

*AMS* subject classification: 65M06, 65M12

## Явная конечно-разностная аппроксимация для пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка с использованием эрмитовой интерполяции

Ч.В. О, В.М. Ро, Ю.Ч. Ким

Department of Applied Mathematics, Kim Chaek University of Technology, Yonggwang Street, Pyongyang, Democratic People's Republic of Korea

E-mails: ocw86823@star-co.net.kp (Chol Won O), rwm69226@star-co.net.kp (Won Myong Ro), kyc78924@star-co.net.kp (Yun Chol Kim)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 17, 2024.

**О Ч.В., Ро В.М., Ким Ю.Ч.** Явная конечно-разностная аппроксимация для пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка с использованием эрмитовой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 3. — С. 319–333.

Дробные операторы переменного порядка могут использоваться в различных физических и биологических приложениях, где скорость изменения представляющей интерес величины может зависеть от пространства и/или времени. В данной статье мы предлагаем явную конечно-разностную аппроксимацию для пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка с начальными и граничными условиями в конечной области. Предлагаемая схема является условно устойчивой и имеет глобальную ошибку усечения  $O(\tau^2 + h^2)$ . Также представлен численный эксперимент для проверки эффективности предлагаемой схемы.

**DOI:** 10.15372/SJNM20240305

**EDN:** NFDYBB

**Ключевые слова:** дробное волновое уравнение переменного порядка, дробная производная Капуто по времени, дробная производная Рисса по пространству, явная конечно-разностная схема.

**O Chol Won, Ro Won Myong, Kim Yun Chol** An explicit finite difference approximation for space-time Riesz–Caputo variable order fractional wave equation using Hermitian interpolation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 3. — P. 319–333.

Variable order fractional operators can be used in various physical and biological applications where rates of change of the quantity of interest may depend on space and/or time. In this paper, we propose an explicit finite difference approximation for a space-time Riesz–Caputo variable order fractional wave equation with initial and boundary conditions in a finite domain. The proposed scheme is conditionally stable and has global truncation error  $O(\tau^2 + h^2)$ . We also present a numerical experiment to verify the efficiency of the proposed scheme.

**Keywords:** variable order fractional wave equation, Caputo time fractional derivative, Riesz space fractional derivative, explicit finite difference scheme.

## 1. Введение

Дробное исчисление — это раздел математики, который занимается дифференцированием и интегрированием любого произвольного порядка. Дробные дифференциальные уравнения широко используются при анализе сложных систем, таких как механика материалов, аномальная диффузия, распространение волн и анализ турбулентности. В последние годы исследования в этой области привлекают большое внимание [1–7].

Дробное исчисление переменного порядка является расширением дробного исчисления постоянного порядка, т. е. дробный порядок выражается не как постоянная, а в функциональной форме временной или пространственной переменной. В работе [8] Самко и Росс расширили дробные производные Маршо и Римана–Лиувилля на случай переменного порядка, поскольку многие авторы распространили дробный порядок на временные и/или пространственные переменные в таких определениях, как дробные производные Капуто, Грюнвальда и Рисса [9–13]. Кроме того, были также определены дробные производные переменного порядка, необходимые для моделирования физических задач [14]. Дробные производные переменного порядка имеют значительные преимущества перед дробными производными постоянного порядка при анализе и управлении различными физическими системами, включая осциллятор нелинейной вязкоупругости [15–21]. Дробное волновое уравнение управляет распространением механических диффузионных волн в вязкоупругих средах, демонстрирующих ползучесть по степенному закону, и, таким образом, дает физическую интерпретацию этого уравнения в динамической вязкоупругой системе [22].

Вследствие нелокальности и слабой сингулярности дробных производных трудно найти аналитические решения для дробных дифференциальных уравнений, особенно в случае дробных дифференциальных уравнений переменного порядка, и поэтому много исследований было посвящено разработке эффективных и надежных численных решений [23–27]. Свейлам и Ассири [28] предложили явную конечно-разностную схему для решения пространственно-временного нелинейного волнового уравнения Капуто переменного порядка и доказали, что схема безусловно устойчива, а локальная ошибка усечения равна  $O(\tau + h)$ . Шен с соавторами предложили явные и неявные конечно-разностные схемы для дробного пространственно-временного уравнения переноса–диффузии Рисса–Капуто и доказали, что явная схема условно устойчива, а неявная схема безусловно устойчива [29]. Бхрави с соавторами обсуждали численное решение пространственно-временного дробного волнового уравнения Капуто переменного порядка с переменными коэффициентами с использованием смещенного метода коллокаций Якоби–Гаусса–Лобатто и смещенного метода коллокации Якоби–Гаусса–Радо для дискретизации дробной производной по пространству и дробной производной по времени [30]. Неявная конечно-разностная схема для многочленного дробного пространственно-временного уравнения адвекции–диффузии переменного порядка и ее устойчивость и сходимость обсуждались в [31].

Поскольку численные схемы высокой точности для дробных производных переменного порядка позволяют повысить точность расчетов и снизить затраты на вычисления, разработка таких численных схем имеет большое практическое значение и проводится большая работа в этом направлении. Чжао с соавторами предложили новую приближенную формулу второго порядка для дробных производных по времени переменного порядка с использованием кубического интерполяционного многочлена Эрмита [32]. В связи с этим мы пытаемся получить устойчивую численную схему высокого порядка для решения следующего пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка:

$${}_0^C D_t^{\alpha(t)} u(x, t) = \frac{\partial^{\beta(x)} u(x, t)}{\partial |x|^{\beta(x)}} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = [0, X] \times [0, T], \quad (1)$$

где  $1 < \alpha_{\min} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max} < 2$ ,  $1 < \beta_{\min} \leq \beta(x) \leq \beta_{\max} < 2$ , начальные и граничные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < X, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < X, \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В (1) дробная производная по времени  ${}_0^C D_t^{\alpha(t)} u(x, t)$  — это дробная производная Капуто переменного порядка  $\alpha(t) \in (1, 2)$ , определяемая как [32]

$${}_0^C D_t^{\alpha(t)} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{1}{(t - \eta)^{\alpha(t)-1}} \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta,$$

а дробная производная по пространству — это дробная производная Рисса переменного порядка  $\beta(x) \in (1, 2)$ , определяемая как [33]

$$\frac{\partial^{\beta(x)} u(x, t)}{\partial |x|^{\beta(x)}} = K_{\beta(x)} \left[ {}_0 D_x^{\beta(x)} u(x, t) + {}_x D_X^{\beta(x)} u(x, t) \right],$$

где  $K_{\beta(x)} = -\frac{1}{2\cos(\beta(x)\pi/2)}$  и

$${}_0 D_x^{\beta(x)} u(x, t) = \left[ \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(x))} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_0^\xi \frac{u(\eta, t)}{(\xi - \eta)^{\beta(x)-1}} d\eta \right]_{\xi=x},$$

$${}_x D_X^{\beta(x)} u(x, t) = \left[ \frac{(-1)^2}{\Gamma(2 - \beta(x))} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_\xi^X \frac{u(\eta, t)}{(\eta - \xi)^{\beta(x)-1}} d\eta \right]_{\xi=x}.$$

Статья построена следующим образом: в пункте 2 мы представляем явную конечно-разностную схему для решения данного пространственно-временного дробного волнового уравнения переменного порядка. В п. 3 мы показываем устойчивость и сходимость предложенной схемы. Эффективность предложенной конечно-разностной схемы демонстрируется в п. 4. В последнем пункте мы приводим некоторые заключительные замечания.

## 2. Явная конечно-разностная схема для пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка

В данном пункте мы получим явную конечно-разностную схему для задачи (1)–(4).

Возьмем дискретные узловые точки соответственно для натуральных целых чисел  $M$  и  $N$ :

$$x_i = ih, \quad h = \frac{X}{M}, \quad i = 0, 1, \dots, M; \quad t_n = n\tau, \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

и введем

$$\alpha_n = \alpha(t_n), \quad \beta_i = \beta(x_i), \quad f_i^n = f(x_i, t_n), \quad \psi_i = \psi(x_i), \quad \varphi_i = \varphi(x_i).$$

Предположим, что  $u(x, t) \in C_{x,t}^{3,2}(\Omega)$ , где

$$C_{x,t}^{3,2}(\Omega) = \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \in C(\Omega) \right\}.$$

Взяв дискретную схему с использованием кубического интерполяционного многочлена в эрмитовой форме [32], мы дискретизируем дробную производную Капуто переменного порядка следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{\alpha_n} u(x_i, t_n) = \frac{\tau^{-\alpha_n}}{\Gamma(3 - \alpha_n)} & \left[ a_n^{(\alpha_n)} (8u(x_i, t_1) - u(x_i, t_2) - 7u(x_i, t_0) - 6\tau u'(x_i, t_0)) + \right. \\ & \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}^{(\alpha_n)} (u(x_i, t_{k-1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k+1})) + \\ & \left. \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}^{(\alpha_n)} (u(x_i, t_k) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_i, t_{k+2})) \right] + O(\tau^2), \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_k^{(\alpha_n)} &= k^{2-\alpha_n} - \frac{1}{3 - \alpha_n} [k^{3-\alpha_n} - (k-1)^{3-\alpha_n}], \\ b_k^{(\alpha_n)} &= \frac{1}{3 - \alpha_n} [k^{3-\alpha_n} - (k-1)^{3-\alpha_n}] - (k-1)^{2-\alpha_n}. \end{aligned}$$

Аппроксимируя дробную производную Рисса переменного порядка с помощью компактной схемы второго порядка для дробной производной Римана–Лиувилля, получим

$$\frac{\partial^{\beta_i} u(x_i, t_n)}{\partial |x|^{\beta_i}} = \delta_x^{\beta_i} u(x_i, t_n) + O(h^2), \quad (6)$$

здесь

$$\delta_x^{\beta_i} u(x_i, t_n) = K_{\beta_i} \left[ \delta_{x+}^{\beta_i} u(x_i, t_n) + \delta_{x-}^{\beta_i} u(x_i, t_n) \right],$$

$$\delta_{x+}^{\beta_i} u(x_i, t_n) = \frac{1}{h^{\beta_i}} \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} u(x_{i-k+1}, t_n),$$

$$\delta_{x-}^{\beta_i} u(x_i, t_n) = \frac{1}{h^{\beta_i}} \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} u(x_{i+k-1}, t_n),$$

$$K_{\beta_i} = -\frac{1}{2\cos(\beta_i \pi / 2)},$$

и коэффициенты  $\omega_k^{(\beta_i)}$ :

$$\begin{cases} \omega_0^{(\beta_i)} = \lambda_1 g_0^{(\beta_i)}, \\ \omega_1^{(\beta_i)} = \lambda_1 g_1^{(\beta_i)} + \lambda_0 g_0^{(\beta_i)}, \\ \omega_k^{(\beta_i)} = \lambda_1 g_k^{(\beta_i)} + \lambda_0 g_{k-1}^{(\beta_i)} + \lambda_{-1} g_{k-2}^{(\beta_i)} \quad (k \geq 2), \end{cases}$$

где

$$g_k^{(\beta_i)} = (-1)^k \binom{\beta_i}{k} \quad (k \geq 0),$$

$$\lambda_1 = \frac{\beta_i^2 + 3\beta_i + 2}{12}, \quad \lambda_0 = \frac{4 - \beta_i^2}{6}, \quad \lambda_{-1} = \frac{\beta_i^2 - 3\beta_i + 2}{12}.$$

Мы можем легко найти следующие рекурсивные соотношения для  $g_k^{(\beta_i)}$ :

$$\begin{cases} g_0^{(\beta_i)} = 1, \\ g_k^{(\beta_i)} = \left(1 - \frac{\beta_i + 1}{k}\right) g_{k-1}^{(\beta_i)} \quad (k \geq 1). \end{cases}$$

Для доказательства устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы будут использоваться следующие леммы:

**Лемма 1** [34]. Пусть  $1 \leq \beta_i \leq 2$ . Тогда  $g_k^{(\beta_i)}$  имеет следующие свойства:

- 1)  $g_0^{(\beta_i)} = 1, \quad g_1^{(\beta_i)} = -\beta_i < 0,$
- 2)  $1 \geq g_2^{(\beta_i)} \geq g_3^{(\beta_i)} \geq \dots \geq 0,$
- 3)  $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(\beta_i)} = 0, \quad \sum_{k=0}^m g_k^{(\beta_i)} \leq 0 \quad (m \geq 1).$

**Лемма 2** [34]. Коэффициенты  $\omega_k^{(\beta_i)}$  удовлетворяют следующим свойствам для  $1 \leq \beta_i \leq 2$ :

- 1)  $\omega_0^{(\beta_i)} \geq 0, \quad \omega_1^{(\beta_i)} \leq 0,$
- 2)  $\omega_k^{(\beta_i)} \geq 0 \quad (k \geq 3),$
- 3)  $\omega_0^{(\beta_i)} + \omega_2^{(\beta_i)} \geq 0,$
- 4)  $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k^{(\beta_i)} = 0, \quad \sum_{k=0}^m \omega_k^{(\beta_i)} \leq 0 \quad (m \geq 1).$

**Лемма 3.** Коэффициенты  $a_k^{(\alpha_n)}$  и  $b_k^{(\alpha_n)}$  в (5) удовлетворяют следующим свойствам для  $1 < \alpha_n < 2$ :

- 1)  $a_k^{(\alpha_n)} > 0, \quad b_k^{(\alpha_n)} > 0 \quad (k \geq 1),$
- 2)  $a_1^{(\alpha_n)} > a_2^{(\alpha_n)} > a_3^{(\alpha_n)} > \dots, \quad b_1^{(\alpha_n)} > b_2^{(\alpha_n)} > b_3^{(\alpha_n)} > \dots,$
- 3)  $a_{k+1}^{(\alpha_n)} - 2a_k^{(\alpha_n)} + a_{k-1}^{(\alpha_n)} > 0, \quad b_{k+1}^{(\alpha_n)} - 2b_k^{(\alpha_n)} + b_{k-1}^{(\alpha_n)} > 0 \quad (k \geq 2),$
- 4)  $2a_{k+1}^{(\alpha_n)} > a_k^{(\alpha_n)}, \quad 2b_{k+1}^{(\alpha_n)} > b_k^{(\alpha_n)} \quad (k \geq 2).$

**Доказательство.** 1) Для  $1 < \alpha_n < 2$  функция  $x^{2-\alpha_n}$  монотонно возрастающая, поэтому

$$(k-1)^{2-\alpha_n} < \int_{k-1}^k x^{2-\alpha_n} dx < k^{2-\alpha_n}.$$

Таким образом, доказательство очевидно.

2) Обозначим

$$f(x) = x^{2-\alpha_n} - \frac{1}{3-\alpha_n} [x^{3-\alpha_n} - (x-1)^{3-\alpha_n}].$$

Тогда  $f(x) > 0, f'(x) < 0$  в  $[1, +\infty)$  и  $f(k) = a_k^{(\alpha_n)}$ . Поэтому  $a_1^{(\alpha_n)} > a_2^{(\alpha_n)} > a_3^{(\alpha_n)} > \dots$ . Это же верно для  $b_k^{(\alpha_n)}$ .

3) Для определенной выше функции  $f(x)$  мы имеем  $f''(x) > 0$  и, таким образом, мы можем заключить, что  $f'(x)$  — возрастающая функция, принимающая отрицательные значения. Поэтому  $\int_{k-1}^k f'(x) dx < \int_k^{k+1} f'(x) dx$  и соответственно  $f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) > 0$ . Это же можно доказать аналогичным образом для случая  $b_k^{(\alpha_n)}$ .

4) Обозначим

$$f(x) = 2 \left[ (x+1)^{2-\alpha_n} - \frac{1}{3-\alpha_n} \left( (x+1)^{3-\alpha_n} - x^{3-\alpha_n} \right) \right] - \left[ x^{2-\alpha_n} - \frac{1}{3-\alpha_n} \left( x^{3-\alpha_n} - (x-1)^{3-\alpha_n} \right) \right].$$

Тогда  $f(x) > 0$  в  $[2, +\infty)$  и  $f(k) = 2a_{k+1}^{(\alpha_n)} - a_k^{(\alpha_n)}$ , таким образом  $2a_{k+1}^{(\alpha_n)} > a_k^{(\alpha_n)}$  ( $k \geq 2$ ). Это же верно для  $b_k^{(\alpha_n)}$ .

В дискретной точке  $(x_i, t_n)$  задачу (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^{-\alpha_n}}{\Gamma(3-\alpha_n)} \left[ a_n^{(\alpha_n)} \left( 8u(x_i, t_1) - u(x_i, t_2) - 7u(x_i, t_0) - 6\tau\psi_i \right) + \right. \\ & \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}^{(\alpha_n)} \left( u(x_i, t_{k-1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k+1}) \right) + \\ & \quad \left. \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}^{(\alpha_n)} \left( u(x_i, t_k) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_i, t_{k+2}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left[ \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} u(x_{i-k+1}, t_n) + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} u(x_{i+k-1}, t_n) \right] + f_i^n + R_{i,n}, \quad (7) \\ & i = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где  $|R_{i,n}| \leq C'(\tau^2 + h^2)$ .

Пусть  $u_i^n$  — приближенное значение  $u(x_i, t_n)$ . Тогда приведенную выше схему можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^{-\alpha_n}}{\Gamma(3-\alpha_n)} \left[ a_n^{(\alpha_n)} \left( 8u_i^1 - u_i^2 - 7u_i^0 - 6\tau\psi_i \right) + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}^{(\alpha_n)} \left( u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1} \right) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}^{(\alpha_n)} \left( u_i^k - 2u_i^{k+1} + u_i^{k+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} u_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} u_{i+k-1}^n \right) + f_i^n. \quad (8) \end{aligned}$$

Приведенное выше уравнение можно упростить:

$$\begin{aligned} & \left( b_1^{(\alpha_1)} - a_1^{(\alpha_1)} \right) u_i^2 = -a_1^{(\alpha_1)} \left( 8u_i^1 - 7u_i^0 - 6\tau\psi_i \right) - b_1^{(\alpha_1)} \left( u_i^0 - 2u_i^1 \right) + \\ & \quad \frac{\tau^{\alpha_1} \Gamma(3-\alpha_1)}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} u_{i-k+1}^1 + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} u_{i+k-1}^1 \right) + \tau^{\alpha_1} \Gamma(3-\alpha_1) f_i^1, \quad (9) \\ & i = 1, 2, \dots, M-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^{(\alpha_n)} u_i^{n+1} = & -a_n^{(\alpha_n)} \left( 8u_i^1 - u_i^2 - 7u_i^0 - 6\tau\psi_i \right) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1} \right) - \\
& \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( u_i^j - 2u_i^{j+1} + u_i^{j+2} \right) - b_1^{(\alpha_n)} u_i^{n-1} + 2b_1^{(\alpha_n)} u_i^n + \\
& \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} u_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} u_{i+k-1}^n \right) + \tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n) f_i^n, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 2, 3, \dots, N-1.$$

С другой стороны, используя начальные и граничные условия и разложение в ряд Тейлора, можем получить

$$\begin{aligned}
u(x_i, t_1) = u(x_i, t_0) + \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \xi)}{\partial t^2} \tau^2 = \varphi(x_i) + \psi(x_i) \tau + O(\tau^2), \\
u_i^1 = \varphi_i + \psi_i \tau, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Теперь, в соответствие с (9)–(12), матричные представления будут следующими:

$$\begin{aligned}
\left( b_1^{(\alpha_1)} - a_1^{(\alpha_1)} \right) U^2 = & -a_n^{(\alpha_1)} \left( 8U^1 - 7U^0 - 6\tau\Psi \right) - b_1^{(\alpha_1)} \left( U^0 - 2U^1 \right) + \\
& \tau^{\alpha_1} \Gamma(3 - \alpha_1) C_\beta D_\beta U^1 + \tau^{\alpha_1} \Gamma(3 - \alpha_1) F^1, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^{(\alpha_n)} U^{n+1} = & -a_n^{(\alpha_n)} \left( 8U^1 - U^2 - 7U^0 - 6\tau\Psi \right) - \\
& \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( U^{j-1} - 2U^j + U^{j+1} \right) - \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( U^j - 2U^{j+1} + U^{j+2} \right) - \\
& b_1^{(\alpha_n)} U^{n-1} + 2b_1^{(\alpha_n)} U^n + \tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n) C_\beta D_\beta U^n + \tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n) F^n, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$U^1 = \Phi + \tau\Psi, \quad U^0 = \Phi. \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
U^n = & (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{M-1}^n)^\top, \quad F^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_{M-1}^n)^\top, \\
D_\beta = & \begin{pmatrix} 2\omega_1^{(\beta_1)} & \omega_0^{(\beta_1)} + \omega_2^{(\beta_1)} & \omega_3^{(\beta_1)} & \dots & \omega_{M-1}^{(\beta_1)} \\ \omega_0^{(\beta_2)} + \omega_2^{(\beta_2)} & 2\omega_1^{(\beta_2)} & \omega_0^{(\beta_2)} + \omega_2^{(\beta_2)} & \dots & \omega_{M-2}^{(\beta_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{M-1}^{(\beta_{M-1})} & \omega_{M-2}^{(\beta_{M-1})} & \omega_{M-3}^{(\beta_{M-1})} & \dots & 2\omega_1^{(\beta_{M-1})} \end{pmatrix}, \\
\Phi = & (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M-1})^T, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{M-1})^T, \\
C_\beta = & \text{diag} \left( \frac{1}{K_{\beta_1} h^{\beta_1}}, \frac{1}{K_{\beta_2} h^{\beta_2}}, \dots, \frac{1}{K_{\beta_{M-1}} h^{\beta_{M-1}}} \right).
\end{aligned}$$

### 3. Анализ устойчивости и сходимости

В данном пункте обсудим устойчивость и сходимость предлагаемой явной конечно-разностной схемы.

**Теорема 1.** *Если*

$$\tau^{\alpha_{\min}} \leq \frac{K_{\beta_{\min}}}{\Gamma(3 - \alpha_{\min})} h^{\beta_{\max}} \quad (16)$$

верно для  $1 < \alpha_{\min} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max} < 2$  и  $1 < \beta_{\min} \leq \beta(x) \leq \beta_{\max} < 2$ , то явная конечно-разностная схема (9)–(12) для пространственно-временного дробного волнового уравнения переменного порядка Рисса–Капуто (1)–(4) является устойчивой.

**Доказательство.** Теперь пусть численные решения, полученные из двух различных начальных значений  $W^0 = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_{M-1}^0)^\top$  и  $V^0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_{M-1}^0)^\top$  будут  $W^n = (w_1^n, w_2^n, \dots, w_{M-1}^n)^\top$  и  $V^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_{M-1}^n)^\top$ , и положим

$$\varepsilon^n = W^n - V^n.$$

Тогда из (15) мы получим  $\|\varepsilon^1\|_\infty \leq C\|\varepsilon^0\|_\infty$ , где  $C$  — постоянная. Из (9) имеем

$$\begin{aligned} (b_1^{(\alpha_1)} - a_1^{(\alpha_1)})\varepsilon_i^2 &= -a_1^{(\alpha_1)}(8\varepsilon_i^1 - 7\varepsilon_i^0) + 6(\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^0) - b_1^{(\alpha_1)}(\varepsilon_i^0 - 2\varepsilon_i^1) + \\ &\quad \frac{\tau^{\alpha_1}\Gamma(3 - \alpha_1)}{K_{\beta_i}h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} \varepsilon_{i-k+1}^1 + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} \varepsilon_{i+k-1}^1 \right). \end{aligned}$$

С учетом леммы 2  $D_\beta$  будет матрицей с диагональным преобладанием и  $1 < \beta_i < 2$ . Тогда из леммы 1 получим

$$\begin{aligned} \omega_1^{(\beta_i)} &= \lambda_1 g_1^{(\beta_i)} + \lambda_0 g_0^{(\beta_i)} = -\lambda_1 \beta_i + \lambda_0 = -\frac{\beta_i^2 + 3\beta_i + 2}{12} \beta_i + \frac{4 - \beta_i^2}{6} \\ &= -\frac{(\beta_i - 1)(\beta_i + 2)(\beta_i + 4)}{12} > -2. \end{aligned}$$

Теперь положим  $\|\varepsilon^2\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M-1} |\varepsilon_i^2| = |\varepsilon_{i_0}^2|$ , тогда

$$\begin{aligned} (b_1^{(\alpha_1)} - a_1^{(\alpha_1)})\|\varepsilon^2\|_\infty &= \left| -8a_1^{(\alpha_1)}\varepsilon_{i_0}^1 + 7a_1^{(\alpha_1)}\varepsilon_{i_0}^0 + 6\varepsilon_{i_0}^1 - 6\varepsilon_{i_0}^0 - b_1^{(\alpha_1)}\varepsilon_{i_0}^0 + 2b_1^{(\alpha_1)}\varepsilon_{i_0}^1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\tau^{\alpha_1}\Gamma(3 - \alpha_1)}{K_{\beta_{i_0}}h^{\beta_{i_0}}} \left( \sum_{k=0}^{i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0-k+1}^1 + \sum_{k=0}^{M-i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0+k-1}^1 \right) \right| \\ &\leq (6 + 2b_1^{(\alpha_1)} - 8a_1^{(\alpha_1)})\|\varepsilon^1\|_\infty + (6 + b_1^{(\alpha_1)} - 7a_1^{(\alpha_1)})\|\varepsilon^0\|_\infty - \\ &\quad \frac{\tau^{\alpha_1}\Gamma(3 - \alpha_1)}{K_{\beta_{i_0}}h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \|\varepsilon^1\|_\infty \\ &\leq \left( (6 + 2b_1^{(\alpha_1)} - 8a_1^{(\alpha_1)}) + \frac{2\tau^{\alpha_1}\Gamma(3 - \alpha_1)}{K_{\beta_{i_0}}h^{\beta_{i_0}}} \right) \|\varepsilon^1\|_\infty + \\ &\quad (6 + b_1^{(\alpha_1)} - 7a_1^{(\alpha_1)})\|\varepsilon^0\|_\infty \\ &\leq \frac{10}{3 - \alpha_{\max}} \|\varepsilon^1\|_\infty + \frac{5 + \alpha_{\max}}{3 - \alpha_{\max}} \|\varepsilon^0\|_\infty \leq C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty, \end{aligned}$$

где  $C_1 = \frac{10}{3 - \alpha_{\max}} C + \frac{5 + \alpha_{\max}}{3 - \alpha_{\max}}$ .

Пусть  $\|\varepsilon^k\|_\infty \leq C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда из численной схемы (10) имеем

$$\begin{aligned} b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_i^{n+1} &= -a_n^{(\alpha_n)} \left( 8\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2 - 7\varepsilon_i^0 + 6\varepsilon_i^0 - 6\varepsilon_i^1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( \varepsilon_i^{j-1} - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_i^{j+1} \right) - \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( \varepsilon_i^j - 2\varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_i^{j+2} \right) - \\ &\quad b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_i^{n-1} + 2b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_i^n + \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} \varepsilon_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} \varepsilon_{i+k-1}^n \right). \end{aligned}$$

Если  $\|\varepsilon^{n+1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M-1} |\varepsilon_i^{n+1}| = |\varepsilon_{i_0}^{n+1}|$ , из приведенного выше уравнения можем вывести

$$\begin{aligned} \left| b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^{n+1} \right| &= \left| -a_n^{(\alpha_n)} \left( 2\varepsilon_{i_0}^1 - \varepsilon_{i_0}^2 - \varepsilon_{i_0}^0 \right) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( \varepsilon_{i_0}^{j-1} - 2\varepsilon_{i_0}^j + \varepsilon_{i_0}^{j+1} \right) - \right. \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}^{(\alpha_n)} \left( \varepsilon_{i_0}^j - 2\varepsilon_{i_0}^{j+1} + \varepsilon_{i_0}^{j+2} \right) - b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^{n-1} + 2b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^n + \\ &\quad \left. \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \left( \sum_{k=0}^{i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0+k-1}^n \right) \right| \\ &= \left| -2a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^1 + a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^2 + a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 - a_{n-1}^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 - \left( a_{n-2}^{(\alpha_n)} - 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^1 - \right. \\ &\quad \sum_{j=2}^{n-2} \left( a_{n-j+1}^{(\alpha_n)} - 2a_{n-j}^{(\alpha_n)} + a_{n-j-1}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^j - \left( a_2^{(\alpha_n)} - 2a_1^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^{n-1} - a_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^n - \\ &\quad b_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 - \left( b_{n-1}^{(\alpha_n)} - 2b_n^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^1 - \sum_{j=2}^{n-1} \left( b_{n-j+2}^{(\alpha_n)} - 2b_{n-j+1}^{(\alpha_n)} + b_{n-j}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^j - \\ &\quad \left. \left( b_2^{(\alpha_n)} - 2b_1^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^n + \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \left( \sum_{k=0}^{i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0+k-1}^n \right) \right|. \end{aligned}$$

Используя результат леммы 3, получим

$$\begin{aligned} \left| b_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^{n+1} \right| &\leq \left| -2a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^1 - a_{n-1}^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 - \sum_{j=2}^{n-2} \left( a_{n-j+1}^{(\alpha_n)} - 2a_{n-j}^{(\alpha_n)} + a_{n-j-1}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^j - a_1^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^n - \right. \\ &\quad b_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 - \sum_{j=2}^{n-1} \left( b_{n-j+2}^{(\alpha_n)} - 2b_{n-j+1}^{(\alpha_n)} + b_{n-j}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^j \left| + \left| a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^2 + a_n^{(\alpha_n)} \varepsilon_{i_0}^0 + \right. \right. \\ &\quad \left( 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^1 + \left( 2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^{n-1} + \left( 2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^1 + \\ &\quad \left. \left( 2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)} \right) \varepsilon_{i_0}^n \right| + \left| \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \left( \sum_{k=0}^{i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0+k-1}^n \right) \right| \\ &\leq \left[ 2a_n^{(\alpha_n)} + a_{n-1}^{(\alpha_n)} + \sum_{j=2}^{n-2} \left( a_{n-j+1}^{(\alpha_n)} - 2a_{n-j}^{(\alpha_n)} + a_{n-j-1}^{(\alpha_n)} \right) + a_1^{(\alpha_n)} + b_n^{(\alpha_n)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=2}^{n-1} \left( b_{n-j+2}^{(\alpha_n)} - 2b_{n-j+1}^{(\alpha_n)} + b_{n-j}^{(\alpha_n)} \right) \Big] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty + \\
& \left[ a_n^{(\alpha_n)} + a_n^{(\alpha_n)} + \left( 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left( 2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)} \right) \right] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty + \\
& \left| \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \left( \sum_{k=0}^{i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i_0} \omega_k^{(\beta_{i_0})} \varepsilon_{i_0+k-1}^n \right) \right| \\
& \leq 2 \left[ 2a_n^{(\alpha_n)} + \left( 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left( 2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)} \right) \right] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty - \frac{2\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} C_1 \|\varepsilon^n\|_\infty \\
& \leq 2 \left[ 2a_n^{(\alpha_n)} + \left( 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left( 2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)} \right) - \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \right] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^{n+1}\|_\infty & \leq \frac{2}{b_1^{(\alpha_n)}} \left[ 2a_n^{(\alpha_n)} + \left( 2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)} \right) + \left( 2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left( 2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)} \right) - \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \right] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty \\
& < \frac{2}{b_1^{(\alpha_n)}} \left[ 4 \left( a_1^{(\alpha_n)} + b_1^{(\alpha_n)} \right) - \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \right] C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty \\
& = \frac{2}{b_1^{(\alpha_n)}} \left( 4 - \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \right) C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty \\
& < \frac{4}{b_1^{(\alpha_n)}} \left( 2 + \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \right) C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty \leq \frac{12}{b_1^{(\alpha_n)}} C_1 \|\varepsilon^0\|_\infty \leq C_2 \|\varepsilon^0\|_\infty,
\end{aligned}$$

где  $C_2 = 12(3 - \alpha_{\min})C_1$ . □

**Теорема 2.** Пусть  $u(x, t) \in C_{x,t}^{3,2}(\Omega)$  — решение пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка (1)–(4),  $u_i^n$  — численное решение, вычисленное с использованием конечно-разностной схемы (9)–(12). Если выполняется то же условие (16), что и в теореме 1, то существует положительная постоянная  $C > 0$ , такая что

$$|u(x_i, t_n) - u_i^n| \leq C(\tau^2 + h^2), \quad i = 1, 2, \dots, M-1; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

**Доказательство.** Пусть  $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$  и  $E^n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{M-1}^n)^\top$ . Из (7) и (10) получим

$$\begin{aligned} b_1^{(\alpha_n)} e_i^{n+1} = & -a_n^{(\alpha_n)} (8e_i^1 - e_i^2 - 7e_i^0) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(\alpha_n)} (e_i^{j-1} - 2e_i^j + e_i^{j+1}) - \\ & \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}^{(\alpha_n)} (e_i^j - 2e_i^{j+1} + e_i^{j+2}) - b_1^{(\alpha_n)} e_i^{n-1} + 2b_1^{(\alpha_n)} e_i^n + \\ & \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_i} h^{\beta_i}} \left( \sum_{k=0}^i \omega_k^{(\beta_i)} e_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{M-i} \omega_k^{(\beta_i)} e_{i+k-1}^n \right) + \tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n) R_{i,n}. \end{aligned}$$

Пусть  $\|e^{n+1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M-1} |e_i^{n+1}| = |e_{i_0}^{n+1}|$ . Тогда, используя теорему 1 и лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_\infty & \leq \frac{2}{b_1^{(\alpha_n)}} \left[ 8a_n^{(\alpha_n)} + (2a_{n-1}^{(\alpha_n)} - a_{n-2}^{(\alpha_n)}) + (2a_1^{(\alpha_n)} - a_2^{(\alpha_n)}) + (2b_n^{(\alpha_n)} - b_{n-1}^{(\alpha_n)}) + \right. \\ & \quad \left. (2b_1^{(\alpha_n)} - b_2^{(\alpha_n)}) - \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{K_{\beta_{i_0}} h^{\beta_{i_0}}} \omega_1^{(\beta_{i_0})} \right] C_1 \|e^0\|_\infty + \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{b_1^{(\alpha_n)}} C' (\tau^2 + h^2) \\ & = \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{b_1^{(\alpha_n)}} C' (\tau^2 + h^2) \leq \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{b_n^{(\alpha_n)}} C' (\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n^{(\alpha_n)})^{-1}}{n^{\alpha_n}} = \frac{n^{-\alpha_n}}{\frac{n^{3-\alpha_n} - (n-1)^{3-\alpha_n}}{3-\alpha_n} - (n-1)^{2-\alpha_n}} = 0,$$

имеем

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \frac{\tau^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n)}{b_n^{(\alpha_n)}} C' (\tau^2 + h^2) < (n\tau)^{\alpha_n} \Gamma(3 - \alpha_n) C' (\tau^2 + h^2).$$

Поскольку  $n\tau \leq T$  конечно, то существует положительная постоянная  $C > 0$ , такая что

$$\|e^{n+1}\|_\infty < C(\tau^2 + h^2).$$

Это завершает доказательство.  $\square$

#### 4. Численные эксперименты

В этом пункте покажем эффективность описанной выше конечно-разностной схемы с помощью численного эксперимента со следующим пространственно-временным дробным волновым уравнением Рисса–Капуто переменного порядка

$${}_0^C D_t u(x, t) = \frac{\partial^{\beta(x)} u(x, t)}{\partial |x|^{\beta(x)}} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times [0, 1]$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x^2(1-x), \quad 0 < x < 1, \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Возьмем порядки производной  $\alpha(t) = 1.5 + 0.5e^{-t^2-1}$  и  $\beta(x) = 1.5 + 0.25\cos(\pi x)$ . Источник задается следующим образом:

$$f(x, t) = \frac{2x^2(1-x)t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + \frac{t^2+1}{\cos\frac{\beta(x)\pi}{2}} \left[ \frac{x^{2-\beta(x)} + (1-x)^{2-\beta(x)}}{\Gamma(3-\beta(x))} - 3 \frac{x^{3-\beta(x)} + (1-x)^{3-\beta(x)}}{\Gamma(4-\beta(x))} \right].$$

Точное решение этой задачи  $u(x, t) = x^2(1-x)(t^2+1)$ . Значения  $\tau$  и  $h$  должны удовлетворять условию  $\tau^{\alpha_{\min}} \leq 1.4745h^{\beta_{\max}}$  для соблюдения условия устойчивости (16).

Чтобы продемонстрировать точность численного решения  $u_i^n$ , вычислим максимальную абсолютную ошибку

$$E_{\infty}(h, \tau) = \max_{0 \leq n \leq N} \|e^n\|_{\infty}.$$

Порядки временной и пространственной сходимости вычисляются соответственно следующим образом:

$$\text{order}_{\infty}^t = \log_2 \left( \frac{E_{\infty}(h, 2\tau)}{E_{\infty}(h, \tau)} \right), \quad \text{order}_{\infty}^s = \log_2 \left( \frac{E_{\infty}(2h, \tau)}{E_{\infty}(h, \tau)} \right).$$

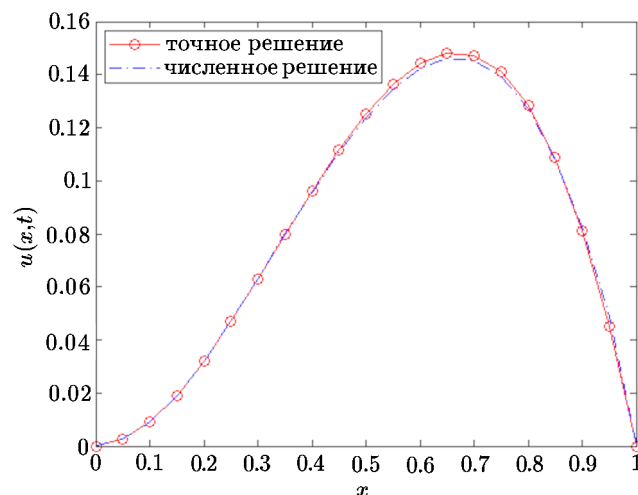
В таблице 1 показаны численные ошибки и порядки временной сходимости для различных размеров временного шага  $\tau$  с фиксированным размером пространственного шага  $h = 1/10$ . В табл. 2 при фиксированном размере временного шага  $\tau = 1/50$  представлены численные ошибки и порядки сходимости в пространственном направлении для различных размеров пространственного шага  $h$ . На рисунке представлены кривые точного и численного решений предлагаемого подхода для  $t = 1$  при  $h = 0.05$  и  $\tau = 0.02$ .

**Таблица 1.** Максимальные абсолютные ошибки и порядки временной сходимости при  $h = 1/10$

$\tau$	$E_{\infty}(h, \tau)$	$\text{order}_{\infty}^t$
1/20	$1.6996 e-2$	—
1/40	$4.2723 e-3$	2.9921
1/80	$1.0647 e-3$	2.0051
1/160	$2.6540 e-4$	2.0037

**Таблица 2.** Максимальные абсолютные ошибки и порядки пространственной сходимости при  $\tau = 1/50$

$h$	$E_{\infty}(h, \tau)$	$\text{order}_{\infty}^s$
1/4	$9.5272 e-2$	—
1/8	$2.3912 e-2$	1.9943
1/16	$5.9701 e-3$	2.0019
1/32	$1.4872 e-3$	2.0052



**Рис.** Поведение точного и численного решений для  $t = 1$  при  $h = 0.05$  и  $\tau = 0.02$

## 5. Выводы

В данной статье мы представили явный конечно-разностный метод для пространственно-временного дробного волнового уравнения Рисса–Капуто переменного порядка. Мы доказали, что явная конечно-разностная схема устойчива при определенных ограничениях, а также оценили общую ошибку усечения. Численный пример показывает эффективность предложенной конечно-разностной схемы. В будущем с использованием этой идеи будет проведена работа по построению устойчивой численной схемы многомерного дробного волнового уравнения переменного порядка.

## Литература

1. **Podlubny I.** Fractional Differential Equations. — New York: Academic Press, 1999.
2. **Zimbardo G., Perri S** On the fractional diffusion-advection equation for fluids and plasmas // Fluids. — 2019. — Vol. 4, № 62. — DOI: 10.3390/fluids4020062.
3. **Chen W., Sun H.G., Zhang X.D., Korosak D.** Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives // Computers and Mathematics with Applications. — 2010. — Vol. 59. — P. 1754–1758.
4. **Liu L., Zheng L.C., Zhang X.X.** Fractional anomalous diffusion with Cattaneo-Christov flux effects in a comb-like structure // Applied Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 40, iss. 13-14. — P. 6663–6675.
5. **Guo S.M., Mei L.Q., Li Y., Sun Y.F.** The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in fluid mechanics // Physics Letters A. — 2012. — Vol. 376, iss. 4. — P. 407–411.
6. **Metzler R., Klafter J.** The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach // Physics Reports: Review Section of Physics Letters. — 2000. — Vol. 339, iss. 1. — P. 1–77.
7. **Metzler R., Nonnenmacher T.F.** Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker–Planck equations, and physical motivation // Chemical Physics. — 2002. — Vol. 284. — P. 67–90.

8. **Samko S.G., Ross B.** Integration and differentiation to a variable fractional order // *Integral Transforms and Special Functions*. — 1993. — Vol. 1, iss. 4. — P. 277–300. — DOI: 10.1080/10652469308819027.
9. **Lorenzo C.F., Hartley T.T.** Initialized fractional calculus // *Intern. J. Applied Mathematics and Computer Science*. — 2000. — Vol. 3, iss. 3. — P. 249–265.
10. **Ingman D., Suzdalnitsky J., Zeifman M.** Constitutive dynamic-order model for nonlinear contact phenomena // *J. Applied Mechanics: Transactions ASME*. — 2000. — Vol. 67, iss. 2. — P. 383–390.
11. **Liu F., Zhuang P., Anh V., Turner I.** A fractional-order implicit difference approximation for the space-time fractional diffusion equation // *The ANZIAM J.* — 2006. — Vol. 47. — P. C48–C68.
12. **Lorenzo C.F., Hartley T.T.** Variable order and distributed order fractional operators // *Nonlinear Dynamics*. — 2002. — Vol. 29, iss. 1. — P. 57–98.
13. **Ingman D., Suzdalnitsky J.** Control of damping oscillations by fractional differential operator with time-dependent order // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2004. — Vol. 193, iss. 52. — P. 5585–5595.
14. **Coimbra C.F.M.** Mechanics with variable-order differential operators // *Annalen der Physik*. — 2003. — Vol. 12, iss. 11–12. — P. 692–703.
15. **Coimbra C.F.M., Ramirez L.E.S.** Variable order constitutive relation for viscoelasticity // *Annalen der Physik*. — 2007. — Vol. 16, iss. 7–8. — P. 543–552.
16. **Coimbra C.F.M., Soon C.M., Kobayashi M.H.** The variable viscoelasticity oscillator // *Annalen der Physik*. — 2005. — Vol. 14, iss. 6. — P. 378–389.
17. **Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M.** Fractional diffusion in inhomogeneous media // *J. Physics A: Mathematical and General*. — 2005. — Vol. 38. — P. 679–684.
18. **Santamaria F., Wils S., De Schutter E., Augustine G.J.** Anomalous diffusion in Purkinje cell dendrites caused by spines // *Neuron*. — 2006. — Vol. 52. — P. 635–648.
19. **Sun H.G., Chen W., Chen Y.Q.** Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2009. — Vol. 388. — P. 4586–4592.
20. **Sun H.G., Chen W., Wei H., Chen Y.Q.** A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems // *The European Physical J. Special Topics*. — 2011. — Vol. 193. — P. 185–192.
21. **Razminia A., Dizaji A., Majd V.J.** Solution existence for non-autonomous variable-order fractional differential equations // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2011. — Vol. 55. — P. 1106–1117.
22. **Mainardi F.** Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics // *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / A. Carpinteri, F. Mainardi. — Springer, 1997. — P. 291–348. — DOI: 10.1007/978-3-7091-2664-6\_7.
23. **Chen M., Deng W.** A second-order accurate numerical method for the space-time tempered fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematics Letters*. — 2017. — Vol. 68. — P. 87–93.
24. **Nagy A.M., Sweilam N.H.** Numerical simulations for a variable order fractional cable equation // *Acta Mathematica Scientia*. — 2018. — Vol. 38B, iss. 2. — P. 580–590.
25. **Cao J.X., Qiu Y.N., Song G.J.** A compact finite difference scheme for variable order subdiffusion equation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 48. — P. 140–149.
26. **Li Z., Wang H., Xiao R., Yang S.** A variable-order fractional differential equation model of shape memory polymers // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2017. — Vol. 102. — P. 473–485.

27. **Jia Y.T., Xu M.Q., Lin Y.Z.** A numerical solution for variable order fractional functional differential equation // *Applied Mathematics Letters*. — 2017. — Vol. 64. — P. 125–130
28. **Sweilam N.H., Assiri T.A.R.** Numerical simulations for the space-time variable order nonlinear fractional wave equation // *J. Applied Mathematics*. — 2013. — DOI: 10.1155/2013/586870.
29. **Shen S., Liu F., Anh V.** Numerical approximations and solution techniques for the space-time Riesz–Caputo fractional advection–diffusion equation // *Numerical Algorithms*. — 2011. — Vol. 56. — P. 383–403.
30. **Bhrawy A.H., Doha E.H., Alzaidy J.F., Abdelkawy M.A.** A space-time spectral collocation algorithm for the variable order fractional wave equation // *SpringerPlus*. — 2016. — Vol. 5. — Article № 1220. — DOI: 10.1186/s40064-016-2899-5.
31. **Chen R., Liu F., Anh V.** Numerical methods and analysis for a multi-term time-space variable-order fractional advection–diffusion equations and applications // *J. Computational and Applied Mathematics*. — 2019. — Vol. 352. — P. 437–452.
32. **Zhao X., Sun Z.Z., Karniadakis G.E.** Second-order approximations for variable order fractional derivatives: Algorithms and applications // *J. Computational Physics*. — 2015. — Vol. 293. — P. 184–200.
33. **Bhrawy A.H., Zaky M.A.** Highly accurate numerical schemes for multi-dimensional space variable-order fractional Schrödinger equations // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2017. — Vol. 73, iss. 6. — P. 1100–1117.
34. **Hao Z.P., Sun Z.Z., Cao W.R.** A fourth-order approximation of fractional derivatives with its applications // *J. Computational Physics*. — 2015. — Vol. 281. — P. 787–805.

*Поступила в редакцию 14 ноября 2023 г.*

*После исправления 25 марта 2024 г.*

*Принята к печати 19 апреля 2024 г.*

