ПМТФ, № 2, 1966

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТОЛБА ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Н. Черепанов, В. И. Яковлев

(Новосибирск)

Рассматривается нестационарное радиальное движение бесконечно длинного цилиндрического столба проводящего газа в переменном по времени продольном магнитном поле.

В предположении пропорциональности статического давления плазмы на границе столба внешнему магнитному давлению методом разделения переменных найдены точные решения системы уравнений магнитной гидродинамики. Проделаны некоторые численные расчеты и подсчитаны энергетические характеристики процесса взаимодействия. Приведены зависимости отношения полезной работы, совершаемой газом за бесконечный промежуток времени, к начальной энергии столба от магнитного числа Рейнольдса. Отметим: что подобный метод применен в работе [1], где, кроме усреднения температуры по сечению, пренебрегается инерцией среды; учет же инерции приводит к требованию пропорциональности статического давления к магнитному на границе столба.

Физически подобную модель можно, например, интерпретировать как расширение сжимаемого проводящего столба газа в непроводящей несжимаемой жидкости, находящейся в проницаемом бесконечном по оси симметрии цилиндре некоторого радиуса R. Тогда требование пропорциональности статического давления магнитному сводится к условию изменения внешнего давления на границе проницаемого цилиндра радиуса R по определенному закону, который может быть легко определен.

Примем следующие допущения.

(1) Проводимость газа конечна и определяется температурой

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \qquad (n \geqslant 0) \tag{0.1}$$

(2) Газ идеальный, вязкость и теплопроводность не учитываются.

(3) Токами смещения всюду пренебрегаем. В частности, считается возможным задаваться произвольным законом изменения напряженности магнитного поля на внешней границе расширяющегося цилиндрического столба, не рассматривая электромагнитных волн во внешнем непроводящем пространстве. Последнее справедливо, если скорость расширения намного меньше скорости света.

(4) На внешней границе столба поддерживается статическое давление, пропорциональное внешнему магнитному давлению.

Последнее требование связано с условием автомодельности задачи в смысле разделения переменных.

1. Основные уравнения. В предположениях (1) — (3) система уравнений магнитной гидродинамики в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rvH) = \frac{c^2}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right), \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv\rho)$$

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\rho p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 \qquad (p = R\rho T)$$

Здесь $H(r, t)$ и $v(r, t)$ — продольная и радиальная составляющие векторов $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{v}$ соответственно. Других составляющих векторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{v}$ не имеют ($d/dz \equiv 0$, $d/d\varphi \equiv 0$). Ищем решение, удовлетворяющее условию пропорционального расширения, т. е.

$$v(r, t) = \frac{r}{a(t)} \frac{da}{dt} \tag{1.2}$$

где $a(t)$ — неизвестный закон движения границы цилиндрического столба.

Введем обозначения (1.3)

$$h_1 = \frac{H}{H_0}, \quad p_1 = \frac{p}{H_0^2/8\pi}, \quad \theta_1 = \frac{T}{T_0}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{H_0^2/8\pi R T_0}, \quad \lambda = \frac{a}{a_0}$$

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{v_0 t}{a_0}, \quad t_0 = \frac{a_0}{v_0} = \frac{a_0}{\sqrt{RT_0}}, \quad \nu = \frac{c^2 t_0}{4\pi\sigma_0 a_0^2}, \quad v_0 = \sqrt{RT_0} = \frac{\sqrt{\gamma R T_0}}{\sqrt{\gamma}}$$

Здесь для безразмерных величин приняты масштабы: H_0 — напряженность поля на границе столба в начальный момент времени, a_0 — начальный радиус столба, T_0 — температура на границе столба в начальный момент времени, v_0 — характерная скорость, σ_0 — проводимость при температуре T_0. Уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\lambda^2 h_1) = \frac{\nu}{\lambda^2} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\xi}{\theta_1^n} \frac{\partial}{\partial\xi}(\lambda^2 h_1)\right]$$

$$\rho_1 \lambda'' \lambda = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial\xi}(p_1 + h_1^2), \qquad \frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} = -\frac{2\rho_1 \lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = -\varkappa p_1 \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{\rho_1} + 2\nu\varkappa \frac{1}{\rho_1\theta_1^n} \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial\xi}\right)^2, \qquad p_1 = \rho_1\theta_1 \tag{1.4}$$

$$\left(\varkappa = \frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - 1\right)$$

Третье уравнение системы (1.4) можно проинтегрировать. Получим

$$\rho_1 = \Phi(\xi) / \lambda^2(\tau) \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi(\xi)$— некоторая функция ξ. С использованием (1.5) и введением новых искомых функций

$$h(\xi, \tau) = \lambda^2(\tau) h_1(\xi, \tau), \qquad \theta(\xi, \tau) = \lambda^{2\varkappa}\theta_1(\xi, \tau) \tag{1.6}$$

остальные уравнения можно записать в виде

$$\frac{\lambda''}{\lambda(\tau)} = -\frac{1}{\xi\Phi(\xi)} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(p_1 + \frac{h^2}{\lambda^4}\right), \qquad \frac{\partial\theta^n}{\partial\tau} = \frac{2n\nu\varkappa}{\lambda^{6-2\varkappa n}} \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial\tau} = \frac{\nu}{\lambda^{2-2\varkappa n}} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{\theta^n}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right), \qquad p_1 = \frac{\Phi(\xi)\theta}{\lambda^{2+2\varkappa}} \tag{1.7}$$

Ищем частное решение системы (1.7) в виде

$$h(\xi, \tau) = T(\tau) Z(\xi), \quad \theta^n(\xi, \tau) = V(\tau) X(\xi), \quad p_1(\xi, \tau) = G(\tau) Y(\xi) \tag{1.8}$$

(т. е. автомодельное решение [1]); при этом будем считать, что

$$T(0) = 1, \qquad V(0) = 1, \qquad G(0) = 1 \tag{1.9}$$

Легко заметить, что разделение переменных в уравнениях (1.7) возможно при условии

$$\frac{T^2(\tau)}{\lambda^4(\tau)\, G(\tau)} = \text{const} = 1 \tag{1.10}$$

Здесь постоянная равна 1 в силу (1.9) и начального условия

$$\lambda(0) = 1 \tag{1.11}$$

Из (1.10) следует, что отношение статического давления к магнитному для каждой данной частицы в этом случае есть величина постоянная, не зависящая от времени. Это условие выполняется, если на внешней границе цилиндрического столба поддерживается давление, пропорциональное магнитному давлению (предположение (4)).

После подстановки (1.8) в систему (1.7), использования условия (1.10) и разделения переменных получаются следующие две системы уравнений:

для функций $T(\tau)$, $V(\tau)$, $G(\tau)$, $\lambda(\tau)$

$$\frac{\lambda''(\tau)}{\lambda(\tau)\,G(\tau)} = \alpha, \qquad \frac{V(\tau)\,\lambda^{2-2\varkappa n}}{T(\tau)}\frac{dT}{d\tau} = \beta$$

$$\frac{\lambda^{6+2\varkappa n}\,G(\tau)}{T^2(\tau)}\frac{dV}{d\tau} = \mu, \qquad \frac{\lambda^{2+2\varkappa n}\,G(\tau)}{V^{1/n}(\tau)} = \psi \tag{1.12}$$

для функций $X(\xi)$, $Y(\xi)$, $Z(\xi)$, $\Phi(\xi)$

$$-\frac{1}{\xi\Phi(\xi)}\frac{d}{d\xi}[Y(\xi) + Z^2(\xi)] = \alpha, \qquad \frac{\nu}{Z(\xi)}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\xi}{X(\xi)}\frac{dZ}{d\xi}\right] = \beta$$

$$\frac{2n\nu\varkappa}{Y(\xi)\,X(\xi)}\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)^2 = \mu, \qquad \frac{\Phi(\xi)}{Y(\xi)}\,X^{1/n}(\xi) = \psi \tag{1.13}$$

Здесь α, β, μ и ψ — некоторые постоянные величины. Ввиду принятых масштабных величин и условий нормировки (1.9) для функций от τ граничные условия для пространственных функций будут следующие:

$$Z(\xi)|_{\xi=1} = 1, \qquad X(\xi)|_{\xi=1} = 1, \qquad Y(\xi)|_{\xi=1} = q \tag{1.13}$$

где через q обозначено отношение статического давления к магнитному на границе рассматриваемого столба. На основании (1.9) постоянная ψ из последних уравнений (1.12) и (1.13) должна равняться единице.

2. Интегрирование полученных систем уравнений. Неизвестные функции должны удовлетворять не только системам уравнений (1.12), но и дополнительному условию (1.10), необходимому для получения рассматриваемого частного решения, поэтому постоянные α, β и μ не могут быть произвольными. Действительно, рассмотрим вначале систему уравнений для функций от переменной τ. Вместо функции $G(\tau)$ во все уравнения (1.12) подставим ее выражение через $\lambda(\tau)$ и $T(\tau)$ из (1.10).

Тогда для неизвестных $T(\tau)$, $V(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ будем иметь систему четырех уравнений

$$\lambda''(\tau)\,\lambda^3(\tau) = \alpha T^2(\tau), \qquad \frac{d\ln T}{d\tau} = \frac{\beta}{\lambda^{2-2\varkappa n}}\frac{1}{V(\tau)}$$

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\mu}{\lambda^{2-2\varkappa n}}, \qquad T(\tau) = V^{1/2n}(\tau)\,\lambda^{1-\varkappa}(\tau) \tag{2.1}$$

Число уравнений больше числа неизвестных, поэтому система может быть совместна только при наличии определенных соотношений между постоянными α, β и μ. Для получения этих соотношений рассмотрим три последних уравнения системы (2.1); имеем

$$T(\tau) = [\lambda(\tau)]^{\frac{(1-\varkappa)2n\beta}{2n\beta-\mu}}, \qquad V(\tau) = [\lambda(\tau)]^{\frac{(1-\varkappa)2n\mu}{2n\beta-\mu}} \tag{2.2}$$

$$\frac{(1-\varkappa)\,2n}{2n\beta-\mu}\,\lambda'(\tau) = [\lambda(\tau)]^{\frac{2n\beta(2\varkappa n-1)+\mu(1-2n)}{2n\beta-\mu}} \tag{2.3}$$

Продифференцируем последнее уравнение и запишем в виде

$$\lambda''(\tau) = \frac{2n\beta - \mu}{[(1-\varkappa)\,2n]^2}\,[2n\beta\,(2\varkappa n - 1) + \mu\,(1 - 2n)]\,[\lambda(\tau)]^{\frac{2n\beta(4\varkappa n - 3) + \mu(3 - 4n)}{2n\beta - \mu}} \tag{2.4}$$

Подставляя $T(\tau)$ из (2.2) в первое уравнение системы (2.1), получаем другое уравнение для $\lambda(\tau)$

$$\lambda''(\tau) = \alpha\lambda^{\frac{4n\beta(1-\varkappa)}{2n\beta-\mu} - 2} \tag{2.5}$$

Для совместности системы (2.1) уравнения (2.4) и (2.5) должны быть тождественны. Необходимо раздельно рассмотреть два случая.

Первый случай $\alpha \neq 0$. Приравниваем показатели степени при λ, а также постоянные множители в правых частях этих уравнений (2.4) и (2.5). В результате получим

$$\beta = \frac{\mu}{\varkappa + 2\varkappa n - 1}, \qquad \alpha = -\mu^2\,\frac{2n+1}{4n^2(\varkappa + 2\varkappa n - 1)^2} \tag{2.6}$$

Здесь при выводе выражения α использовалось выражение для β.

Таким образом, из трех постоянных α, β и μ независимой будет только одна из них. Из уравнения (2.3) и условий (1.11) и (2.6) имеем

$$\lambda(\tau) = \left[1 + \frac{(n+1)\mu}{n(\varkappa + 2\varkappa n - 1)}\,\tau\right]^{\frac{2n+1}{2(n+1)}} \qquad \left(\mu = k\,\frac{2n(\varkappa + 2\varkappa n - 1)}{2n+1}\right) \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.2) следует

$$T(\tau) = \lambda^{\frac{2n}{2n+1}}, \qquad V(\tau) = \lambda^{\frac{2n(\varkappa + 2\varkappa n - 1)}{2n+1}} \tag{2.8}$$

Независимая постоянная μ в (2.7) выражена через безразмерную начальную скорость $k = \lambda'(0)$.

Второй случай $\alpha = 0$. Для тождественности уравнений (2.4) и (2.5) необходимо, чтобы постоянный множитель в правой части уравнения (2.4) равнялся нулю. Для этого имеются две возможности.

Первая из них $2n\beta - \mu = 0$ приводит к тривиальному решению $\lambda'(\tau) \equiv \equiv 0$. Вторая из них $2n\beta\,(2\varkappa n - 1) + \mu\,(1 - 2n) = 0$ дает

$$\beta = \frac{(2n-1)\mu}{2n(2\varkappa n - 1)} \tag{2.9}$$

Здесь

$$\lambda(\tau) = 1 + k\tau, \qquad k = \frac{\mu}{2\varkappa n - 1} \tag{2.10}$$

$$T(\tau) = \lambda^{\frac{2n-1}{2n}}, \qquad V(\tau) = \lambda^{2\varkappa n - 1} \tag{2.11}$$

Таким образом, система уравнений для функций от τ полностью разрешена.

Как следует из (2.8) и (2.11), полученное решение характеризуется тем, что внешнее магнитное поле (т. е. магнитное поле на внешней поверхности столба) не остается постоянным и по мере увеличения радиуса столба падает. Действительно,

$$h_1(1, \tau) = \frac{T(\tau)}{\lambda^2(\tau)} = \begin{cases} \lambda^{\vartheta} & \text{при } \alpha = 0 \ (\vartheta = -(2n+1)/2n) \\ \lambda^{\theta} & \text{при } \alpha \neq 0 \ (\theta = -(2n+2)/(2n+1)) \end{cases}$$

3. Решение системы уравнения (1.13) для пространственных функций. Первый случай $\alpha = 0$. Из первого уравнения системы (1.13) при $\alpha = 0$ и граничных условий (1.14) имеем

$$Y(\xi) = q_1 - Z^2(\xi), \qquad q_1 = 1 + q \tag{3.1}$$

Из третьего уравнения системы (1.13) с использованием (3.1) получаем

$$X(\xi) = \frac{2n\nu\varkappa}{\mu}\frac{1}{Y(\xi)}\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)^2 = \frac{2n\nu\varkappa}{\mu}\frac{1}{q_1 - Z^2}\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)^2 \tag{3.2}$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы (1.13); пользуясь (2.9), получим

$$Z_{\xi\xi}'' + B\frac{Z}{q_1 - Z^2}(Z_\xi')^2 - \frac{1}{\xi}Z_\xi' = 0 \qquad \left(B = 2 + \frac{(2n-1)\varkappa}{2\varkappa n - 1}\right) \tag{3.3}$$

Граничные условия для этого уравнения имеем в виде

$$Z(1) = 1, \qquad \left.\frac{dZ}{d\xi}\right|_{\xi=1} = \left(\frac{\mu}{2n\nu\varkappa}q\right)^{1/2} = \left(\frac{k(2\varkappa n - 1)}{2n\nu\varkappa}q\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Второе условие получается из третьего уравнения системы (1.13) и граничных условий (1.14) для функций $X(\xi)$, $Y(\xi)$.

Для решения уравнения (3.3) введем новую независимую переменную $x = \ln\xi$; для функции $u(x) = Z(\xi)$ получаем

$$u'' - 2u' + B\frac{u}{q_1 - u^2}(u')^2 = 0$$

Это уравнение не содержит явно независимой переменной x. Поэтому введем новую функцию $\varphi(u) = u'$; тогда для неизвестной φ получим

$$\varphi' + B\frac{u}{q_1 - u^2}\varphi = 2, \qquad \varphi(1) = \left(\frac{k}{\nu}\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}q\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

так как $x = 0$ при $\xi = 1$, то граничное условие получается из (3.4)

$$u|_{x=0} = Z(\xi)|_{\xi=1} = 1, \qquad u_x'|_{x=0} = \xi Z_\xi'|_{\xi=1} = \left(\frac{k}{\nu}\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}q\right)^{1/2}$$

Решение уравнения (3.5) имеет вид

$$\varphi = (q_1 - u^2)^{\frac{B}{2}}\left[2\int_1^u \frac{du}{(q_1 - u^2)^{B/2}} + q^{-\frac{B}{2}}\left(\frac{k}{\nu}\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}q\right)^{1/2}\right] \tag{3.6}$$

Так как $\varphi = du\,/\,dx$, то из (3.6) и условия $u(0) = 1$ находим

$$x = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{2q^{B/2}}{K}\int_1^u \frac{du}{(q_1 - u^2)^{B/2}} + 1\right\} \qquad \left(K = \left(\frac{k}{\nu}\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}q\right)^{1/2}\right) \tag{3.7}$$

Отсюда получается искомое решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условиям (3.4)

$$\xi = \left\{\frac{2q^{B/2}}{K}\int_1^Z \frac{d\omega}{[q_1 - \omega^2]^{B/2}} + 1\right\}^{1/2} \tag{3.8}$$

Входящее сюда через выражение (3.7) для K отношение $k\,/\,\nu$ по сути представляет магнитное число Рейнольдса, так как

$$\frac{k}{\nu} = \frac{4\pi\sigma_0 a_0 a'(t)|_{t=0}}{c^2} = R_m \tag{3.9}$$

Обозначив через Z_0 значение Z при $\xi = 0$ из (3.8) с учетом (3.7) имеем

$$\int\limits_{Z_0}^{1} \frac{d\omega}{(q_1 - \omega^2)^{B/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\nu}\,\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}\right)^{1/2} q^{\frac{1-B}{2}} \qquad (3.10)$$

это дает зависимость величины Z_0 от магнитного числа Рейнольдса R_m. Используя это соотношение, выражение для $Z\,(\xi)$ можно записать в виде

$$\xi = \left(1 - \frac{\psi(Z)}{\psi(Z_0)}\right)^{1/2} \qquad \left(\psi(Z) = \int\limits_{Z}^{1} f(\omega)\, d\omega, \; f(\omega) = \frac{1}{(q_1 - \omega^2)^{B/2}}\right) \qquad (3.11)$$

Таким образом, для случая $\alpha = 0$ систему уравнения для пространственных функций также удалось проинтегрировать до конца (решение для $Y\,(\xi)$ дается формулой (3.1), для $X\,(\xi)$ — формулой (3.2) и решение для $\Phi\,(\xi)$ получается из четвертого уравнения системы (1.13)).

Второй случай $\alpha \neq 0$. В системе уравнений (1.13) постоянные α, β и μ, согласно (2.6) и (2.7), однозначно определяются заданием безразмерной начальной скорости $k = \lambda'\,(0)$. Систему (1.13) проинтегрировать аналитически не удастся, поэтому приведем ее к виду, удобному для численного решения на ЭВМ.

Для этого из двух последних уравнений системы (1.13) функции $\Phi\,(\xi)$ и $X\,(\xi)$ выразим через $Y\,(\xi)$ и $Z\,(\xi)$; имеем

$$X(\xi) = \frac{2n\nu\varkappa}{\mu}\,\frac{1}{Y(\xi)}\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)^2, \qquad \Phi(\xi) = \left[\frac{2n\nu\varkappa}{\mu}\right]^{-1/n} Y^{1+1/n}(\xi)\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)^{-2/n} \qquad (3.12)$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения системы (1.13), получим систему двух уравнений для функций $Y\,(\xi)$ и $Z\,(\xi)$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi\,\frac{Y(\xi)}{Z_\xi'}\right] = \frac{2n\varkappa}{\varkappa + 2n\varkappa - 1}\,\xi Z$$

$$\frac{d}{d\xi}\,[Y + Z^2] = \frac{(2n+1)(2n\nu\varkappa)^{-1/n}}{4n^2(\varkappa + 2\varkappa n - 1)^2}\,\mu^{2+1/n}\xi Y^{1+1/n}(Z_\xi')^{-2/n} \qquad (3.13)$$

Произведем замену независимой переменной $x = \xi^2$ и приведем уравнения (3.13) к виду

$$\frac{d}{dx}\,\frac{Y}{Z_x'} = AZ, \qquad \frac{d}{dx}\,[Y + Z^2] = Dx^{-1/n}Y^{1+1/n}(Z_x')^{-2/n} \qquad (3.14)$$

$$A = \frac{2n\varkappa}{\varkappa + 2n\varkappa - 1}, \qquad D = k^2(2n+1)^{-(n+1)/n}\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/n}\left(\frac{\varkappa + 2\varkappa n - 1}{\varkappa}\right)^{1/n} 2^{-\frac{n+2}{n}}$$

Введем новые неизвестные функции

$$\psi(x) = \frac{Y(x)}{Z_x'}, \qquad \varphi(x) = Z_x' \qquad (3.15)$$

Из уравнений (3.14) получим для неизвестных $\psi\,(x)$, $Z\,(x)$, $\varphi\,(x)$ систему уравнений

$$\frac{d\psi}{dx} = AZ, \qquad \frac{dZ}{dx} = \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dx} = D\left(\frac{\psi}{x}\right)^{1/n}\varphi^{(n-1)/n} - Z\,\frac{\varphi}{\psi}\,(2 + A) \qquad (3.16)$$

На основании (1.14) и (3.4) для искомых функций имеем следующие граничные условия:

$$Z(x)\big|_{x=1} = 1, \quad \varphi(x)\big|_{x=1} = \frac{K}{2}, \quad \psi(x)\big|_{x=1} = \frac{2q}{K} \quad \left(K = \left(\frac{k}{\nu}\,\frac{2\varkappa n - 1}{2\varkappa n}\,q\right)^{1/2}\right) \qquad (3.17)$$

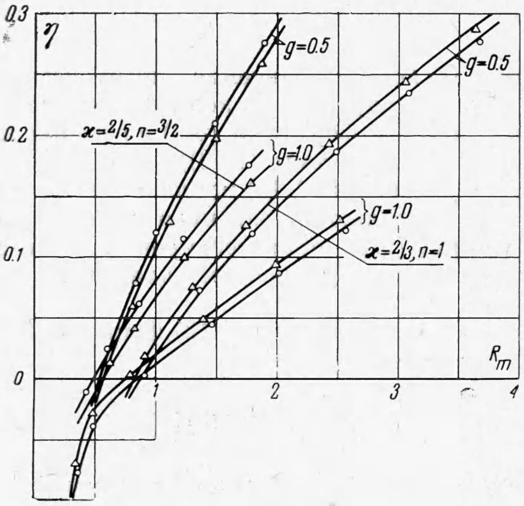
Таким образом, нахождение пространственных функций $Z(\xi)$, $Y(\xi)$, $\Phi(\xi)$ и $X(\xi)$ в случае $\alpha \neq 0$ сводится к интегрированию системы (3.15) с условиями (3.17).

Были проведены некоторые численные расчеты и подсчитаны энергетические характеристики процесса взаимодействия, т. е. величины работы, совершаемой при расширении столба против электрических объемных сил (ЭОС), джоулевых потерь внутри проводящего газа, изменения внутренней и кинетической энергий. На фигуре в качестве примера приведены некоторые значения коэффициента η в зависимости от магнитного числа Рейнольдса R_m (кружочки соответствуют значению $k = 1.0$, треугольники — $k = 0.5$). Коэффициент η определяется как отношение полезной работы, совершенной за время от $t = 0$ до $t = \infty$, к начальной энергии столба, т. е.

$$\eta = \frac{A_\infty - Q}{W_0 + U_0}$$

где A_∞ и Q_∞ — работа против ЭОС и величина джоулевых потерь за указанный промежуток времени, а W_0, U_0 — соответственно кинетическая и внутренняя энергии в начальный момент времени.

Выражения для энергетических величин A_∞, Q_∞, W и U здесь не приведены, так как они легко получаются из самого смысла этих величин.



Зависимости, полученные при других значениях параметров $\varkappa$, n, q, k в обоих случаях ($\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$) аналогичны приведенным, только при малых q допустимый интервал изменения R_m (при которых $0 \leqslant Z_0 \leqslant 1$) лежит в области бо́льших значений, и поэтому значения η на этом интервале всюду положительны.

Из приведенных графиков видно, что при некоторых значениях R_m разность $A_\infty - Q_\infty$ становится отрицательной, хотя совершаемая против ЭОС работа A_∞ при этом положительна. В работе [2] подобное явление было получено для случая, когда в начальный момент времени магнитное поле внутри столба отсутствовало, а на границе столба напряженность магнитного поля не равнялась нулю.

Приведенные данные показывают, что подобное явление может иметь место и в случае непрерывного начального распределения магнитного поля внутри и на границе столба (в данном случае начальное распределение магнитного поля определяется функцией $Z(\xi)$).

Следует подчеркнуть, что в данной работе, так же как в работе [2], все энергетические величины относятся к промежутку времени, начинающемуся с некоторого «начального» момента, и не рассматривается процесс получения этого начального состояния и его энергетические характеристики.

Поступила 27 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И., Шафранов В. Д. Плазменный шнур при наличии продольного магнитного поля. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 2, Изд-во АН СССР, 1958.
2. Яковлев В. И. Индукционное взаимодействие расширяющегося плазменного шнура с внешним электрическим контуром. ПМТФ, 1963, № 2.