условия оптимальности первого порядка Каруша–Куна–Таккера (ККТ) имеют следующий вид:

$$\mathcal{D}_x l(x, \lambda) = (0, 0), \quad (45)$$

$$\mathcal{D}_\lambda l(x, \lambda) \in N_\Omega(\lambda), \quad (46)$$

где $N_\Omega(\lambda)$ — конус, нормальный к множеству $\Omega = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^{m-p}$ в точке λ . Условия (45) и (46) могут быть представлены следующим образом:

$$(0, 0) \in (\mathcal{D}_x l(x, \lambda), -\mathcal{D}_\lambda l(x, \lambda)) + N_E(x, \lambda), \quad (47)$$

где $E = \mathbb{R}^n \times \Omega$. Поэтому условия оптимальности ККТ (47) можно переписать следующим образом:

$$(0, 0) \in f(x, \lambda) + F(x, \lambda), \quad (48)$$

где $f(x, \lambda) = (\mathcal{D}_x l(x, \lambda), -\mathcal{D}_\lambda l(x, \lambda))$ и $F(x, \lambda) = N_E(x, \lambda)$. Следовательно, система оптимальности ККТ (45), (46) эквивалентна (48). Возьмем $z = (x, \lambda)$ в (48). Тогда (48) сводится к обобщенному уравнению вида (1). Теперь, если мы будем считать, что f — дифференцируемая по Фреше функция, производная которой удовлетворяет (L, p) -гельдеровскому условию и $(f + F)^{-1}$ липшицево, ее можно изучить с помощью итерационного метода, представленного здесь.

4.2. Применение к вариационному неравенству

Пусть X — банахово пространство с двойственным X^* и пусть C — непустое, замкнутое и выпуклое подмножество X . Пусть $f : X \rightarrow X^*$ — непрерывно дифференцируемая функция на C . Рассмотрим следующую задачу вариационного неравенства нахождения точки $x \in C$, удовлетворяющей

$$\langle f(x), u - x \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } u \in C. \quad (49)$$

Пусть $N_C : X \rightrightarrows X^*$ — нормальное коническое отображение на выпуклое множество C , определяемое следующим образом:

$$N_C(x) = \begin{cases} \{y^* : \langle y^*, u - x \rangle \leq 0 \quad \forall u \in C\} & \text{для } x \in C; \\ \emptyset, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что классическая задача вариационного неравенства (49) для f и C эквивалентна обобщенному уравнению нахождения $x \in X$ такого, что

$$f(x) + N_C(x) \ni 0. \quad (50)$$

Обозначим $\mathcal{W}'_x(\cdot) = f(x) + h\mathcal{D}f(x)(\cdot - x) + N_C(\cdot)$ и положим

$$\mathcal{S}(x) := \{s \in X : 0 \in f(x) + h\mathcal{D}f(x)s + N_C(x + s)\}.$$

Тогда легко показать, что (29) верно в теореме при $\mathcal{W}'_x(\cdot)$ вместо $Q_x(\cdot)$. Следовательно, алгоритм является вариантом метода Ньютона для решения (50). Предположим, что (III) верно при $F := N_C$. Теперь обычная процедура — проверить, что все случаи, описанные в теореме, удовлетворяются. Следовательно, из теоремы следует, что алгоритм гарантирует создание как минимум одной последовательности с начальной точкой, близкой к исходной, которая сверхлинейно сходится к решению задачи (1).

4.3. Численные эксперименты

Этот подпункт представляет численные эксперименты, которые иллюстрируют теоретический результат данной работы. Пример 1 иллюстрирует теоретический результат в одном измерении, тогда как пример 2 иллюстрирует результат в двух измерениях.

Пример 1. Пусть $x_0 = -2$, $\eta = 3$, $M = 0.7$, $L = 0.23$, $p = 0.75$, $a = 5$ и $h = 3$. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$; определим дифференцируемую по Фреше функцию f на \mathbb{R} посредством $f(x) = x^3 + 10x - 12$ и многозначное отображение F на \mathbb{R} как $F(x) = \{2 - x, -3x\}$. Тогда алгоритм генерирует последовательность, которая сверхлинейно сходится к $x^* = 1$.

Решение. Заметим, что

$$(f + F)(x) = \{x^3 + 9x - 10, x^3 + 7x - 12\}.$$

Рассмотрим

$$(f + F)(x) = \{x^3 + 9x - 10\}.$$

Тогда очевидно, что $(f + F)^{-1}$ липшицево при $(-5.375, 0.5)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Более того, из этого утверждения следует, что $f + F$ имеет замкнутый график при $(0.5, -5.375) \in \text{grph}(f + F)$ и $\mathcal{D}f(x) = 3x^2 + 10$. С использованием (7) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_k) &= \{s_k \in \mathbb{R} : 0 \in f(x_k) + h\mathcal{D}f(x_k)s_k + F(x_k + s_k)\} \\ &= \left\{s_k \in \mathbb{R} : s_k = \frac{10 - 9x_k - x_k^3}{3hx_k^2 + 10h - 1}\right\}. \end{aligned}$$

Для $x_0 = -2$ следует, что $s_0 = 0.554$. Таким образом, с использованием (43) мы получим

$$\|s_k\| \leq \frac{2^p \eta M L (1 + (h - 1)(p + 1))}{(p + 1)(2^p - M L h a^p)} \|s_{k-1}\|^{p+1}.$$

Следовательно, для данных значений η , a , M , h , L и p очевидно, что алгоритм генерирует сверхлинейно сходящуюся последовательность с начальной точкой $x_0 = -2$ в окрестности $x^* = 0.5$, которая сходится к $\bar{x} = 1$, когда число итераций $k = 37$. Численный результат для этого случая представлен в таблице 1. Теперь, если мы рассмотрим многозначное отображение $(f + F)(x) = \{x^3 + 7x - 12\}$ и используем ту же процедуру, что и выше, мы можем показать, что алгоритм генерирует сверхлинейно сходящуюся последовательность с начальной точкой $x_0 = -2$ в окрестности $x^* = 0.5$, которая сходится к $\bar{x} = 1.3572$, когда число итераций $k = 41$. Это означает, что обобщенное уравнение $f(x) + F(x) \ni 0$ имеет два решения: $\bar{x} = 1$ и $\bar{x} = 1.3572$. Кривые $f + F$ представлены на рисунке 1.

Таблица 1. Численные результаты для примера 1.

Итерации	$(f + F)(x) = x^3 + 9x - 10$		Итерации	$(f + F)(x) = x^3 + 9x - 10$	
	x_k	$(f + F)(x_k)$		x_k	$(f + F)(x_k)$
1	-2.0000	-36.0000	20	0.9974	-0.0308
2	-1.4460	-26.0375	21	0.9982	-0.0210
3	-0.9015	-18.8460	22	0.9988	-0.0144
4	-0.3825	-13.4986	23	0.9992	-0.0099
5	0.0627	-9.4352	24	0.9994	-0.0067
6	0.3877	-6.4526	25	0.9996	-0.0046
7	0.6003	-4.3813	26	0.9997	-0.0032
8	0.7362	-2.9757	27	0.9998	-0.0022
9	0.8240	-2.0246	28	0.9999	-0.0015
10	0.8817	-1.3798	29	0.9999	-0.0010
11	0.9200	-0.9415	30	0.9999	-0.0007
12	0.9457	-0.6429	31	1.0000	-0.0005
13	0.9631	-0.4393	32	1.0000	-0.0003
14	0.9748	-0.3003	33	1.0000	-0.0002
15	0.9828	-0.2054	34	1.0000	-0.0002
16	0.9883	-0.1405	35	1.0000	-0.0001
17	0.9920	-0.0961	36	1.0000	-0.0001
18	0.9945	-0.0657	37	1.0000	0.0000
19	0.9962	-0.0450	-	-	-

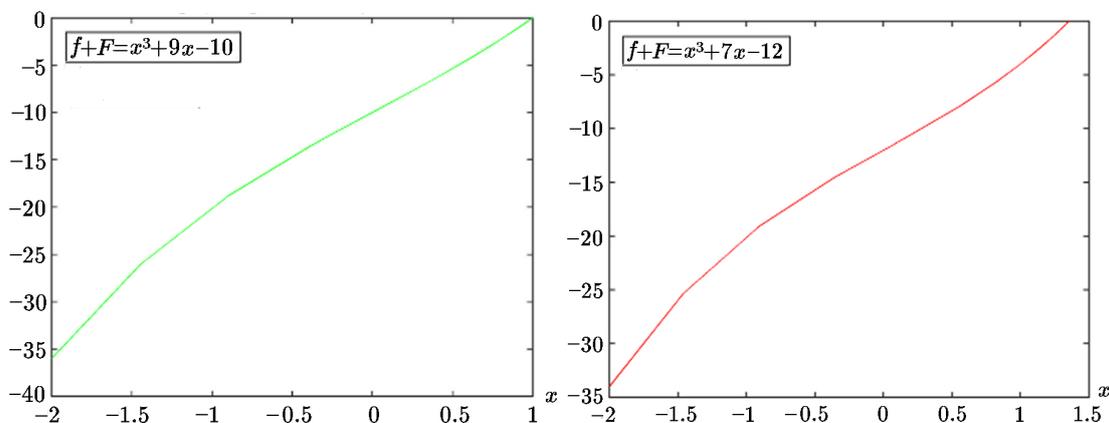


Рис. 1. Сверхлинейная сходимость алгоритма при 1 и 1.3572

Пример 2. Пусть $x_0 = (1, 2)$, $\eta = 4$ и $h = 5$. Определим дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ как $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$, а многозначное отображение $F : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ как $F(x_1, x_2) = \{0\}$. Тогда алгоритм генерирует по крайней мере одну последовательность, которая сходится к решению при $\bar{x} = (1.793495, -0.529877)$ $0 \in f(x) + F(x)$.

Для данных значений η и h и начальной точки при $x_0 = (1.000000, 2.000000)$, из таблицы 2 (полученной с помощью Matlab) следует, что алгоритм генерирует последовательность, которая сверхлинейно сходится к решению $(1.793495, -0.529877)$ (1). Кроме того, кривая $f + F$ представлена на рис. 2.

Таблица 2. Численные результаты для примера 2.

Итерации	x	$(f + F)(x)$	Итерации	x	$(f + F)(x)$
1	(1.000000, 2.000000)	14.0000	14	(1.784582, -0.530546)	-0.0160
2	(0.440000, -0.800000)	-6.0256	15	(1.788125, -0.530278)	-0.0096
3	(0.802988, -0.696467)	-3.7310	16	(1.790270, -0.530117)	-0.0058
4	(1.079607, -0.632078)	-2.3056	17	(1.791564, -0.530020)	-0.0035
5	(1.288379, -0.592354)	-1.4218	18	(1.792343, -0.529962)	-0.0021
6	(1.443692, -0.567962)	-0.8746	19	(1.792811, -0.529928)	-0.0012
7	(1.556934, -0.553031)	-0.5363	20	(1.793093, -0.529907)	-0.0007
8	(1.637400, -0.543917)	-0.3277	21	(1.793262, -0.529894)	-0.0004
9	(1.692884, -0.538368)	-0.1995	22	(1.793363, -0.529887)	-0.0003
10	(1.729963, -0.535001)	-0.1209	23	(1.793424, -0.529882)	-0.0002
11	(1.754030, -0.532963)	-0.0731	24	(1.793460, -0.529880)	-0.0001
12	(1.769277, -0.531733)	-0.0441	25	(1.793482, -0.529878)	-0.0001
13	(1.778760, -0.530992)	-0.0265	26	(1.793495, -0.529877)	-0.0000

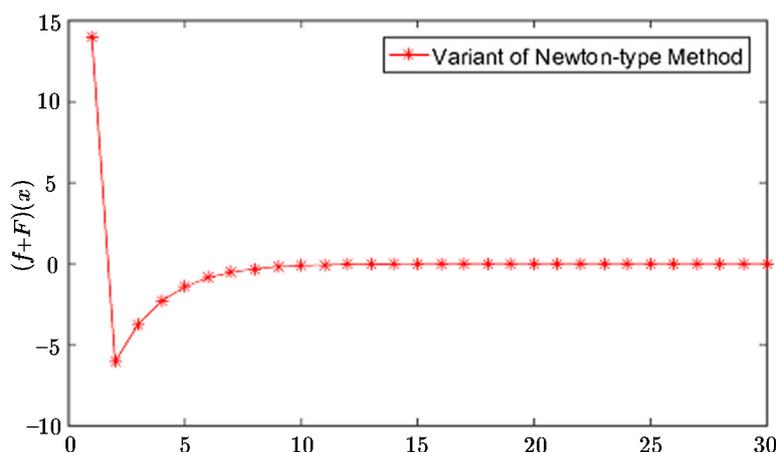


Рис. 2. Сверхлинейная сходимость алгоритма

5. Заключительные замечания

При $\eta > 1$ и $h > 1$ результаты полулокальной и локальной сходимости варианта метода Ньютона получены в предположении, что $(f + F)^{-1}$ — липшицево и $\mathcal{D}f$ есть (L, p) -непрерывна по Гельдеру. Действительно, мы показали, что если $\mathcal{D}f$ является (L, p) -непрерывной по Гельдеру, вариант метода типа Ньютона, определяемый алгоритмом, сверхлинейно сходится. Представлены применения к задаче нелинейного программирования и вариационному неравенству для обобщенного уравнения (1). Кроме того, мы представили два численных эксперимента, которые иллюстрируют теоретические результаты. По нашему основному результату можно сделать следующие выводы:

- Если $p = 0$, то $\mathcal{D}f$ удовлетворяет условию непрерывности с постоянной L , и мы получаем результат полулокальной линейной сходимости варианта метода Ньютона. В этом случае результат, полученный в данной статье, совпадает с результатом, представленным в [24, теорема 3.3]. В случае результата по локальной линейной сходимости он совпадает с результатом, представленным в [24, следствие 3.4] и [13, теорема 3.1].

- Если $p = 1$, то Df удовлетворяет условию Липшица, и мы получаем квадратичную сходимость варианта метода Ньютона, что является расширением соответствующего результата в [24, теорема 3.3].

Благодарности. Автор благодарит рецензентов за ценные предложения и комментарии, которые улучшили первоначальную версию рукописи.

Литература

1. **Dontchev A.L.** Local convergence of the Newton method for generalized equations // C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. — Paris, 1996. — Vol. 322, № 4. — P. 327–331.
2. **Dontchev A.L. and Hager W.W.** An inverse mapping theorem for set-valued maps // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 121, № 2. — P. 481–489.
3. **Dontchev A.L.** Uniform convergence of the Newton method for Aubin continuous maps // Serdica Math. J. — 1996. — Vol. 22. — P. 385–398.
4. **Dontchev A.L.** Local analysis of a Newton-type method based on partial linearization // Lectures in Applied Mathematics. — 1996. — Vol. 32. — P. 295–306.
5. **Dontchev A.L. and Rockafellar R.T.** Implicit Functions and Solution Mappings: A View from Variational Analysis. Second edition. — New-York: Springer-Verlag, 2014.
6. **Dontchev A.L. and Rockafellar R.T.** Convergence of inexact Newton methods for generalized equations // Math. Program. Ser. B. — 2013. — Vol. 139, № 1-2. — P. 115–137.
7. **Aragón Artacho F.J., Belyakov A., Dontchev A.L., and Lopez M.** Local convergence of quasi-Newton methods under metric regularity // Comput. Optim. Appl. — 2014. — Vol. 58, № 1. — P. 225–247.
8. **Ostrowski A.M.** Solution of Equations in Euclidian and Banach Spaces. — New-York and London: Academic Press, 1970.
9. **Pietrus A.** Does Newton’s method for set-valued maps converges uniformly in mild differentiability context? // Rev. Colombiana Mat. — 2000. — Vol. 34. — P. 49–56.
10. **Pietrus A.** Generalized equations under mild differentiability conditions // Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. — 2000. — Vol. 94, № 1. — P. 15–18.
11. **Mordukhovich B.S.** Sensitivity analysis in nonsmooth optimization: Theoretical Aspects of Industrial Design / D.A. Field and V. Komkov // SIAM Proc. Appl. Math. — 1992. — Vol. 58. — P. 32–46.
12. **Mordukhovich B.S.** Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory. — Berlin–Heidelberg, New York: Springer, 2006.
13. **Jean-Alexis C. and Pietrus A.** A variant of Newton’s method for generalized equations // Rev. Colombiana Mat. — 2005. — Vol. 39. — P. 97–112.
14. **Ortega J.M. and Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New-York and London: Academic Press, 1970.
15. **Aubin J.P.** Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. Oper. Res. — 1984. — Vol. 9, № 1. — P. 87–111.
16. **Aragón Artacho F.J., Dontchev A.L., Gaydu M., Geoffroy M.H., and Veliov V.M.** Metric regularity of Newton’s iteration // SIAM J. Control Optim. — 2011. — Vol. 49, iss. 2. — P. 339–362.
17. **Izmailov A.F. and Solodov M.V.** Newton-type Methods for Optimization and Variational Problems // Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. — Cham: Springer-Verlag, 2014.

18. **Izmailov A.F., Solodov M.V.** Inexact Josephy-Newton framework for generalized equations and its applications to local analysis of Newtonian methods for constrained optimization // *Comput. Optim. Appl.* — 2010. — Vol. 46, № 2. — P. 347–368.
19. **Aubin J.P. and Frankowska H.** *Set-valued Analysis.* — Boston: Birkhäuser, 1990.
20. **Penot J.P.** Metric regularity, openness and Lipschitzian behavior of multifunctions // *Nonlinear Anal.* — 1989. — Vol. 13. — P. 629–643.
21. **Geoffroy M.H., Hilout S., and Piétrus A.** Acceleration of convergence in Dontchev’s iterative method for solving variational inclusions // *Serdica Math. J.* — 2003. — Vol. 29, № 1. — P. 45–54.
22. **Geoffroy M.H. and Piétrus A.** A superquadratic method for solving generalized equations in the Hölder case // *Ricerche di Matematica LII.* — 2003. — Vol. 2. — P. 231–240.
23. **Rashid M.H.** A convergence analysis of Gauss–Newton-type method for Hölder continuous maps // *Indian J. of Mathematics.* — 2015. — Vol. 57, iss. 2. — P. 181–198.
24. **Rashid M.H.** Convergence analysis of a variant of Newton-type method for generalized equations // *Inter. J. of Computer Mathematics.* — 2018. — Vol. 95, iss. 3. — P. 584–600. — DOI: 10.1080/00207160.2017.1293819
25. **Rashid M.H.** Convergence analysis of extended Hummel–seebeck-type method for solving variational inclusions // *Vietnam J. Math.* — 2016. — Vol. 44. — P. 709–726. — DOI: 10.1007/s10013-015-0179-2
26. **Rashid M.H.** Extended Newton-type method and its convergence analysis for nonsmooth generalized equations // *J. Fixed Point Theory Appl.* — 2017. — Vol. 19. — P. 1295–1313. — DOI: 10.1007/s11784-017-0415-3
27. **Rashid M.H. and Yuan Y.X.** Convergence properties of a restricted Newton-type method for generalized equations with metrically regular mappings // *Applicable Analysis.* — 2017; <https://doi.org/10.1080/00036811.2017.1392018>
28. **Rashid M.H., Yu S.H., Li C., and Wu S.Y.** Convergence analysis of the Gauss–Newton-type method for Lipschitz-like mappings // *J. Optim. Theory Appl.* — 2013. — Vol. 158, iss. 1. — P. 216–233.
29. **Klatte D. and Kummer B.** Approximations and generalized Newton methods // *Mathematical Programming.* — 2018. — Vol. 68, № (1-2). — P. 673–716.
30. **Klatte D. and Kummer B.** *Nonsmooth Equations in Optimization: Regularity, Calculus, Methods and Applications* // *Series Nonconvex Optimization and Its Applications.* — Dordrecht–Boston, London: Kluwer Academic Publ.; Berlin: Springer, 2002. — Vol. 60.
31. **Cibulka R., Dontchev A.L., and Geoffroy M.H.** Inexact Newton methods and Dennis–Moré theorems for nonsmooth generalized equations // *SIAM J. Control Optim.* — 2015. — Vol. 53, iss. 2. — P. 1003–1019.
32. **Cibulka R., Dontchev A.L., Preininger J., Roubal T., and Veliov V.M.** Kantorovich-type theorems for generalized equations // *J. Convex Anal.* — 2018. — Vol. 2, iss. 2. — P. 459–486.
33. **Adly S., Cibulka R., and Ngai H.V.** Newton’s method for solving inclusions using set-valued approximations // *SIAM J. Optim.* — 2015. — Vol. 25, № 1. — P. 159–184.
34. **Adly S., Ngai H.V., and Nguyen V.V.** Newton’s method for solving generalized equations: Kantorovich’s and Smale’s approaches // *J. Math. Anal. Appl.* — 2016. — Vol. 439, № 1. — P. 396–418.
35. **Dembo R.S., Eisenstat S.C. and Steihaug T.** Inexact Newton methods // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1982. — Vol. 9. — P. 400–408.
36. **Silva G.N.** Kantorovich’s theorem on Newton’s method for solving generalized equations under the majorant condition // *Appl. Math. Comput.* — 2016. — Vol. 286. — P. 178–188.

37. **Robinson S.M.** Generalized equations and their solutions. Part I: basic theory // Math. Programming Stud.—1979.—Vol. 10.—P. 128–141.
38. **Robinson S.M.** Generalized equations and their solutions. Part II: applications to nonlinear programming // Math. Programming Stud.—1982.—Vol. 19.—P. 200–221.
39. **Ferris M.C. and Pang J.S.** Engineering and economic applications of complementarity problems // SIAM Rev.—1997.—Vol. 39.—P. 669–713.

Поступила в редакцию 1 февраля 2019 г.

После исправления 27 апреля 2019 г.

Принята к печати 4 февраля 2021 г.