ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ТЕЛА МИЗЕСА

О. Д. Григорьев

(*Новосибирск*)

Приводятся интегралы уравнений равновесия при плоском напряженном состоянии тела Мизеса. Показывается, что условие текучести Мизеса накладывает здесь весьма существенные ограничения на геометрию траекторий главных напряжений. Рассматриваются также простейшие напряженные состояния.

Уравнения для напряжений плоского напряженного состояния тела Мизеса [1] в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2 будут иметь вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\sigma_{11})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{12})+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{12}-\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{22}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{22})+\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\sigma_{12})+\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{12}-\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{11}=0 \qquad (2)$$

$$\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2=\sigma_s^2 \qquad (3)$$

Здесь σ_{ij} — физические компоненты тензора напряжений, H_i — геометрические параметры Ламе, связанные уравнением

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)=0 \qquad (4)$$

Возьмем в качестве координат сетку траекторий главных напряжений и введем функцию ω посредством известных соотношений для главных напряжений

$$\sigma_1=2k\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right),\qquad \sigma_2=2k\cos\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right),\qquad 3k^2=\sigma_s^2 \qquad (5)$$

В результате уравнения равновесия примут следующую интегрируемую форму:

$$\left(\operatorname{ctg}\omega\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\partial\omega}{\partial q_1}+\frac{\partial\ln H_2}{\partial q_1}=0 \qquad (6)$$

$$\left(\operatorname{ctg}\omega\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\partial\omega}{\partial q_2}+\frac{\partial\ln H_1}{\partial q_2}=0 \qquad (7)$$

Отсюда найдем следующие интегралы вдоль траекторий главных напряжений:

$$\ln\sin\omega\sin\frac{\pi}{6}-\omega\cos\frac{\pi}{6}+\ln H_2=\eta(q_2) \qquad (8)$$

$$\ln\sin\omega\sin\frac{\pi}{6}+\omega\cos\frac{\pi}{6}+\ln H_1=\gamma(q_1) \qquad (9)$$

где $\eta(q_2)$ и $\gamma(q_1)$ — некоторые функции своих аргументов; они не могут быть произвольными хотя бы из-за соотношения (4).

Исключая из интегралов (8), (9) функцию ω, легко получим ограничение, которое накладывает па геометрию траекторий главных напряжений условие текучести Мизеса

$$\ln\left\{H_1H_2\sin\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\gamma(q_1)-\eta(q_2)-\ln\frac{H_1}{H_2}\right]\right\}=\eta(q_2)+\gamma(q_1) \qquad (10)$$

По сравнению с ограничением, накладываемым условием текучести Мизеса при плоской деформации [3], т. е.

$$\ln H_1H_2=\eta(q_2)-\gamma(q_1) \qquad (11)$$

ограничение (10) будет весьма существенным.

Рассмотрим теперь простейшие напряженные состояния.

1. Случай постоянного напряженного состояния, когда $\omega=\mathrm{const}$.

Здесь из (6), (7) легко следует, что сетка траекторий главных напряжений состоит только из прямых.

2. Случай, когда $\omega=\omega(q_1)$ или $\omega=\omega(q_2)$. В этом случае можно легко показать, что сетка траекторий состоит из концентрических окружностей и радиальных прямых.

В самом деле, пусть $\omega = \omega(q_1)$, тогда согласно (6), (7) будем иметь

$$H_1 = H_1(q_1), \qquad H_2 = Q_1(q_1)\, Q_2(q_2) \tag{12}$$

Отсюда для радиуса кривизны R_2 траекторий q_1=const имеем

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = \frac{1}{R_2(q_1)} = \mathrm{const} \tag{13}$$

т. е. траектории будут концентрическими окружностями.

Заметим в заключение, что уравнения равновесия могут быть проинтегрированы и при любом другом условии текучести $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$.

Поступила 20 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Новожилов* В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев

(*Новосибирск*)

В работе [1] было показано, что учет конечности ларморовского радиуса приводит к стабилизации неоднородной плазмы относительно желобковых неустойчивостей. Так как перенос импульса связан с закручиванием частиц в магнитном поле, то учет конечности ларморовского радиуса может быть проделан для состояний плазмы, описываемых гидродинамическими уравнениями, путем введения тензора специфической магнитной «вязкости». На возможность использовать такие соображения авторам указал Л. И. Рудаков; эти же соображения были использованы в работе [2], где результат Розенблюта и других авторов был получен значительно проще из гидродинамических уравнений. Ниже показывается, что даже в однородной плазме учет магнитной вязкости приводит к стабилизации плазмы с анизотропным давлением.

Рассмотрим «бесстолкновительную» плазму в сильном магнитном поле H ($\omega_H \tau \gg 1$, ω_H — ларморовская частота ионов, τ — время столкновений). Как известно, такая плазма описывается системой уравнений [3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0, \qquad \rho\frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{H}), \qquad \frac{d}{dt}\frac{P_\parallel H^2}{\rho^3} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho H} = 0$$

Здесь $P_\parallel$ — давление вдоль магнитного поля, $P_\perp$ — давление поперек магнитдого поля, $\boldsymbol{n}$ — орт вдоль магнитного поля, π_{ik}—тензор магнитной вязкости, P_{ik} — тензор давлений, равный

$$P_{ik} = P_\perp \delta_{ik} + (P_\parallel - P_\perp)\, n_i n_k \tag{2}$$

Тензор вязкости при условии $\omega_H \tau \gg 1$ имеет вид

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} = -\frac{1}{2\omega_H} w_{xy}, \quad \pi_{zz} = 0, \quad \pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{1}{4\omega_H}(w_{xx} - w_{yy}) \tag{3}$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = -\frac{1}{\omega_H} w_{yz}, \qquad \pi_{yz} = \pi_{zy} = \frac{1}{\omega_H} w_{yx}$$

где

$$w_{ik} = P_\perp\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right) +$$

$$+ (P_\parallel - P_\perp)\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_l} n_k n_l + \frac{\partial V_k}{\partial x_l} n_i n_l - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_m} n_l n_m\right) \tag{4}$$