

УДК 519.635.4

Апостериорные мажоранты ошибки для численных решений задач изгиба пластинки на винклеровском основании*

В.Г. Корнеев

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, С.-Петербург, 199034

E-mail: vad.korneev2011@yandex.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 16, 2023.

Корнеев В.Г. Апостериорные мажоранты ошибки для численных решений задач изгиба пластинки на винклеровском основании // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 43–55.

Статья посвящена смешанному методу конечных элементов для уравнения $\Delta\Delta u + \kappa^2 u = f$, $x \in \Omega$, с граничными условиями $u = \partial u / \partial \nu = 0$ на $\partial\Omega$, где ν — нормаль к границе, а $\kappa \geq 0$ — произвольная константа на каждом конечном элементе. При $\kappa \equiv 0$ апостериорные оценки ошибок посредством невязки были получены для смешанного метода Сьярле–Равьяра несколькими авторами с использованием различных норм ошибок. Оценки, называемые иногда апостериорными функциональными мажорантами ошибок, представляются менее зависимыми от постоянных в общих оценках аппроксимации и являются более гибкими и адаптируемыми для достижения более высокой точности при практической реализации. В этой статье мы представляем апостериорные функциональные мажоранты ошибок для смешанного метода Сьярле–Равьяра в случае коэффициента κ , отличного от нуля и имеющего большие скачки. Робастность и точность оценок подтверждаются нижними оценками локальной эффективности.

DOI: 10.15372/SJNM20230104

Ключевые слова: апостериорные оценки погрешности, сингулярно возмущенные эллиптические уравнения 4-го порядка, смешанный метод конечных элементов, оценки погрешности снизу.

Korneev V.G. A posteriori error majorants for numerical solutions of plate bending problems on a Winkler basis // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 43–55.

The paper is devoted to the mixed finite element method for the equation $\Delta\Delta u + \kappa^2 u = f$, $x \in \Omega$, with boundary conditions $u = \partial u / \partial \nu = 0$ on $\partial\Omega$, where ν is the normal to the boundary and $\kappa \geq 0$ is an arbitrary constant on each finite element. At $\kappa \equiv 0$ residual type a posteriori error bounds for the mixed Ciarlet–Raviart method were derived by several authors at the use of different error norms. The bounds, termed sometimes a posteriori functional error majorants, seem to be less dependent on the constants in the general approximation bounds and are more flexible and adaptable for attaining higher accuracy at practical implementation. In this paper, we present a posteriori functional error majorants for the mixed Ciarlet–Raviart method in the case of $\kappa \neq 0$ and having large jumps. Robustness and sharpness of the bounds are approved by the lower bounds of local efficiency.

Keywords: a posteriori error bounds, singularly perturbed elliptic equations of 4th order, mixed finite element method, lower error bounds.

*Работа была представлена на международной конференции “Марчуковские научные чтения – 2022”.

1. Введение

Статья посвящена апостериорным оценкам погрешности конечноэлементных решений краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u + \sigma u &= f(x) && \text{в } \Omega, \\ u = \partial u / \partial \nu &= 0 && \text{на } \partial \Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ν — внутренняя нормаль к границе $\partial \Omega$, $\sigma = \kappa^2$ и κ — произвольная поэлементно постоянная неотрицательная функция. Достаточно простая и локально эффективная апостериорная оценка погрешности для смешанного метода конечных элементов Сьярле–Равьяра в случае полигональной области Ω и $\sigma \equiv 0$ была получена методом невязки Gudi [8]. При этом не использовались ни условие эллиптичности краевой задачи, ни условие квазиоднородности сетки. По глобально и локально эффективным апостериорным оценкам погрешности того же класса смешанных методов есть и другие работы, в которых методом невязки оцениваются несколько различающиеся нормы погрешности, см., например, Charbonneau и др. [6], Verfürth [11] и ссылки в этих работах. Совсем недавно Du и др. [7] рассмотрели смешанный метод конечных элементов (МКЭ) для задачи $\varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u = f(x)$, $u = \partial u / \partial \nu = 0$ на $\partial \Omega$, с малым параметром $\varepsilon > 0$. Принимая во внимание дифференциальные свойства решения, они оценили отличную от используемой в [8] норму погрешности, определяемую выражением $(\varepsilon |v - v_h|_{H^1(\Omega)} + |v - v_h|_{L_2(\Omega)} + |u - u_h|_{H^1(\Omega)})^{1/2}$, в которой $v = \Delta u$ и $(v_h, u_h)^\top$ — решение смешанного МКЭ. Методом невязки были получены апостериорные оценки, робастные по ε , а их точность подтверждена оценками снизу, называемыми в литературе оценками эффективности.

Апостериорные оценки метода невязки характеризуются относительно сильной зависимостью от постоянных в локальных и нередко глобальных оценках аппроксимации. В то же время имеются апостериорные оценки погрешности другого типа, в которых точность приближенных решений измеряется посредством свободно выбираемых тестирующих полей потоков, напряжений, моментов и т. п. Они включают оценки, иногда называемые функциональными мажорантами ошибки, оценки, основанные на восстановлении потоков, напряжений и т. п., и другие и позволяют избежать интенсивного применения оценок аппроксимации. Одновременно развивались и широко применялись на практике различные способы нахождения тестирующих полей, в том числе получаемых с помощью процедур восстановления, обладающих свойством суперсходимости или обеспечивающих выполнение уравнений равновесия.

Попытка распространить результаты для смешанных МКЭ на краевую задачу (1.1) при $\sigma \geq 0$ была сделана Корнеевым [9, 10]. Однако в отличие от конформных методов, см. [9], полученные оценки, типа функциональных мажорант, были точными в случае σ , не сильно изменяющимся между элементами, но при значительных скачках утрачивали робастность. Дополнительное их ограничение в том, что, как правило, предполагаются выполненными, иногда неявно, условие эллиптической регулярности задачи или условие квазиоднородности сетки. В данной статье для смешанных МКЭ, введенных для задачи (1.1) при $\sigma \equiv 0$ Сьярле и Равьяром [5], мы доказываем апостериорные оценки ошибки в форме функциональных мажорант, которые робастны для σ , изменяющихся между конечными элементами в значительных пределах. Благодаря тому, что условие эллиптичности не используется при их выводе, они применимы к более широкому классу задач. Отметим также простоту их вывода и отсутствие условия квазиоднородности сеток. Для подтверждения точности апостериорных оценок по порядку мы доказываем соответствующие оценки снизу.

Статья содержит четыре пункта. В п. 2 даются слабая формулировка основной задачи и смешанный метод Сьярле–Равьяра ее решения, а также обсуждаются основные предположения. Апостериорные оценки погрешности доказываются в п. 3, а их точность при несколько более сильных предположениях подтверждается оценками снизу в п. 4.

Для норм и полунорм в пространствах Соболева $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ используются стандартные обозначения $\|\cdot\|_k$, $|\cdot|_k$ или $\|\cdot\|_{k,\Omega}$, $|\cdot|_{k,\Omega}$ при соглашении, что $|\cdot|_0 = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$. При описании основной и смешанной формулировок задачи используются также пространства $H_0^2(\Omega) = \{\phi \in H^2(\Omega) : u(y) = \partial u / \partial \nu(y) = 0 \text{ для } y \in \partial\Omega\}$, $\dot{H}^1(\omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) : u(y) = 0 \text{ для } y \in \partial\Omega\}$ и $H_0^2(\Omega, \Delta^2) = \{\phi \in H_0^2(\Omega) : \Delta^2 \phi \in L_2(\Omega)\}$.

2. Слабые формулировки задач, некоторые предположения

Слабая формулировка задачи (1.1) имеет вид: найти такую функцию $u \in H_0^2(\Omega)$, что

$$a_\Delta(u, v) + (\sigma u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad (2.1)$$

где

$$a_\Delta(w, v) = (\Delta w, \Delta v), \quad (w, v) := (w, v)_\Omega = \int_\Omega wv \, dx.$$

Коэффициент реакции σ предполагается кусочно-постоянной функцией, т. е. $\sigma = \sigma_r = \kappa_r^2 = \text{const} \geq 0$ при $x \in \tau_r$ на комплексе конформных конечных элементов, определенных на подобластях τ_r , $r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}$, объединение замыканий которых покрывают достаточно гладкую область Ω :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^{\mathcal{R}} \bar{\tau}_r, \quad \tau_{r'} \cap \tau_{r''} = \emptyset \quad \text{при } r' \neq r''.$$

В смешанной формулировке задачи (1.1), предложенной Сьярле и Равьяром, нужно найти вектор $\mathbf{w} = (v, u)^\top \in H^1(\Omega) \times \dot{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющий системе из двух интегральных тождеств

$$\begin{aligned} (v, q) + \langle \nabla u, \nabla q \rangle &= 0, & \forall q \in H^1(\Omega), \\ -\langle \nabla v, \nabla g \rangle + (\sigma u, g) &= (f, g) & \forall g \in \dot{H}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.2)$$

в которой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение вектор-функций $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = (z_1, y_1) + (z_2, y_2)$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^\top$.

Предположим, область Ω есть полигон и $\mathcal{T}_h$ — ее триангуляция. Тогда для решения уравнений (2.2) можно использовать два конечно-элементных комплекса $\mathfrak{K}_{h,u}$ и $\mathfrak{K}_{h,v}$, определенных на $\mathcal{T}_h$, с C^0 -совместными треугольными лагранжевыми конечными элементами, имеющими прямые стороны. Они индуцируют, соответственно, пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_h(\Omega) &= \{\phi_h \in C(\Omega) : \phi_h|_{\tau_r} \in \mathcal{P}_{p_u}, \, p_u \geq 2, \, r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}\}, \\ \mathcal{V}_h(\Omega) &= \{\psi_h \in C(\Omega) : \psi_h|_{\tau_r} \in \mathcal{P}_{p_v}, \, p_v \geq 2, \, r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}\}. \end{aligned}$$

Эти пространства обладают, как известно, следующими аппроксимационными свойствами: для любой $w \in H^l(\Omega)$ и $\tilde{w} = G_{h,u}w \in \mathcal{U}_h(\Omega)$ справедливы оценки аппроксимации

$$|\tilde{w} - w|_{k,\tau_r} \leq c_{r,k,l} h^{l-k} |w|_{l,\tau_r}, \quad c_{r,k,l} = \text{const}, \quad (2.3)$$

где $G_{h,u} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbf{U}_h(\Omega)$ — линейный оператор интерполяции Лагранжа по значениям функции на множестве конечно-элементных узлов и $k \leq l$, $2 \leq l \leq p_u + 1$, $r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}$. Естественным считать, что $G_{h,u} w|_{\partial\Omega} = 0$, т.е. $G_{h,u} w \in \dot{\mathbf{U}}_h(\Omega) := \mathbf{U}_h(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega)$, если $w \in \dot{H}^l(\Omega) := \dot{H}^1(\Omega) \cap H^l(\Omega)$. Аналогичные оценки аппроксимации справедливы для $w \in H^l(\Omega)$, $\tilde{w} = G_{h,v} w \in \mathbf{V}_h(\Omega)$, $G_{h,v} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbf{V}_h(\Omega)$.

Решение $\mathbf{w}_h = (v_h, u_h)^\top \in \mathbf{V}_h(\Omega) \times \dot{\mathbf{U}}_h(\Omega)$ смешанного метода удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} (v_h, q_h) + \langle \nabla u_h, \nabla q_h \rangle &= 0 & \forall q_h \in \mathbf{V}_h(\Omega), \\ -\langle \nabla v_h, \nabla g_h \rangle + (\sigma u_h, g_h) &= (f, g_h) & \forall g_h \in \dot{\mathbf{U}}_h(\Omega), \end{aligned} \quad (2.4)$$

и, как следствие (2.2), (2.4), ошибка численного решения

$$\mathbf{e}_{\text{fem}} = (e_v, e_u)^\top, \quad \text{где } e_u = u_h - u, \quad e_v = v_h + \Delta u,$$

удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} (e_v, q_h) + \langle \nabla e_u, \nabla q_h \rangle &= 0 & \forall q_h \in \mathbf{V}_h(\Omega), \\ -\langle \nabla e_v, \nabla g_h \rangle + (\sigma e_u, g_h) &= 0 & \forall g_h \in \dot{\mathbf{U}}_h(\Omega). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем для краткости обозначение Δ_h для оператора, который сопоставляет достаточно гладкой функции v , заданной на Ω , функцию, равную $\Delta_h v = \Delta v$, $x \in \tau_r$, на каждом конечном элементе. Таким образом, $\|\Delta_h v\|^2 = \|\Delta_h v\|_\Omega^2 = \sum_r \|\Delta v\|_{\tau_r}^2$. В качестве меры ошибки будет использована норма

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \|e_v\|^2 + \|\Delta_h e_u\|^2 + 2\|\kappa e_u\|^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.6)$$

Апостериорные оценки ошибки данной работы опираются на операторы восстановления прогибов и лапласианов и их градиентов. Например, может быть использован сравнительно дешевый и точный оператор $\mathcal{G}_h : \mathbf{V}_h(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h(\Omega)$, который каждой $\phi_h \in \mathbf{V}_h(\Omega)$ сопоставляет L_2 -проекцию ψ_h на некоторое более гладкое конечно-элементное пространство $\mathcal{V}_h(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Имеется обширная литература по операторам восстановления градиентов и их влиянию на оценки ошибки, см. [12, 14] и цитируемую в этих работах литературу. Мы не обсуждаем подобные вопросы, поскольку эффекты суперсходимости не относятся к проблематике данной работы и выбор оператора восстановления, сохраняющего основные аппроксимационные свойства численного решения, является достаточным для получения точных по порядку оценок. Ввиду важности простоты и локальности предпочтение отдается квазиинтерполяционным операторам $\mathcal{D}_h : \dot{\mathbf{U}}_h(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$ и $\bar{\mathcal{D}}_h : \mathbf{V}_h(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_h(\Omega)$, получаемым посредством процедуры осреднения, используемой для вычисления узловых параметров функций конформных конечно-элементных пространств $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ и $\mathcal{V}_h(\Omega) \subset C^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ соответственно. Пусть $\mathbf{A}$ — любая глобальная степень свободы, служащая узловым параметром функции $\psi_h = \bar{\mathcal{D}}_h \phi_h$ и являющаяся значением в некотором узле $x^{(j)} \in \bar{\tau}_r$ или функции формы ψ_h , или ее производной из множества Ψ_j заданных в узле узловых параметров. По $\phi_h \in \mathbf{V}_h$ мы находим

$$\mathbf{A}(\bar{\mathcal{D}}_h \phi_h) = \frac{1}{|\omega_{\mathbf{A}}|} \sum_{\tau_r \in \omega_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}(\phi_h|_{\tau_r}),$$

где ω_A — множество треугольников триангуляции $\mathcal{T}_h$, которые имеют степень свободы A , и $|\omega_A|$ — число элементов этого множества. Найденные таким путем узловые параметры функции ψ_h однозначно определяют эту функцию.

Оператор $\mathcal{D}_h$ может быть частично отличным; в общем случае пространства $\mathcal{V}_h(\Omega)$ функций, восстановленных по u_h и v_h , также могут быть различными. Ради простоты, в частности, для уменьшения числа конечно-элементных пространств, вовлеченных в оценки погрешности, мы далее предполагаем, что $U_h(\Omega) = V_h(\Omega)$ и, соответственно, $\dot{U}_h(\Omega) = \dot{V}_h(\Omega) := V_h(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega)$. Кроме того, абстрагируясь от различий указанного типа, мы сформулируем свойство, которое должно оставаться выполненным и является важным для получения оценок снизу, доказываемых в п. 4.

Пусть $\mathcal{E}$ — сторона триангуляции $\mathcal{T}_h$, $h_e = |\mathcal{E}|$, и ν_e — нормаль к ней. Для определенности можно считать, что нормаль направлена направо при движении вдоль стороны от ее конца, являющегося узлом с меньшим номером по сравнению с номером узла на противоположном конце стороны. Для функции $\phi \in W_\infty^1(\Omega)$ символ $\left[\left[\frac{\partial \phi}{\partial \nu_e}\right]\right]$ обозначает скачок на стороне $\mathcal{E}$ производной от ϕ по нормали ν_e при пересечении стороны в направлении нормали. Мы вводим предположение:

$\alpha)$ для $\mathfrak{D}_h = \mathcal{D}_h, \bar{\mathcal{D}}_h$ выполняется

$$\|u_h - \mathfrak{D}_h u_h\|_T^2 \leq c_T h_T^4 \sum_{z \in \bar{T}} \sum_{\mathcal{E} \in E_z} \frac{1}{h_e} \int_{\mathcal{E}} \left[\left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e}\right]\right]^2 ds, \quad (2.7)$$

где $T = \tau_r$ — треугольник триангуляции, $h_T = \text{diam}[T]$, z — вершина треугольника T , E_z — множество сторон, имеющих z одним из концов, и c_T — постоянная, зависящая только от условий квазиоднородности формы треугольников триангуляции.

Даже для выпуклых полигональных областей при правой части из $L_2(\Omega)$ решение u может принадлежать только пространству $H^3(\Omega)$, см. Vacuta и др. [2]. Этот факт и стремление к простоте имели следствием применение для восстановления функций прогибов пространств $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, индуцированных конечно-элементными комплексами, узловые параметры которых содержали производные только первого порядка. Примером может служить пространство Сие–Клафа–Точера (НСТ), см. [5, Ch. 6, §1] и [8], определенного на триангуляции, общей с пространством $V_h(\Omega)$. Для оператора $\mathcal{D}_h$ и пространства НСТ в качестве $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$ справедливость (2.7) была доказана Brenner и др. [4]. Эта работа опирается на более раннюю работу Brenner и Sung [3], где были изучены оба типа операторов восстановления. При этом пространства $\mathcal{V}_h(\Omega)$, $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$ генерировались посредством C^1 TUBA конечных элементов, см. Argyris и др. [1], узловые параметры которых содержат вторые производные.

Пространство НСТ обеспечивает для гладких функций не более четвертого порядок аппроксимации в $L_2(\Omega)$, не достаточного для адекватных апостериорных оценок погрешности более точных МКЭ. Однако имеется другое семейство C^1 конечных элементов, представленное в монографии Зенкевича [13], которое допускает более высокие порядки точности без привлечения вторых и более высокого порядка производных в качестве узловых параметров. Криволинейная версия таких конечных элементов, позволяющих, в частности, точно учитывать криволинейные границы областей Ω , была предложена и изучена Корнеевым и Хусановым [18]. В простейшем варианте — это конечный элемент 3-го порядка с 13-ю узловыми параметрами. Когда стороны треугольника прямые, узловые параметры включают значения функций формы в вершинах и центре тяжести, по две производных в вершинах и производные по нормали в серединах сторон. Этот

конечный элемент является модификацией полного несовместного 3-го порядка элемента *Hermit Triangle*, см. [5, стр. 68], и получен из последнего добавлением трех узлов в серединах сторон с указанными узловыми параметрами. Координатными функциями модифицированного конечного элемента являются не полиномы, а дробно-рациональные функции, см. [13, Section 10.10] и [18].

Конечно-элементный комплекс с криволинейными элементами определяется посредством триангуляции $\mathcal{T}'_h$ с областью определения Ω_h , все узлы границы $\partial\Omega_h$ которой лежат на $\partial\Omega$. Треугольники этой триангуляции обозначаем через τ'_r . Если τ'_r имеет не более одной вершины на $\partial\Omega$, то $\tau_r := \tau'_r$ принимается за область определения конечного элемента. Если $\tau'_r \in \mathcal{T}'_h$ имеет две вершины на $\partial\Omega$, тогда одна сторона, соединяющая эти вершины, заменяется частью границы $\partial\Omega$ и определяет область τ_r конечного элемента в виде криволинейного треугольника. Очевидно, при таком определении

$$\sum_{r=1}^{\mathcal{R}_h} \bar{\tau}_r = \bar{\Omega}.$$

На криволинейных треугольниках Корнеев и Хусанов [18] построили C^1 -конформные конечные элементы, имеющие такую же по порядку точность, как соответствующие конечные элементы с прямолинейными сторонами. Конструкции C^0 пространств МКЭ $V_h(\Omega)$ с теми же самыми областями конечных элементов, точно учитывающие криволинейную границу $\partial\Omega$ области, можно найти в работах Корнеева [15–17].

Нужно отметить, что возможность использовать криволинейные конечные элементы, точно учитывающие криволинейные границы, важна по крайней мере по двум причинам. Если граница $\partial\Omega$ гладкая и σ ограничена, то задача является H^2 -регулярной, см. Бакута и др. [2]. Однако для полигональной аппроксимации границы $\partial\Omega$ это свойство может быть, вообще говоря, утрачено. Кроме того, даже при сохранении H^2 -регулярности перемещение первого краевого условия с $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_h$ понижает порядок точности МКЭ по сравнению со случаем точной аппроксимации границы.

3. Оценки ошибки смешанного метода Сьярле-Равьяра

Пусть $\tilde{u} \in \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$ — некоторая аппроксимация функции u , восстановленная по u_h , и $\tilde{e} = \tilde{u} - u$. Добавляя и вычитая $\tilde{u}$ в $\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\|$ и воспользовавшись неравенством треугольника, получим

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left\{ \|v_h - \Delta\tilde{u}\|^2 + \|\kappa(u_h - \tilde{u})\|^2 \right\}^{1/2} + \|u_h - \tilde{u}\| + 2\|\tilde{e}\| \right\}. \quad (3.1)$$

В соответствии с принципом двойственности

$$\|\tilde{e}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|\Delta(\tilde{u} - u)\|^2 + \|\kappa(\tilde{u} - u)\|^2 \right)^{1/2} = \sup_{\phi \in H_0^2(\Omega) \setminus 0} \frac{a_\Delta(\tilde{e}, \phi) + (\sigma\tilde{e}, \phi)}{\|\phi\|}, \quad (3.2)$$

и числитель дроби можно преобразовать как

$$a_\Delta(\tilde{e}, \phi) + (\sigma\tilde{e}, \phi) = (\Delta\tilde{u} - v_h, \Delta\phi) + (\sigma(\tilde{u} - u_h), \phi) + (v_h - \Delta u, \Delta\phi) + (\sigma(u_h - u), \phi). \quad (3.3)$$

Если проинтегрировать по частям и принять во внимание (2.1) и (2.4), можно написать

$$\begin{aligned}
& (v_h - \Delta u, \Delta \phi) + (\sigma(u_h - u), \phi) \\
&= (v_h, \Delta \phi) - a_\Delta(u, \phi) + (\sigma(u_h - u), \phi) \\
&= -(\nabla v_h, \nabla \phi) - (f, \phi) + (\sigma u_h, \phi) \\
&= -(\nabla v_h, \nabla(\phi - \phi^h)) - (f, (\phi - \phi_h)) + (\sigma u_h, (\phi - \phi_h)) \quad \forall \phi_h \in \mathring{U}_h(\Omega). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Имеются по крайней мере две опции для оценки первого слагаемого в правой части. В одной мы вводим вектор $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top$, компоненты $\mu_k \in V_h$ которого аппроксимируют производные $\partial v_h / \partial x_k$. В другой для аппроксимации указанных производных применяется вектор $\nabla \tilde{v}$, где функция $\tilde{v} \in \mathcal{V}_h(\Omega)$ аппроксимирует v_h . Обращаясь к первой опции, определим μ_k как L_2 -проекции производных $\partial v_h / \partial x_k$ на пространство $V_h(\Omega)$. Функция ϕ_h в (3.4) может быть определена как L_2 -проекция ϕ на пространство $\mathring{U}_h(\Omega)$ или как интерполяция Лагранжа функции ϕ в пространстве $\mathring{U}_h(\Omega)$. Теперь, принимая во внимание (3.4) и оценки аппроксимации (2.3) в форме

$$|\phi - \phi_h|_k \leq c_{k,2} h^{2-k} |\phi|_2, \quad k = 0, 1, \quad (3.5)$$

получаем

$$\begin{aligned}
& |(v_h - \Delta u, \Delta \phi) + (\sigma(u_h - u), \phi)| = \left| -(\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}, \nabla(\phi - \phi^h)) - (\boldsymbol{\mu}, \nabla(\phi - \phi^h)) - \right. \\
& \quad \left. (f, (\phi - \phi_h)) + (\sigma u_h, (\phi - \phi_h)) \right| \\
& \leq \left[c_{1,2} h \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\| + c_{0,2} h^2 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\| \right] |\phi|_2. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Так как $|\phi|_2 \leq \|\phi\|$, из (3.1), (3.2) и (3.6) следует

$$\begin{aligned}
\|\tilde{e}\| & \leq \left\{ \|\Delta \tilde{u} - v_h\|^2 + \|\kappa(\tilde{u} - u_h)\|^2 \right\}^{1/2} + \\
& \quad \left[c_{1,2} h \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\| + c_{0,2} h^2 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\| \right] \frac{|\phi|_2}{\|\phi\|} \\
& \lesssim \left\{ \|\Delta \tilde{u} - v_h\|^2 + \|\kappa(\tilde{u} - u_h)\|^2 \right\}^{1/2} + c_{1,2} h \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\| + c_{0,2} h^2 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\|
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| & \prec \left\{ \|v_h - \Delta \tilde{u}\|^2 + \|\kappa(u_h - \tilde{u})\|^2 \right\}^{1/2} + \|u_h - \tilde{u}\| + \\
& \quad c_{1,2} h \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\| + c_{0,2} h^2 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\|, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

где “ $\prec$ ” обозначает неравенство с опущенной абсолютной постоянной.

Если ввести обозначение $\tilde{\mathbf{e}}_h = (\tilde{e}_v, \tilde{e}_u) = (v_h - \Delta \tilde{u}, u_h - \tilde{u})^\top$, то оценка записывается в более краткой форме:

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| \prec \|\tilde{\mathbf{e}}_h\| + c_{1,2} h \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\| + c_{0,2} h^2 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\|. \quad (3.8)$$

Постоянные $c_{k,l} = \max_r(c_{r,k,l})$ (являющиеся глобальными) и $h = \max_r h_r$, где h_r — размер треугольника τ_r , завышают оценку ошибки. Немного усложняя доказательство, приходим к оценке с локальными постоянными.

Теорема 1. Пусть решение u краевой задачи (1.1) принадлежит пространству $H_0^2(\Omega, \Delta^2)$. Пусть также $\tilde{u}$ и компоненты μ_k вектор-функции $\boldsymbol{\mu}$ — любые функции из пространств $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$ и $V_h(\Omega)$ соответственно. Тогда

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| \prec \|\tilde{\mathbf{e}}_h\| + \left(\sum_r c_{1,2,r}^2 h_r^2 \|\nabla v_h - \boldsymbol{\mu}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_r c_{0,2,r}^2 h_r^4 \|f - \sigma u_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Как было замечено, вместо $\boldsymbol{\mu}$ можно использовать $\nabla \tilde{v}$ для некоторой аппроксимации $\tilde{v} \in \mathcal{V}_h(\Omega)$ функции v_h , в частности $\tilde{v} = \overline{\mathcal{D}}_h v_h$. В этом случае, применяя стандартное обратное неравенство к норме $\|\nabla(v_h - \tilde{v})\|_{\tau_r}$, приведем оценку к виду

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| \prec \|\tilde{\mathbf{e}}_h\| + \left(\sum_r c_{1,0,r}^2 c_{1,2,r}^2 \|v_h - \tilde{v}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_r c_{0,2,r}^2 h_r^4 \|f - \sigma u_h - \Delta \tilde{v}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Подчеркнем, что оценки (3.9), (3.10) не подразумевают квазиоднородности сетки и сохраняются, например, для произвольной сетки, удовлетворяющей условиям регулярности формы. Это важно при применении апостериорных оценок погрешности при создании адаптивных алгоритмов.

Введем также норму $\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{\text{fem}}\|^2 &= \|\mathbf{e}_{\text{fem}}\|^2 + \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \frac{1}{h_e} \int_{\mathcal{E}} \left[\left[\frac{\partial e_u}{\partial \nu_e} \right] \right]^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \|e_v\|^2 + \|\Delta_h e_u\|^2 + 2\|\kappa e_u\|^2 \right\} + \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \frac{1}{h_e} \int_{\mathcal{E}} \left[\left[\frac{\partial e_u}{\partial \nu_e} \right] \right]^2 ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

которая является адаптацией нормы, использованной Gudi [8], к случаю σ не равного тождественно нулю. Нетрудно увидеть, что одновременно с (3.10) выполняется оценка

$$\|\mathbf{e}_{\text{fem}}\| \prec \eta(u_h, v_h, \tilde{u}, \tilde{v}), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \eta(u_h, v_h, \tilde{u}, \tilde{v}) &= \left(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|^2 + \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \frac{1}{h_e} \int_{\mathcal{E}} \left[\left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e} \right] \right]^2 ds \right)^{1/2} + \left(\sum_r c_{1,0,r}^2 c_{1,2,r}^2 \|v_h - \tilde{v}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2} + \\ &\quad \left(\sum_r c_{0,2,r}^2 h_r^4 \|f - \sigma u_h - \Delta \tilde{v}\|_{\tau_r}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

4. Эффективность апостериорных оценок

Теперь перейдем к доказательству оценок снизу, обычно называемых в литературе оценками эффективности. Для простоты ограничимся случаем квазиоднородных сеток и дополнительно предположим, что для соответствующего пространства $\mathcal{V}_h(\Omega)$ выполняется свойство α . Неравенство (2.7) непосредственно приводит к оценке младших членов:

$$\|\kappa(u_h - \tilde{u})\|^2 \leq c (\max_{x \in \Omega} \sigma) h^4 \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{h_e} \left[\left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e} \right] \right]^2 ds, \quad (4.1)$$

где Γ_e — межэлементная граница, включающая стороны и вершины, лежащие в Ω . Если принять во внимание неравенство

$$\|\Delta_h(u_h - \tilde{u})\|^2 \leq c \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{h_e} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|^2 ds, \quad (4.2)$$

вытекающее из (4.1) и обратного неравенства для полиномиальных функций, а также неравенство треугольника

$$\|v_h - \Delta \tilde{u}\| \leq \|v_h - \Delta u\| + \|\Delta_h(u - u_h)\| + \|\Delta_h(u_h - \tilde{u})\|,$$

то получим, что

$$\begin{aligned} 2\|\tilde{e}_h\|^2 &= \|\tilde{e}_v\|^2 + \|\Delta_h \tilde{e}_u\|^2 + 2\|\kappa \tilde{e}_u\|^2 \\ &\lesssim \|v_h - \Delta u\|^2 + \|\Delta_h(u - u_h)\|^2 + \|\Delta_h(u_h - \tilde{u})\|^2 + 2\|\kappa(u_h - \tilde{u})\|^2 \\ &\lesssim \|v_h - \Delta u\|^2 + \|\Delta_h(u - u_h)\|^2 + (1 + c \max_{x \in \Omega} \sigma h^4) \sum_{\mathcal{E} \in \Gamma_e} \frac{1}{h_e} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом $a \lesssim b$ означает неравенство $a \leq cb$ с опущенной постоянной c , зависящей от условий квазиравномерности триангуляции.

Обращаясь к слагаемому типа невязки в (3.9), (3.12), можно написать

$$\|f - \sigma u_h - \Delta \tilde{v}\|_T \leq \|\kappa(u - u_h)\|_T + \|\Delta_h(v_h - \tilde{v})\|_T + \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T + \|f_{\Delta\Delta} - \bar{f}_{\Delta\Delta}\|_T, \quad (4.4)$$

где $T = \tau_r$ — любой треугольник триангуляции, $f_{\Delta\Delta} = f - \sigma u = \Delta^2 u$ и $\bar{f}$ — L_2 -проекция f на пространство поэлементно полиномиальных функций порядка p , определяемых соотношением

$$\int_T \bar{f} \phi \, dx = \int_T f \phi \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_p \text{ и } \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Слагаемое $\|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T$ оценивается с помощью известной техники пузырьковых функций при незначительных отличиях, например от [8, лемма 3.2], связанных с присутствием младшего члена в дифференциальном операторе краевой задачи. Пусть $\beta_T \in H_0^2(T)$ — пузырьковая функция на треугольнике T и $\phi = \beta_T(\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h)$. Благодаря неравенствам

$$\|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T \lesssim \left\| \beta_T^{1/2} (\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h) \right\|_T, \quad \|\beta_T (\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h)\|_T \lesssim \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T, \quad (4.5)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T^2 &\lesssim \int_T \beta_T (\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h)^2 \, dx = \int_T (\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h) \phi \, dx \\ &= \int_T (\bar{f}_{\Delta\Delta} - f_{\Delta\Delta}) \phi \, dx + \int_T (f_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h) \phi \, dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Оценку

$$\begin{aligned} \int_T (f_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h) \phi \, dx &= \int_T (\Delta u - v_h) \Delta \phi \, dx \leq c_{2,0} h_T^{-2} \|\Delta u - v_h\|_T \|\phi\|_T \\ &\lesssim h_T^{-2} \|\Delta u - v_h\|_T \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T \end{aligned} \quad (4.7)$$

получаем теперь в результате интегрирования по частям, применения обратного неравенства и (4.5).

В то же время, согласно (4.5),

$$\int_T (\bar{f}_{\Delta\Delta} - f_{\Delta\Delta}) \phi \, dx \lesssim \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - f_{\Delta\Delta}\|_T \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T, \quad (4.8)$$

и первый множитель в правой части (4.8) оценивается как

$$\|\bar{f}_{\Delta\Delta} - f_{\Delta\Delta}\|_T = \|\bar{f} - f\|_T + \|\kappa_T(\bar{u} - u)\|_T \leq \|\bar{f} - f\|_T + \|\kappa_T(\tilde{u} - u)\|_T. \quad (4.9)$$

Комбинируя (4.6)–(4.9), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_{\Delta\Delta} - \Delta_h v_h\|_T &\lesssim \|\bar{f} - f\|_T + \|\kappa_T(\tilde{u} - u)\|_T + h_T^{-2} \|\Delta u - v_h\|_T \\ &\lesssim \|\bar{f} - f\|_T + \|\kappa(u - u_h)\|_T + h_T^{-2} \|\Delta u - v_h\|_T + \\ &\quad (h^2 \kappa_T) \left(\sum_{z \in \bar{\delta}_T} \sum_{\mathcal{E} \in E_z} \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{h_e} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теперь осталось оценить вторую норму в (4.4). Для этой цели оценим сначала $\|v_h - \tilde{v}\|_T$ и потом воспользуемся неравенством

$$\|\Delta(v_h - \tilde{v})\|_T \lesssim h_T^{-2} \|v_h - \tilde{v}\|_T. \quad (4.11)$$

При выполнении этого можно считать, что $\tilde{v} = \bar{D}_h v_h$ или $\tilde{v}$ определена как L_2 -проекция функции v_h на пространство $\mathcal{V}_h(\Omega)$.

Пусть $\bar{\delta}_e$ является объединением замыканий двух треугольников с общей стороной $\mathcal{E}$, $\phi = \psi_1 \psi_2$, где функция $\psi_1 = \left\| \left[\frac{\partial v_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|$ на $\mathcal{E}$ и постоянна вдоль линий, ортогональных $\mathcal{E}$, а функция $\psi_2 \in H_0^2(\delta_e) \cap C^1(\delta_e)$ является поэлементно полиномиальной, причем $\psi_2 \geq 0$ на $\mathcal{E}$. Очевидное неравенство

$$\int_{\delta_e} \psi_1^2 dx \lesssim h_e \mathfrak{I}_e(v^h), \quad \text{где} \quad \mathfrak{I}_e(v^h) = \int_{\mathcal{E}} \left\| \left[\frac{\partial v_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|^2 ds, \quad (4.12)$$

оценка аппроксимации (2.3) и обратное неравенство позволяют написать

$$\begin{aligned} \int_e \left\| \left[\frac{\partial v_h}{\partial \nu_e} \right] \right\| \phi \, ds &= \int_{\delta_e} \Delta_h v_h \phi \, dx + \int_{\delta_e} \nabla v_h \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\delta_e} \Delta_h v_h \phi \, dx - \int_{\delta_e} v_h \Delta \phi \, dx \\ &= \int_{\delta_e} (\Delta_h v_h - f_{\Delta\Delta}) \phi \, dx + \int_{\delta_e} (\Delta u - v_h) \Delta \phi \, dx \\ &\lesssim \left[h_e^2 \|\Delta_h v_h - f_{\Delta\Delta}\|_{\delta_e} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_e} \right] h_e^{-2} \|\phi\| \\ &\lesssim \left[h_e^2 \|\Delta_h v_h - f_{\Delta\Delta}\|_{\delta_e} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_e} \right] h_e^{-2} (h_e \mathfrak{I}_e(v^h))^{1/2} \\ &\lesssim \left[h_e^2 \|\Delta_h v_h - f_{\Delta\Delta}\|_{\delta_e} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_e} \right] h_e^{-3} (h_e^3 \mathfrak{I}_e(v^h))^{1/2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

и далее прийти к выводу, что

$$\left(\int_{\mathcal{E}} h_e^3 \left\| \left[\frac{\partial v_h}{\partial \nu_e} \right] \right\|^2 ds \right)^{1/2} \lesssim h_e^2 \|\Delta_h v_h - f_{\Delta\Delta}\|_{\delta_e} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_e}.$$

Следовательно, приняв во внимание (2.7), в результате имеем

$$\begin{aligned} \|v_h - \bar{\mathcal{D}}_h v_h\|_T &\lesssim \left(h_T^3 \sum_{z \in \bar{T}} \sum_{\mathcal{E} \in E_z} \mathfrak{S}_e(v^h) \right)^{1/2} \\ &\lesssim h_e^2 \|\Delta_h v_h - \bar{f}_{\Delta\Delta}\|_{\delta_T} + h_e^2 \|f - \bar{f}_{\Delta\Delta}\|_{\delta_T} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_T}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\bar{\delta}_T$ — множество треугольников, имеющих вершины, общие с вершинами треугольника T . Норма $\|\Delta_h v_h - \bar{f}_{\Delta\Delta}\|_{\delta_T}$ оценена в (4.10), и на следующем шаге мы дополнительно используем (4.1):

$$\begin{aligned} \|v_h - \bar{\mathcal{D}}_h v_h\|_T &\lesssim h_T^2 \|\bar{f} - f\|_{\delta_T} + h_T^2 \|\kappa(\tilde{u} - u)\|_{\delta_T} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_T} \\ &\lesssim h_T^2 \|\bar{f} - f\|_{\delta_T} + h_T^2 \|\kappa(u_h - u)\|_{\delta_T} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_T} + \\ &\quad \left(\max_{T \subset \delta_T} (h_T^2 \kappa_T) \right) \left(\sum_{z \in \bar{\delta}_T} \sum_{\mathcal{E} \in E_z} \frac{1}{h_e} \mathfrak{S}_e(u^h) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Поскольку в соответствии с (4.11) мы имеем

$$h_T^2 \|\Delta_h(v_h - \tilde{v})\|_T \lesssim \|v_h - \tilde{v}\|_T,$$

и правая часть оценивается выражением (4.15), то, комбинируя получаемую оценку с (4.4), (4.9), (4.10) и (4.15), приходим к оценке слагаемого типа невязки:

$$\begin{aligned} h^2 \|f - \sigma u_h - \Delta \tilde{v}\|_T &\lesssim h_T^2 \|\bar{f} - f\|_{\delta_T} + h_T^2 \|\kappa(u_h - u)\|_{\delta_T} + \|\Delta u - v_h\|_{\delta_T} + \\ &\quad \left(\max_{T \subset \delta_T} (h_T^2 \kappa_T) \right) \left(\sum_{z \in \bar{\delta}_T} \sum_{\mathcal{E} \in E_z} \frac{1}{h_e} \mathfrak{S}_e(u^h) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

“Сумма” по “Сумма” по $\mathcal{E} \in \Gamma_e$ в оценке ошибки η , см. (3.12), присутствует также в норме ошибки МКЭ (3.11), остальные три нормы, входящие в η , оценены в (4.3), справедливом в виду (2.7) также и в локальном варианте, в (4.15) и (4.11). В итоге нами доказана оценка ошибки снизу, называемая в литературе оценкой локальной эффективности апостериорной оценки и приводимая в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $u \in H_0^2(\Omega, \Delta^2)$ — решение краевой задачи (2.1), $\mathbf{w}_h = (v_h, u_h)$ — решение смешанного метода конечных элементов (2.4), и пусть $\tilde{u} = \mathcal{D}_h u_h$, $\tilde{v} = \bar{\mathcal{D}}_h v_h$. Пусть, кроме того, триангуляция квазиоднородна, $\max_{T \subset \mathcal{T}_h} (h_T^2 \kappa_T) \leq c = \text{const}$ и выполняется условие α . Тогда

$$\eta_T(u_h, v_h, \tilde{u}, \tilde{v}) \lesssim \|\mathbf{e}_{\text{fem}}\|_{\delta_T} + h^2 \|f - \bar{f}\|_{\delta_T}.$$

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению текста.

Литература

1. **Argyris J.H., Fried I., and Scharpf D.W.** The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method // J. Royal Aeronautical Society. — 1968. — Vol. 72, № 692. — P. 701–709.

2. **Bacuta C., Bramble J.H., and Pasciak J.E.** Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem // Recent Progress in Computational and Applied PDES. Proc. Intern. Conf. Held in Zhangjiajie in July 2001 / T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang, J. Xu, L.-A. Ying. — Boston, MA.: Springer, 2002.
3. **Brenner S.C., Sung L.-Y.** C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains // J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 22/23. — P. 83–118.
4. **Brenner S.C., Gudi T.S., and Sung L.-Y.** An a posteriori error estimator for a quadratic interior penalty method for the biharmonic problem // IMA J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 30. — P. 777–798.
5. **Ciarlet P.** The finite element method for elliptic problems. — Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
6. **Charbonneau A., Dossou K., and Pierre R.** A residual-based a posteriori error estimator for the Ciarlet–Raviart formulation of the first biharmonic problem // Numer. Methods Partial Different. Eq. — 1997. — Vol. 13, iss 1. — P. 93–111.
7. **Du S., Lin R., Zhang Zh.** Residual-based a posteriori error estimators for mixed finite element methods for fourth order elliptic singularly perturbed problems // J. Comp. and Appl. Math. — 2022. — Vol. 412. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114323>.
8. **Gudi T.** Residual-based a posteriori error estimator for the mixed finite element approximation of biharmonic equation // Numer. Methods Partial Different. Eq. — 2011. — Vol. 27. — P. 315–328.
9. **Korneev V.G.** A note on a posteriori error bounds for numerical solutions of elliptic equations with piece wise constant reaction coefficient having large jumps // Comput. Math. and Math. Physics. — 2020. — Vol. 60, № 11. — P. 1754–1760.
10. **Korneev V.** A posteriori error bounds for classical and mixed FEM's for 4th-order elliptic equations with piece wise constant reaction coefficient having large jumps // J. Physics: Conf. Series. — 2021. — Vol. 1715. — ID № 012030.
11. **Verfürth R.A.** Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods. — Oxford: University Press, 2013.
12. **Xu J., Zhang Zh.** Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids // Math. Comp. — 2004. — Vol. 73. — P. 1139–1152.
13. **Zienkiewicz O.C.** The Finite Element Method in Engineering Science. — London: McGraw-Hill, 1971.
14. **Zienkiewicz O.C., and Zhu J.Z.** The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique // Intern. J. Numer. Methods Engineering. — 1992. — Vol. 33. — P. 1331–1364.
15. **Корнеев В.Г.** О построении вариационно-разностных схем высокого порядка точности // Вестник Ленинградского Университета. — 1970. — Т. 25, № 19. — С. 28–40.
16. **Корнеев В.Г.** Итерационные методы решения систем алгебраических уравнений метода конечных элементов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1977. — Т. 17, № 5. — С. 1213–1233. Перевод: Korneev V.G. Iterative methods of solving systems of equations of the finite element method // Comput. Math. Math. Phys. — 1977. — Vol. 17, № 5. — P. 109–129. — [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(77)90014-3).
17. **Корнеев В.Г.** Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1977.
18. **Корнеев В.Г., Хусанов К.А.** Криволинейные конечные элементы класса C^1 с сингулярными координатными функциями // Дифф. уравнения. — 1986. — Vol. 22, № 12. — С. 2144–2157.

Поступила в редакцию 10 октября 2022 г.

После исправления 09 ноября 2022 г.

Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Argyris J.H., Fried I., and Scharpf D.W.** The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method // J. Royal Aeronautical Society. — 1968. — Vol. 72, № 692. — P. 701–709.
2. **Bacuta C., Bramble J.H., and Pasciak J.E.** Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem // Recent Progress in Computational and Applied PDES. Proc. Intern. Conf. Held in Zhangjiajie in July 2001 / T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang, J. Xu, L.-A. Ying. — Boston, MA.: Springer, 2002.
3. **Brenner S.C., Sung L.-Y.** C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains // J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 22/23. — P. 83–118.
4. **Brenner S.C., Gudi T.S., and Sung L.-Y.** An a posteriori error estimator for a quadratic interior penalty method for the biharmonic problem // IMA J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 30. — P. 777–798.
5. **Ciarlet P.** The finite element method for elliptic problems. — Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
6. **Charbonneau A., Dossou K., and Pierre R.** A residual-based a posteriori error estimator for the Ciarlet–Raviart formulation of the first biharmonic problem // Numer. Methods Partial Different. Eq. — 1997. — Vol. 13, iss 1. — P. 93–111.
7. **Du S., Lin R., Zhang Zh.** Residual-based a posteriori error estimators for mixed finite element methods for fourth order elliptic singularly perturbed problems // J. Comp. and Appl. Math. — 2022. — Vol. 412. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114323>.
8. **Gudi T.** Residual-based a posteriori error estimator for the mixed finite element approximation of biharmonic equation // Numer. Methods Partial Different. Eq. — 2011. — Vol. 27. — P. 315–328.
9. **Korneev V.G.** A note on a posteriori error bounds for numerical solutions of elliptic equations with piece wise constant reaction coefficient having large jumps // Comput. Math. and Math. Physics. — 2020. — Vol. 60, № 11. — P. 1754–1760.
10. **Korneev V.** A posteriori error bounds for classical and mixed FEM's for 4th-order elliptic equations with piece wise constant reaction coefficient having large jumps // J. Physics: Conf. Series. — 2021. — Vol. 1715. — ID № 012030.
11. **Verfürth R.A.** Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods. — Oxford: University Press, 2013.
12. **Xu J., Zhang Zh.** Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids // Math. Comp. — 2004. — Vol. 73. — P. 1139–1152.
13. **Zienkiewicz O.C.** The Finite Element Method in Engineering Science. — London: McGraw-Hill, 1971.
14. **Zienkiewicz O.C., and Zhu J.Z.** The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique // Intern. J. Numer. Methods Engineering. — 1992. — Vol. 33. — P. 1331–1364.
15. **Korneev V.G.** O postroenii variacionno-raznostnykh skhem vysokogo poryadka tochnosti // Vestnik Leningradskogo Universiteta. — 1970. — T. 25, № 19. — S. 28–40.
16. **Korneev V.G.** Iteracionnye metody resheniya sistem algebraicheskikh uravnenii metoda konechnykh elementov // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1977. — T. 17, № 5. — S. 1213–1233. Perevod: Korneev V.G. Iterative methods of solving systems of equations of the finite element method // Comput. Math. Math. Phys. — 1977. — Vol. 17, № 5. — P. 109–129. — [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(77)90014-3).
17. **Korneev V.G.** Skhemy metoda konechnykh elementov vysokikh poryadkov tochnosti. — L.: Izd-vo Leningradskogo gos. un-ta, 1977.
18. **Korneev V.G., Khusanov K.A.** Krivolineinye konechnye elementy klassa C^1 s singulyarnymi koordinatnymi funkciyami // Diff. uravneniya. — 1986. — Vol. 22, № 12. — S. 2144–2157.

