$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65J15, 65H10, 65G99, 47J25

Полулокальная сходимость модифицированного метода Чебышева–Галлея для нелинейных операторов в случае неограниченной третьей производной*

Н. Гупта, Дж.П. Джаисвал

Department of Mathematics Maulana Azad National Institute of Technology Bhopal, M.P. India-462003
E-mails: neha.gupta.mh@gmail.com (Гупта Н.), asstprofjpmanit@gmail.com (Джаисвал Дж.П.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 14, 2021.

Гупта Н., Джаисвал Дж.П. Полулокальная сходимость модифицированного метода Чебышева–Галлея для нелинейных операторов в случае неограниченной третьей производной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 47–61.

В данной статье мы анализируем полулокальную сходимость одного класса модифицированных методов Чебышева–Галлея при двух различных множествах предположений. В первом множестве мы просто предположили существование границы производной Фреше второго порядка вместо третьего порядка. Во втором множестве гипотез граница нормы производной Фреше третьего порядка предполагается при начальной итерации, предпочтительно предполагавшейся ранее на области определения данного оператора при выполнении условия локальной ω-непрерывности для доказательства сходимости, существования и единственности с последующим нахождением границы априорной ошибки. Два численных эксперимента убедительно подтверждают теорию, изложенную в данной статье.

DOI: 10.15372/SJNM20210104

Ключевые слова: *Банахово пространство, полулокальная сходимость, ω-условие непрерывности, Метод Чебышева–Галлея, граница ошибки.*

Gupta N., Jaiswal J. P. Semilocal convergence of Modified Chebyshev-Halley method for nonlinear operators in case of unbounded third derivative // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 47–61.

In the present discussion, we analyze the semilocal convergence of a class of modified Chebyshev–Halley methods under two different sets of assumptions. In the first set, we just assumed the bound of the second order Fréchet derivative in lieu of the third order. In the second set of hypotheses, the bound of the norm of the third order Fréchet derivative is assumed at initial iterate preferably supposed it earlier on the domain of the given operator along with fulfillment of the local ω-continuity in order to prove the convergence, existence and uniqueness followed by a priori error bound. Two numerical experiments strongly support the theory included in this paper.

Keywords: *Banach space, semilocal convergence, ω-continuity condition, Chebyshev–Halley method, error bound.*

*Данное исследование было поддержано Советом по научным и техническим исследованиям (SERB) Нью-Дели, Индия в рамках программы стартового гранта (для молодых ученых) (№ YSS/2015/001507).

1. Введение

В различных дисциплинах нахождение корней нелинейных уравнений вида

$$M(x) = 0 \tag{1.1}$$

является одной из проблем, наиболее часто встречающихся в научных работах. Обычно точное решение нелинейных уравнений невозможно. Однако в большинстве случаев приближенные решения могут быть применимы в таких проблемах, как прогноз погоды, точное позиционирование спутниковых систем на желаемой орбите, измерение магнитуд землетрясений и другие инженерные технологии высокого уровня. Среди всех простых методов поиска нулей наиболее известным и широко применяемым методом является классический метод Ньютона [1]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

которым можно легко решить уравнение (1.1), если подходящее первоначальное предположение x_0 взять около нуля α. Этот метод сходится квадратично и требует двух вычислений на итерацию, а именно f и f'. Итерационные выражения подробно изучались в книге Трауба [2], также некоторые книги и статьи были опубликованы в 1960-х, 70-х и 80-х годах (см. [3–10] и имеющиеся там ссылки). В последние годы интерес к итерационным методам вырос в связи с быстрым развитием цифровых компьютеров, передовой компьютерной арифметики и символьных вычислений. Трауб [2] разделил итерационные методы на две группы, а именно на одноточечные итерационные методы и многоточечные итерационные методы. Многие исследователи изучали различные типы итерационных методов различного порядка для решения нелинейных уравнений.

Сходимость итерационных методов обычно основывается на двух типах анализа: анализе полулокальной и анализе локальной сходимости. В первом случае сходимость итерационных методов зависит от информации, имеющейся о начальной точке, а во втором случае — от информации о данном решении. Результаты по полулокальной сходимости исследовались первоначально Л.В. Канторовичем в [11]. По сути, он ввел метод рекуррентных соотношений, а затем описал метод мажоранты. Впоследствии Ралл в [12] и многие другие исследователи изучали вопрос улучшения результатов на основе рекуррентных соотношений. Алгоритмы более высокого порядка играют важную роль там, где требуется быстрая сходимость, как в жестких системах уравнений. Для увеличения порядка сходимости было предложено несколько методов более высокого порядка с использованием различных условий непрерывности; а именно, условие непрерывности Липшица исследовалось Вангом с соавторами в [13, 14], Сингхом с соавторами в [15], Джаисвалом в [16] (это лишь несколько примеров). Впоследствии многие авторы исследовали более слабое условие непрерывности, чем условие Липшица, а именно, условие непрерывности Гельдера, например, Хернандес в [17], Парида и Гупта в [18, 19], Ванг и Коу в [20] (это лишь некоторые авторы). Часто встречаются нелинейные уравнения, которые не удовлетворяют условиям непрерывности Липшица или Гельдера; тогда нам нужна обобщенная форма непрерывности, т. е. ω-непрерывность, которая изучалась Эскерро и Хернандесом в [21, 22], Паридой и Гупта в [23, 24], Прашантом и Гупта в [25, 26], Вангом и Коу в [27–29] и др.

Существует хорошо зарекомендовавший себя метод Чебышева–Галлея, который изучался на римановых многообразиях [30]. Однако здесь мы сосредоточимся на анализе полулокальной сходимости модифицированного метода Чебышева–Галлея при помощи рекуррентных соотношений при двух различных более слабых множествах предположений.

Статья организована следующим образом. В пункте 2 изложен метод и даны некоторые предварительные результаты. Нормы и некоторые рекуррентные соотношения приводятся в п. 3. Пункты 4 и 5 содержат анализ полулокальной сходимости метода при двух различных множествах гипотез. Теоретическое исследование подтверждается численными примерами в п. 6, а заключение представлено в п. 7.

2. Метод и некоторые предварительные результаты

В статье используются следующие обозначения: $X \equiv$ — непустое открытое подмножество G_1; $X_0 \subseteq X$ — непустое выпуклое подмножество, G_1, $G_2 \equiv$ — банаховы пространства, $V(x,m) = \{y \in G_1 : \|y-x\| < m\}$, $\overline{V(x,m)} = \{y \in G_1 : \|y-x\| \le m\}$.

Здесь мы обсуждаем полулокальную сходимость класса модифицированных методов Чебышева–Галлея в банаховом пространстве, приведенного в [31]:

$$\begin{aligned} l_n &= x_n - \left(I + \frac{1}{2}K_M(x_n) + \frac{d}{2}K_M(x_n)^2\right)\zeta_n M(x_n), \\ x_{n+1} &= l_n - \left[I + K_M(x_n) + K_M(x_n)^2 + \frac{1}{2}\zeta_n M''(\nu_n)K_M(x_n)\zeta_n M(x_n)\right]\zeta_n M(l_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где I — тождественный оператор, d — параметр, такой что $d \in [-1,1]$, $\zeta_n = [M'(x_n)]^{-1}$, $K_M(x_n) = \zeta_n M''(\nu_n)\zeta_n M(x_n)$ и $\nu_n = x_n - \frac{1}{2}\zeta_n M(x_n)$. Для анализа полулокальной сходимости схемы (2.1), Ванг и Коу [31] предположили следующие гипотезы:

$(A1)$ $\|\zeta_0 M(x_0)\| \le a$,

$(A2)$ $\|\zeta_0\| \le b$,

$(A3)$ $\|M''(x)\| \le \sigma_1$, $x \in X$,

$(A4)$ $\|M'''(x)\| \le \sigma_2$, $x \in X$,

$(A5)$ $\|M'''(x) - M'''(y)\| \le \omega(\|x-y\|)$ $\forall\, x, y \in X$,

где $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая функция при $x > 0$ такая, что $\omega(x) \ge 0$ и удовлетворяющая $\omega(\varepsilon l) \le \phi(\varepsilon)\omega(l), \varepsilon \in [0,1]$ и $l \in [0,+\infty)$, где $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ также непрерывная и неубывающая. Однако мы обнаружили некоторые нелинейные функции, у которых третья производная неограничена в данной области, но представляется ограниченной в некоторой конкретной точке области. В этом можно убедиться на следующем примере. Предположим, что имеется функция f, определенная на $(-2,2)$ и заданная в [32] как

$$f(x) = \begin{cases} x^3\ln(x^2) - 6x^2 - 3x + 8, & x \in (-2,0) \cup (0,2), \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ясно, что $f'''(x)$ неограничена в $(-2,2)$, но ограничена при $x = 1 \in (-2,2)$. Следовательно, чтобы избежать ситуации с неограниченной величиной, мы просто заменим условие $(A4)$ более мягкой версией. Для этого мы можем предположить, что норма производной Фреше третьего порядка ограничена на начальной итерации как

$(B1)$ $\|M'''(x_0)\| \le \overline{H}$, $x_0 \in X_0$, где x_0 — начальная аппроксимация. Кроме того, мы также заменим условие $(A5)$ на локальное условие ω-непрерывности следующим образом:

$(B2)$ $\|M'''(x) - M'''(y)\| \le \omega(\|x - y\|)\ \forall\ x, y \in X_0$,

где $\varepsilon > 0$. Теперь возьмем $\varepsilon = \dfrac{a}{\tilde{\alpha}_0}$, где $\tilde{\alpha}_0$ будет определено позднее, а разумность выбора такого ε будет доказана. Кроме того, некоторые авторы предполагают частичные условия вместо того, чтобы рассматривать все условия оператора. Нелинейное интегральное уравнение смешанного типа Гаммерштейна [33],

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{1}{2}x(t)^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{16}x(t)^3\right)dt, \quad s \in [0,1], \tag{2.3}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$, $G(s,t)$ — функция Грина, определяемая как

$$G(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & t \le s, \\ s(1-t), & s \le t, \end{cases}$$

является примером, также подтверждающим эту идею, которая будет подробно обсуждаться позднее в пункте 6.

Начнем с нелинейного оператора $M : X \subseteq G_1 \to G_2$ и предположим только, что гипотезы (A1)–(A3) верны. Рассмотрим следующие вспомогательные скалярные функции, из которых h_1, h_2 и q взяты из [31], а q_1 и q_2 пересчитываются следующим образом:

$$h_1(s) = q(s) + \frac{s}{2}\left[1 + s + \frac{3}{2}s^2\right]\left[1 + |d|s + q(s)^2\right], \tag{2.4}$$

$$h_2(s) = \frac{1}{1 - sh_1(s)}, \tag{2.5}$$

$$q_1(s) = \left[s + \frac{3}{2}s^2 + s\left(1 + \frac{s}{2} + |d|\frac{s^2}{2}\right)\left(1 + s + \frac{3}{2}s^2\right) + \frac{s}{2}\left(1 + s + \frac{3}{2}s^2\right)^2 q_2(s)\right]q_2(s), \tag{2.6}$$

где

$$q_2(s) = \frac{s}{2}\left[1 + |d|s + q(s)^2\right], \tag{2.7}$$

и

$$q(s) = 1 + \frac{s}{2} + \frac{|d|}{2}s^2. \tag{2.8}$$

Приведенные выше функции играют важную роль, поэтому отметим некоторые из их свойств. Пусть $\overline{f}(s) = h_1(s)s - 1$. Поскольку $\overline{f}(0) = -1 < 0$ и $\overline{f}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{231}{1024} > 0$, то функция $\overline{f}(s)$ имеет хотя бы один вещественный корень в $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Пусть τ — наименьший положительный корень, тогда, очевидно, $\tau < \frac{1}{2}$. Начнем со следующих лемм, которые будут использованы позже в основной теореме (теоремах).

Лемма 2.1. *Пусть функции h_1, h_2 и q_1 заданы в уравнениях* (2.4), (2.5) *и* (2.6) *соответственно, и τ — наименьший положительный действительный корень $h_1(s)s - 1 = 0$. Тогда*

(a) *$h_1(s)$ и $h_2(s)$ возрастают и $h_1(s) > 1$, $h_2(s) > 1$ для $s \in (0, \tau)$,*

(б) *для $s \in (0, \tau)$, $q_1(s)$ — возрастающая функция.*

Доказательство. Доказательство очевидно из функций h_1, h_2 и q_1, данных в выражениях (2.4), (2.5) и (2.6) соответственно. $\square$

Определим $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\alpha_0 = \sigma_1 ba$ и $\delta_0 = h_2(\alpha_0)q_1(\alpha_0)$. Обозначим следующие последовательности:

$$a_{n+1} = \delta_n a_n, \tag{2.9}$$

$$b_{n+1} = h_2(\alpha_n)b_n, \tag{2.10}$$

$$\alpha_{n+1} = \sigma_1 b_{n+1}a_{n+1} = h_2(\alpha_n)\delta_n\alpha_n, \tag{2.11}$$

$$\delta_{n+1} = h_2(\alpha_{n+1})q_1(\alpha_{n+1}), \tag{2.12}$$

где $n \geq 0$. Некоторые важные свойства этих последовательностей даны в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Если $\alpha_0 < \tau$ и $h_2(\alpha_0)\delta_0 < 1$, где τ — наименьший положительный корень $h_1(s)s - 1 = 0$, то мы имеем*
(а) $h_2(\alpha_n) > 1$ *и* $\delta_n < 1$ *для* $n \geq 0$,
(б) *последовательности* $\{a_n\}$, $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\delta_n\}$ *являются убывающими,*
(в) $h_1(\alpha_n)\alpha_n < 1$ *и* $h_2(\alpha_n)\delta_n < 1$ *для* $n \geq 0$.

Доказательство. Доказательство легко проводится с помощью математической индукции. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть функции h_1, h_2 и q_1 даны в соотношениях* (2.4), (2.5) *и* (2.6) *соответственно. Предположим, что $\lambda \in (0,1)$. Тогда $h_1(\lambda s) < h_1(s)$, $h_2(\lambda s) < h_2(s)$ и $q_1(\lambda s) < \lambda^2 q_1(s)$ для $s \in (0,\tau)$.*

Доказательство. Для $\lambda \in (0,1)$, $s \in (0,\tau)$ эта лемма может быть доказана с использованием уравнений (2.4), (2.5) и (2.6). $\square$

3. Рекуррентные соотношения для метода (2.1)

Здесь мы охарактеризовали некоторые нормы, которые уже были получены в статье [31] для метода (2.1), и пересчитали некоторые из них.

Для $n = 0$, существование ζ_0 означает существование ν_0, y_0, и мы имеем

$$\|y_0 - x_0\| \leq a_0, \quad \|\nu_0 - x_0\| \leq \frac{1}{2}a_0, \tag{3.1}$$

т. е. y_0 и $\nu_0 \in V(x_0, Sa)$, где $S = \frac{h_1(\alpha_0)}{1-\delta_0}$. Также

$$\|K_M(x_0)\| \leq \|\zeta_0\|\|M''(\nu_0)\|\|\zeta_0 M(x_0)\| \leq \alpha_0, \tag{3.2}$$

Из второго подшага рассмотренной схемы следует, что

$$\begin{aligned}\|l_0 - x_0\| &\leq \left\| I + \frac{1}{2}K_m(x_0) + \frac{d}{2}K_M(x_0)^2 \right\| \|\zeta_0 M(x_0)\| \\ &\leq \left[1 + \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{|d|}{2}\alpha_0^2\right] a_0 \leq q(\alpha_0)a_0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Из последнего подшага уравнения (2.1) мы можем записать

$$\begin{aligned}\|x_1 - l_0\| &\le \left\| -\left[I + K_M(x_0) + K_M(x_0)^2 + \frac{1}{2}\zeta_0 M''(\nu_0)K_M(x_0)\Gamma_0 M(x_0)\right]\right\| \|\zeta_0 M(l_0)\| \\ &\le \left[1 + \alpha_0 + \alpha_0^2 + \frac{1}{2}b_0\sigma_1\alpha_0 a_0\right] b_0\|M(l_0)\| \\ &\le \left[1 + \alpha_0 + \frac{3}{2}\alpha_0^2\right] b_0\|M(l_0)\|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из формулы Тейлора мы имеем

$$M(l_0) = M(x_0) + M'(x_0)(l_0 - x_0) + \int_0^1 \Big[M'(x_0 + t(l_0 - x_0)) - M'(x_0)\Big] dt(l_0 - x_0). \tag{3.5}$$

Из приведенного выше уравнения следует, что

$$\|M(l_0)\| \le q_2(\alpha_0)\frac{a}{b}. \tag{3.6}$$

Теперь мы получим

$$\|x_1 - x_0\| \le \|x_1 - l_0\| + \|l_0 - x_0\| \le h_1(\alpha_0)a_0. \tag{3.7}$$

Следовательно, $x_1 \in V(x_0, Sa)$ вследствие предположения $\delta_0 < \frac{1}{h_2(\alpha_0)} < 1$. Отметим, что $\alpha_0 < \tau$; следовательно, $h_1(\alpha_0) < h_1(\tau)$, и мы можем записать

$$\|I - \zeta_0 M'(x_1)\| \le \alpha_0 h_1(\alpha_0) < 1. \tag{3.8}$$

Таким образом, $\zeta_1 = [M'(x_1)]^{-1}$ существует и благодаря лемме Банаха его можно записать как

$$\|\zeta_1\| \le \frac{b_0}{1 - \alpha_0 h_1(\alpha_0)} = b_1. \tag{3.9}$$

Снова используя разложение Тейлора, мы можем записать

$$\begin{aligned}M(x_{n+1}) = M(l_n) &+ M'(\nu_n)(x_{n+1} - l_n) + \\ &\int_0^1 \Big[M'(l_n + t(x_{n+1} - l_n)) - M'(\nu_n)\Big] dt(x_{n+1} - l_n)\end{aligned} \tag{3.10}$$

и

$$M'(\nu_n) = M'(x_n) + \int_0^1 M''(x_n + t(\nu_n - x_n))dt(\nu_n - x_n). \tag{3.11}$$

С использованием приведенного выше соотношения уравнение (3.10) принимает вид

$$\begin{aligned}M(x_{n+1}) = M(l_n) &+ M'(x_n)(x_{n+1} - l_n) + \\ &\int_0^1 M''(x_n + t(\nu_n - x_n))dt(\nu_n - x_n)(x_{n+1} - l_n) + \\ &\int_0^1 \Big[M'(l_n + t(x_{n+1} - l_n)) - M'(\nu_n)\Big] dt(x_{n+1} - l_n).\end{aligned}$$

С использованием последнего подшага схемы (2.1), приведенное выше выражение можно переписать в виде

$$M(x_1) = \frac{3}{2}\Big[M'(y_0) - M'(x_0)\Big]M'(y_0)^{-1}K_M(x_0)M(l_0) + \int_0^1 M''(x_n + t(\nu_n - x_n))dt(\nu_n - x_n)(x_{n+1} - l_n) + \int_0^1 \Big[M'(l_n + t(x_{n+1} - l_n)) - M'(\nu_n)\Big]dt(x_{n+1} - l_n).$$

Таким образом,

$$\|M(x_1)\| \leq q_1(\alpha_0)\frac{a}{b}. \tag{3.12}$$

Следовательно,

$$\|y_1 - x_1\| \leq h_2(\alpha_0)q_1(\alpha_0)a_0 = a_1. \tag{3.13}$$

Кроме того, поскольку $h_1(\alpha_0) > 1$ и с использованием неравенства треугольника, мы находим

$$\|y_1 - x_0\| \leq Sa, \tag{3.14}$$

и

$$\|\nu_1 - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\| + \left\|\frac{1}{2}(\nu_1 - x_1)\right\| \leq (h_1(\alpha_0) + \delta_0)a_0 < Sa, \tag{3.15}$$

что означает ν_1, $y_1 \in V(x_0, Sa)$. Кроме того, имеем

$$\sigma_1\|\zeta_1\|\|\zeta_1 M(x_1)\| \leq h_2^2(\alpha_0)q_1(\alpha_0)\alpha_0 = \alpha_1. \tag{3.16}$$

Мы можем получить следующую лемму:

Лемма 3.1. *Пусть гипотеза леммы* 2.2 *и условия* (A1)–(A3) *верны. Тогда верны следующие условия для всех* $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&(i) && \zeta_n = [M'(x_n)]^{-1}\exists \ \text{и} \ \|\zeta_n\| \leq b_n,\\
&(ii) && \|\zeta_n M(x_n)\| \leq a_n,\\
&(iii) && \sigma_1\|\zeta_n\|\|\zeta_n M(x_n)\| \leq \alpha_n,\\
&(iv) && \|\nu_n - x_n\| \leq a_n,\\
&(v) && \|x_{n+1} - x_n\| \leq h_1(\alpha_n)a_n,\\
&(vi) && \|x_{n+1} - x_0\| \leq Sa, \ \text{где} \ S = \frac{h_1(\alpha_0)}{1 - \delta_0}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Для доказательства леммы 3.1 представим следующую лемму.

Лемма 3.2. *При гипотезах леммы* 2.2 *пусть* $g = h_2(\alpha_0)\delta_0$ *и* $\mu = \frac{1}{h_2(\alpha_0)}$. *Тогда мы имеем*

$$\delta_i \leq \mu g^{3^n}, \tag{3.18}$$

$$\prod_{i=0}^{n}\delta_i \leq \mu^{n+1}g^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}, \tag{3.19}$$

$$a_n \leq a\mu^n g^{\frac{3^n-1}{2}}, \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=n}^{n+m} a_i \leq a\mu^n g^{\frac{3^n-1}{2}}\left(\frac{1 - \mu^{m+1}g^{\frac{3^n(3^m+1)}{2}}}{1 - \mu g^{3^n}}\right), \tag{3.21}$$

где $n \geq 0$ *и* $m \geq 1$.

Доказательство. Для доказательства леммы сначала нам необходимо получить

$$\delta_n \le \mu g^{3^n}.$$

Докажем это индукцией. Согласно лемме 2.3 и поскольку $\alpha_1 = g\alpha_0$, мы имеем для $n = 1$

$$\delta_1 = h_2(g\alpha_0)q_1(g\alpha_0) < g^2\delta_0 < \mu g^{3^1}.$$

Пусть оно верно для $n = k$. Тогда

$$\delta_k \le \mu g^{3^k}, \quad k \ge 1.$$

Теперь докажем его для $n = k + 1$. Таким образом,

$$\delta_{k+1} < h_2(g\alpha_k)q_1(g\alpha_k) < \mu g^{3^{k+1}}.$$

Поэтому $\delta_n \le \mu g^{3^n}$ верно для $n \ge 0$. Используя это неравенство, получим

$$\prod_{i=0}^{k} \delta_i \le \prod_{i=0}^{k} \mu g^{3^i} = \mu^{k+1} \prod_{i=0}^{k} g^{3^i} = \mu^{k+1} g^{\frac{3^{k+1}-1}{2}}, \quad k \ge 0.$$

Используя полученное выше неравенство в соотношении (2.9), мы имеем

$$a_n = \delta_{n-1}a_{n-1} = \delta_{n-1}\delta_{n-2}a_{n-2} = \cdots = a_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \le a\mu^n g^{\frac{3^n-1}{2}}, \quad n \ge 0.$$

Поскольку $0 < \mu < 1$ и $0 < g < 1$, мы можем сказать, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$\kappa = \sum_{i=k}^{k+m} \mu^i g^{\frac{3^i}{2}}, \quad k \ge 0, \quad m \ge 1.$$

Приведенное выше уравнение также можно переписать в следующем виде:

$$\kappa \le \mu^k g^{\frac{3^k}{2}} + \mu g^{3^k} \sum_{i=k}^{k+m-1} \mu^i g^{\frac{3^i}{2}} = \mu^k g^{\frac{3^k}{2}} + \mu g^{3^k} \left(\kappa - \mu^{k+m} g^{\frac{3^{k+m}}{2}} \right)$$

и оно принимает вид

$$\kappa < \mu^k g^{\frac{3^k}{2}} \left(\frac{1 - \mu^{m+1} g^{\frac{3^k(3^m+1)}{2}}}{1 - \mu g^{3^k}} \right).$$

Кроме того,

$$\sum_{i=k}^{k+m} a_i \le \sum_{i=k}^{k+m} a\mu^i g^{\frac{3^{i-1}}{2}} \le a\mu^k g^{\frac{3^{k-1}}{2}} \left(\frac{1 - \mu^{m+1} g^{\frac{3^k(3^m+1)}{2}}}{1 - \mu g^{3^k}} \right). \qquad \square$$

Теперь вкратце представим доказательство леммы 3.1. Используя математическую индукцию, мы можем доказать (i)–(v) для $n \ge 0$. Теперь, для $n \ge 1$, используя соотношение (3.17) и полученный выше результат, имеем

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|x_{i+1} - x_i\| < Sa.$$

Это завершает доказательство.

Наконец, следующая лемма может быть доказана аналогично тому, как это было сделано в статье Ванга и Коу [32].

Лемма 3.3. *Пусть* $S = \dfrac{h_1(\alpha_0)}{1-\delta_0}$, $h_2(\alpha_0)\delta_0 < 1$ *и* $\alpha_0 < \tau$, *где* τ *— наименьший положительный корень* $h_1(s)s - 1 = 0$. *Тогда* $S < \dfrac{1}{\alpha_0}$.

4. Полулокальная сходимость, когда условие M''' опущено

Здесь мы прежде всего представим терему, описывающую анализ сходимости схемы (2.1). В следующем пункте наша цель — доказать сходимость алгоритма (2.1) при предположении только условий (A1)–(A3). Кроме того, мы найдем шар с центром x_0 и радиусом Sa, в котором решение существует и будет единственным, а также определим его границу погрешности.

Теорема 4.1. *Предположим, что* $M : X \subseteq G_1 \to G_2$, *— непрерывно дифференцируемое второго порядка по Фреше на* X. *Предположим, что гипотезы* (A1)–(A3) *верны и* $x_0 \in X$. *Предположим, что* $\alpha_0 = \sigma_1 ba$ *и* $\delta_0 = h_2(\alpha_0)q_1(\alpha_0)$ *удовлетворяют* $\alpha_0 < \tau$ *и* $h_2(\alpha_0)\delta_0 < 1$, *где* τ *— наименьший корень* $h_1(s)s - 1 = 0$ *и* h_1, h_2 *и* q_1 *определены выражениями* (2.4), (2.5) *и* (2.6) *соответственно. Также предположим, что* $\overline{V(x_0, Sa)} \subseteq X$, *где* $S = \frac{h_1(\alpha_0)}{1-\delta_0}$. *Тогда, начиная с* x_0, *итерационная последовательность* $\{x_n\}$, *полученная из схемы* (2.1), *сходится к нулю* x^* $M(x) = 0$ *при* x_n, $x^* \in \overline{V(x_0, Sa)}$ *и* x^* *— единственный ноль* $M(x) = 0$ *в* $V\Big(x_0, \dfrac{2}{\sigma_1 b} - Sa\Big) \cap X$. *Кроме того, ее граница ошибки задается следующим образом:*

$$\|x_n - x^*\| \leq h_1(\alpha_0) a \mu^n g^{\frac{3^n - 1}{2}} \left(\frac{1}{1 - \mu g^{3^n}}\right), \tag{4.1}$$

где $g = h_2(\alpha_0)\delta_0$ *и* $\mu = \dfrac{1}{h_2(\alpha_0)}$.

Доказательство. Ясно, что последовательность $\{x_n\}$ установлена в $\overline{V(x_0, Sa)}$. Теперь

$$\|x_{k+m} - x_k\| \leq \sum_{i=k}^{k+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq h_1(\alpha_0) a \mu^k g^{\frac{3^k - 1}{2}} \left(\frac{1 - \mu^m g^{\frac{3^k(3^{m-1}+1)}{2}}}{1 - \mu g^{3^k}}\right), \tag{4.2}$$

что показывает, что $\{x_k\}$ является последовательностью Коши. Следовательно, существует x^*, удовлетворяющее $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Пусть $k = 0$, $m \to \infty$ в уравнении (4.2). Тогда мы получим

$$\|x^* - x_0\| \leq Sa, \tag{4.3}$$

что означает, что $x^* \in \overline{V(x_0, Sa)}$. Теперь покажем, что x^* является нулем $M(x) = 0$. Поскольку

$$\|\zeta_0\| \, \|M(x_n)\| \le \|\zeta_n\| \, \|M(x_n)\|, \tag{4.4}$$

и в приведенном выше неравенстве $n \to \infty$ и используя непрерывность M в X, мы находим, что $M(x^*) = 0$. Наконец, для единственности x^* в $V\Big(x_0, \dfrac{2}{\sigma_1 b} - Sa\Big) \cap X$, пусть x^{**} — другое решение $M(x)$ в $V\Big(x_0, \dfrac{2}{\sigma_1 b} - Sa\Big) \cap X$. Используя теорему Тейлора, получим

$$0 = M(x^{**}) - M(x^*) = \int_0^1 M'((1-t)x^* + tx^{**})dt(x^{**} - x^*).$$

Кроме того,

$$\|\zeta_0\| \left\| \int_0^1 [M'((1-t)x^* + tx^{**}) - M'(x_0)]\, dt \right\| \le \sigma_1 b \int_0^1 [(1-t)\|x^* - x_0\| + t\|x^{**} - x_0\|]\, dt$$
$$\le \frac{\sigma_1 b}{2} \left[Sa + \frac{2}{\sigma_1 b} - Sa \right] < 1,$$

что означает, что выражение $\int_0^1 M'((1-t)x^* + tx^{**})dt$ обратимо и, следовательно, $x^{**} = x^*$. □

5. Полулокальная сходимость, когда M''' ограничено на начальной итерации

В этом пункте мы устанавливаем теорему существования и единственности решения, основанного на более слабых условиях (A1)–(A3), (B1) и (B2). Определим последовательности следующим образом:

$$\tilde{a}_{n+1} = \tilde{\delta}_n \tilde{a}_n, \tag{5.1}$$

$$\tilde{b}_{n+1} = h_2(\tilde{\alpha}_n)\tilde{b}_n, \tag{5.2}$$

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \sigma_1 \tilde{b}_{n+1} \tilde{a}_{n+1} = h_2(\tilde{\alpha}_n)\tilde{\delta}_n \tilde{\alpha}_n, \tag{5.3}$$

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \sigma_2 \tilde{b}_{n+1} \tilde{a^2}_{n+1} = h_2(\tilde{\alpha}_n)\tilde{\delta^2}_n \tilde{\beta}_n, \tag{5.4}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \tilde{b}_{n+1} \tilde{a^2}_{n+1} \omega(\tilde{a}_{n+1}) \le h_2(\tilde{\alpha}_n)\phi(\tilde{\delta}_n)\tilde{\delta}_n^2 \tilde{\gamma}_n, \tag{5.5}$$

$$\tilde{\delta}_{n+1} = h_2(\tilde{\alpha}_{n+1}) q_1'(\tilde{\alpha}_{n+1}, \tilde{\beta}_{n+1}, \tilde{\gamma}_{n+1}). \tag{5.6}$$

Мы знаем, что $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in V\Big(x_0, \dfrac{a}{\tilde{\alpha}_0}\Big)$. Аналогичным образом, для $t_1, t \in [0,1]$ и $n \ge 1$ и используя лемму 3.3, получим

$$\|x_n + t(\nu_n - x_n) - x_0\| \le \|x_n - x_0\| + \|\nu_n - x_n\| \le \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| + \frac{1}{2}\tilde{a}_n$$
$$\le h_1(\tilde{\alpha}_0) \sum_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \le Sa < \frac{a}{\tilde{\alpha}_0}.$$

Поэтому $\{x_n + t(\nu_n - x_n)\} \in V\Big(x_0, \dfrac{a}{\tilde{\alpha}_0}\Big)$. Кроме того,

$$\|x_n+t(y_n-x_n)-x_0\| \le \|x_n-x_0\|+\|y_n-x_n\| \le \sum_{i=0}^{n-1}\|x_{i+1}-x_i\|+\tilde a_n$$
$$\le h_1(\tilde\alpha_0)\sum_{i=0}^{n}\tilde a_i \le Sa < \frac{a}{\tilde\alpha_0}.$$

Следовательно, $\{x_n+t(y_n-x_n)\}\in V\Big(x_0,\frac{a}{\tilde\alpha_0}\Big)$. Более того,

$$\|y_n+t_1t(l_n-y_n)-x_0\| \le \|y_n-x_0\|+\|l_n-y_n\| \le Sa+Sa < \frac{a}{\tilde\alpha_0}.$$

Таким образом, $\{y_n+t_1t(l_n-y_n)\}\in V\Big(x_0,\frac{a}{\tilde\alpha_0}\Big)$. Это показывает, что выбор $\varepsilon=\frac{a}{\tilde\alpha_0}$ является правильным. Предположим, что существует корень $\tilde\alpha_0\in(0,\tau)$ уравнения

$$x=\left[\overline{H}+\omega\left(\frac{a}{x}\right)\right]ba^2.$$

Очевидно, что $\tilde\beta_0=\sigma_2ba^2$, где $\sigma_2=\overline{H}+\omega\left(\frac{a}{\tilde\alpha_0}\right)$. Заметим, что здесь мы не определяем $\tilde\alpha_0$ как корень следующего уравнения:

$$x=\left[\overline{H}+\omega\left(\frac{h_1(x)a}{1-h_2(x)q_1'(x,\tilde\beta_0,\tilde\gamma_0)}\right)\right]ab^2.$$

Следует помнить, что для всех $x\in V(x_0,\frac{a}{\tilde\alpha_0})$ мы имеем

$$\|M'''(x)\|=\|M'''(x_0)\|+\|M'''(x)-M'''(x_0)\|$$
$$\le \overline{H}+\omega(\|x-x_0\|)\le \overline{H}+\omega\left(\frac{a}{\tilde\alpha_0}\right)=\sigma_2.$$

Здесь мы включаем три вспомогательные скалярные функции, взятые из [31]:

$$h_1(s)=q(s)+\frac{s}{2}\left(1+s+\frac{3}{2}s^2\right)\left(1+|d|s+q(s)^2\right), \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} q_1'(s,\nu,u)=&\left[\frac14 s\nu+\frac12\Delta_1\left(1+\frac32 s\right)u+\frac32 s^3+\frac34 s^2\nu+\Delta_2\left(1+s+\frac32 s^2\right)u\right]\tilde q_2(s,\nu)+\\ &\left[\frac{|d|}{2}s^3+\frac{s}{2}\left(1+|d|s\right)\nu+\frac{s^3}{2}\left(1+|d|s\right)\left(1+\frac32 s\right)\right]\tilde q_2(s,\nu)+\\ &\frac{s^2}{8}\left(1+|d|s\right)\left(1+s+\frac32 s^2\right)\nu\tilde q_2(s,\nu)+\\ &\frac{s}{2}\left(1+s+\frac32 s^2\right)^2\tilde q_2^2(s,\nu), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где

$$\tilde q_2(s,\nu)=\frac{s^2}{2}\left(1+|d|s\right)+\frac{|d|}{2}s^2+\frac{5}{12}\nu+\frac14 s\left(1+|d|s\right)\nu+\frac18 s^3\left(1+|d|s\right)^2, \tag{5.9}$$

$$q(s) = 1 + \frac{s}{2} + \frac{|d|}{2}s^2 \tag{5.10}$$

и

$$\Delta_1 = \int_0^1 \phi\left(\frac{s}{2}\right) ds, \quad \Delta_2 = \int_0^1 \phi(s)(1-s)ds. \tag{5.11}$$

Из свойства индукции и из условий (A1)–(A3), (B1) и (B2) следует, что для всех $n \geq 0$ верны следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \zeta_n = [M'(x_n)]^{-1}\exists \text{ и } \|\zeta_n\| \leq \tilde{b}_n,\\
(ii) & \|\zeta_n M(x_n)\| \leq \tilde{a}_n,\\
(iii) & \sigma_1\|\zeta_n\|\|\zeta_n M(x_n)\| \leq \tilde{\alpha}_n,\\
(iv) & \sigma_2\|\zeta_n\|\|\zeta_n M(x_n)\| \leq \tilde{\beta}_n,\\
(v) & \|\zeta_n\|\|\zeta_n M(x_n)\|^2\omega(\|\zeta_n M(x_n)\|) \leq \tilde{\gamma}_n,\\
(vi) & \|x_{n+1} - x_n\| \leq h_1(\tilde{\alpha}_n)\tilde{a}_n,\\
(vii) & \|x_{n+1} - x_0\| \leq \tilde{S}a, \quad \text{где} \quad \tilde{S} = \dfrac{h_1(\tilde{\alpha}_0)}{1-\tilde{\delta}_0}.
\end{array}$$

Вторая теорема этой статьи основана на более слабых предположениях. Она может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 5.1. *Предположим, что* $M : X \subseteq G_1 \to G_2$ *непрерывно дифференцируемо третьего порядка по Фреше на непустом открытом выпуклом подмножестве* $X_0 \subseteq X$. *Предположим, что гипотезы* (A1)–(A3), (B1) *и* (B2) *верны и* $x_0 \in X_0$. *Также предположим, что* $\tilde{\alpha}_0 = \sigma_1 ba, \tilde{\beta}_0 = \sigma_2 ba^2, \tilde{\gamma}_0 = ba^2\omega(a)$ *и* $\tilde{\delta}_0 = h_2(\tilde{\alpha}_0)q_1'(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}_0)$ *удовлетворяют* $\tilde{\alpha}_0 < \tau$ *и* $h_2(\tilde{\alpha}_0)\tilde{\delta}_0 < 1$, *где* τ — *наименьший корень* $h_1(s)s - 1 = 0$ *и* h_1, h_2, q_1' *определяются посредством* (2.4), (2.5) *и* (5.8). *Кроме того, предположим, что* $\overline{V(x_0, \tilde{S}a)} \subseteq X_0$, *где* $\tilde{S} = \frac{h_1(\tilde{\alpha}_0)}{1-\tilde{\delta}_0}$. *Тогда, начиная с* x_0, *итерационная последовательность* $\{x_n\}$, *полученная из схемы* (2.1), *сходится к нулю* x^* $M(x) = 0$ *при* $x_n, x^* \in \overline{V(x_0, \tilde{S}a)}$, *а* x^* *является единственным нулем* $M(x) = 0$ *в* $V\Big(x_0, \dfrac{2}{\sigma_1 b} - \tilde{S}a\Big) \cap X$. *Кроме того, его граница ошибки определяется выражением*

$$\|x_n - x^*\| \leq h_1(\tilde{\alpha}_0)a\tilde{\mu}^n\tilde{g}^{\frac{5^n-1}{4}}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}\tilde{g}^{5^n}}\right), \tag{5.12}$$

где $\tilde{g} = h_2(\tilde{\alpha}_0)\tilde{\delta}_0$ *и* $\tilde{\mu} = \frac{1}{h_2(\tilde{\alpha}_0)}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1. □

6. Численный пример

Пример 6.1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение из [33], которое уже упоминалось во введении и задается следующим образом:

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{1}{2}x(t)^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{16}x(t)^3\right)dt, \quad s \in [0,1], \tag{6.1}$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$ и G — функция Грина, определяемая следующим образом:

$$G(s,t)=\begin{cases}(1-s)t, & t\leq s,\\ s(1-t), & s\leq t.\end{cases}$$

Решение уравнения (6.1) эквивалентно нахождению решения для $M(x)=0$, где $M:X\subseteq C[0,1]\to C[0,1]$.

$$[M(x)](s)=x(s)-1-\int_0^1 G(s,t)\left(\frac{1}{2}x(t)^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{16}x(t)^3\right)dt,\quad s\in[0,1].$$

Здесь мы возьмем $X=V(0,2)$. Производные Фреше M задаются следующим образом:

$$M'(x)y(s)=y(s)-\int_0^1 G(s,t)\left(\frac{5}{4}x(t)^{\frac{3}{2}}+\frac{21}{16}x(t)^2\right)y(t)dt,\quad y\in X,$$

$$M''(x)yl(s)=-\int_0^1 G(s,t)\left(\frac{15}{8}x(t)^{\frac{1}{2}}+\frac{21}{8}x(t)\right)y(t)l(t)dt,\quad y,l\in X$$

Выбрав начальную аппроксимацию $x_0=1$, получим

$$\|\zeta_0\|=\frac{128}{87}=b,\quad \|\zeta_0 M(x_0)\|\leq\frac{15}{87}=a,\quad \|M''(x)\|\leq\frac{15\sqrt{2}}{64}+\frac{21}{32}=\sigma_1.$$

Таким образом, $\alpha_0\approx 0.2505$. Поскольку $\alpha_0 h_1(\alpha_0)=0.3990<1$, $h_2(\alpha_0)\delta_0=0.725<1$, поэтому условия теоремы (4.1) удовлетворяются и решение существует в шаре $x\in V(1,0.4868)$ и является единственным в $V(1,0.8895)\cap X$. Следовательно, мы можем сделать вывод, что шар существования решения, основанного на нашем результате, лучше, чем у Ванга в [33], но шар единственности уступает ему.

Пример 6.2. Теперь рассмотрим другой пример, обсуждавшийся в [32] и также упомянутый во введении:

$$f(x)=\begin{cases}x^3\ln(x^2)-6x^2-3x+8, & x\in(-2,0)\cup(0,2),\\ 0, & x=0.\end{cases}\tag{6.2}$$

Возьмем $V(0,2)=X$. Пусть $x_0=1$ — начальная аппроксимация. Производные f задаются следующим образом:

$$f'(x)=3x^2\ln(x^2)+2x^2-12x-3,\tag{6.3}$$

$$f''(x)=6x\ln(x^2)+10x-12\tag{6.4}$$

и

$$f'''(x)=6\ln(x^2)+22.\tag{6.5}$$

Ясно, что f''' неограничено в X и не удовлетворяет условию $(A4)$, но удовлетворяет предположению $(B1)$. Таким образом, мы имеем

$$\|\zeta_0\|=\frac{1}{13}=b,\quad \|\zeta_0 f(x_0)\|=\frac{1}{13}=a,\quad \|f''(x)\|\leq 12ln(4)+32=\sigma_1,$$

$\|f'''(x_0)\|=22$, $\|f'''(x)-f'''(y)\|\leq\dfrac{12}{1-\frac{13}{32+12\log(4)}}|x-y|$, для всех $x,y\in V\left(1,\dfrac{13}{32+12\ln(4)}\right)$.

Здесь $\omega(l)=\dfrac{12}{1-\frac{13}{32+12\log(4)}}l$ и $q_1(\varepsilon)=1$. Здесь также $\alpha_0\approx 0.2878$. Поскольку $\alpha_0 h_1(\alpha_0)=0.49856<1$, $h_2(\alpha_0)\delta_0=0.04412<1$, поэтому условия теоремы (5.1) удовлетворяются. Таким образом, решение находится в шаре $V(1,0.13628)$ и единственно в шаре $V(1,0.39831)\cap X$.

7. Выводы

В данной статье мы проанализировали полулокальную сходимость одного класса модифицированных методов Чебышева–Галлея в банаховых пространствах. Анализ был выполнен с использованием рекуррентных соотношений путем ослабления предположений в двух разных подходах. В первом подходе мы смягчили классические условия сходимости, чтобы доказать результаты по сходимости, существованию и единственности вместе с априорной оценкой ошибки. С другой стороны, мы приняли ограниченной норму производной Фреше третьего порядка на начальной итерации, так что мы смогли избежать условия неограниченности функции в данной области, и, кроме того, что она также удовлетворяет локальному ω-условию непрерывности. Для обоснования разработанной теории были проведены два численных эксперимента с помощью системы программирования Mathematica.

Литература

1. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables. — New York and London: Academic Press, 1970.
2. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
3. **Ostrowski A.M.** Solution of Equations and System of Equations. — New York: Academic Press, 1960.
4. **Jarratt P.** Some fourth order multipoint methods for solving equations // Math. Comput. — 1966. — Vol. 20. — P. 434–437.
5. **Jarratt P.** Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations // BIT. — 1969. — Vol. 9. — P. 119–124.
6. **Kung H.T., Traub J.F.** Optimal order of one-point and multipoint iteration // J. ACM. — 1974. — Vol. 21. — P. 643–651.
7. **Neta B.** A sixth-order family of methods for nonlinear equations // Int. J. Comput. Math. — 1979. — Vol. 7. — P. 157–161.
8. **Popovski D.B.** A family of one-point iteration formulae for finding roots // Int. J. Comput. Math. — 1980. — Vol. 8. — P. 85–88.
9. **Neta B.** On a family of multipoint methods for nonlinear equations // Int. J. Comput. Math. — 1981. — Vol. 9. — P. 353–361.
10. **Jain M.K.** Fifth order implicit multipoint method for solving equations // BIT. — 1985. — Vol. 25. — P. 250–255.
11. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. — Oxford: Pergamon Press, 1982.
12. **Rall L.B.** Computational Solution of Nonlinear Operator Equations. — New York: Robert E Krieger, 1979.
13. **Wang X., Gu C., Kou J.** Semilocal convergence of a multipoint fourth-order Super-Halley method in Banach spaces // Numer. Algor. — 2011. — Vol. 56. — P. 497–516.
14. **Wang X., Kou J., Gu, C.** Semilocal convergence of a sixth-order Jarratt method in Banach spaces // Numer. Algor. — 2011. — Vol. 57. — P. 441–456.
15. **Singh S., Gupta D.K., Martínez E., Hueso J.L.** Semilocal convergence analysis of an iteration of order five using recurrence relations in Banach spaces // Mediterr. J. Math. — 2016. — Vol. 13. — P. 4219–4235.
16. **Jaiswal J.P.** Semilocal convergence of an eighth-order method in Banach spaces and its computational efficiency // Numer. Algor. — 2016. — Vol. 71. — P. 933–951.

17. **Hernández M.A.** Chebyshev's approximation algorithms and applications // Comput. Math. Appl. — 2001. — Vol. 41, № 3-4. — P. 433–445.

18. **Parida P.K., Gupta D.K.** Recurrence relations for semilocal convergence of a Newton-like method in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 345, № 1. — P. 350–361.

19. **Parida P.K., Gupta D.K.** Semilocal convergence of a family of third-order methods in Banach spaces under Hölder continuous second derivative // Non. Anal. Theo. Meth. Appl. — 2008. — Vol. 69, № 11. — P. 4163–4173.

20. **Wang X., Kou J.** Convergence for modified Halley-like methods with less computation of inversion // J. Diff. Eqn. Appl. — 2013. — Vol. 19, № 9. — P. 1483–1500.

21. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** On the R-order of the Halley method // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 303, № 2. — P. 591–601.

22. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** A generalization of the Kantorovich type assumptions for Halley's method // Int. J. Comput. Math. — 2007. — Vol. 84, № 12. — P. 1771–1779.

23. **Parida P.K., Gupta D.K.** Semilocal convergence of a family of third-order Chebyshev-type methods under a mild differentiability condition // Int. J. Comput. Math. — 2010. — Vol. 87, № 15. — P. 3405–3419.

24. **Parida P.K., Gupta D.K., Parhi S.K.** On Semilocal convergence of a multipoint third order method with R-order $(2+p)$ under a mild differentiability condition // J. Appl. Math. Inf. — 2013. — Vol. 31, № 3-4. — P. 399–416.

25. **Prashanth M., Gupta D.K.** Convergence of a parametric continuation method // Kodai Math. J. — 2014. — Vol. 37, № 1. — P. 212–234.

26. **Prashanth, M., Gupta D.K.** Semilocal convergence for Super-Halley′s method under ω-differentiability condition // Japan J. Indust. Appl. Math. — 2015. — Vol. 32, № 1. — P. 77–94.

27. **Wang X., Kou J.** Semilocal convergence of multi-point improved Super-Halley-type methods without the second derivative under generalized weak condition // Numer. Algor. — 2016. — Vol. 71, № 3. — P. 567–584.

28. **Wang X., Kou J.** Semilocal convergence analysis on the modifications for Chebyshev–Halley methods under generalized condition // Appl. Math. Comp. — 2016. — Vol. 281. — P. 243–251.

29. **Wang X., Kou J.** Semilocal convergence on a family of root-finding multi-point methods in Banach spaces under relaxed continuity condition // Numer. Algor. — 2017. — Vol. 74. — P. 643–657.

30. **Castro R.A., Rodríguez J.C., Sierra W.W., Di Giorgi G.L., Gomez S.J.** Chebyshev–Halley's method on Riemannian manifolds // J. Comput. Appl. Math. — 2018. — Vol. 336. — P. 30–53.

31. **Wang X., Kou J.** Semilocal convergence and R-order for modified Chebyshev–Halley methods // Numer. Algor. — 2012. — Vol. 64. — P. 105–126.

32. **Wang X., Kou. J.** Convergence for a class of improved sixth-order Chebyshev–Halley type method // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 273. — P. 513–524.

33. **Wang X., Kou J.** Convergence for a family of modified Chebyshev methods under weak condition // Numer. Algor. — 2014. — Vol. 66. — P. 33–48.

Поступила в редакцию 20 июня 2018 г.
После исправления 7 декабря 2019 г.
Принята к печати 21 октября 2020 г.