

УДК 539

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКА И ПРЕГРАДЫ

Ю. М. Волчков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложены численные схемы определения интегральных характеристик проникания ударника в преграду, в которых применяется алгоритм решения двумерных динамических задач упругопластического деформирования, а для построения решения используется одномерный столбец конечных элементов (двумерная область заменяется одномерной).

Введение. Взаимодействие ударника и преграды сопровождается сложными физическими процессами. Точная математическая постановка задачи, достаточно полно учитывающая физико-механические свойства материалов ударника и преграды (в том числе их зависимость от температуры и скорости деформирования), физику явлений, сопровождающих проникание ударника в преграду (например, фазовые переходы в материале, происходящие вследствие сильного нагрева), приводит к сложной нелинейной системе дифференциальных уравнений, решение которой возможно только на быстродействующих ЭВМ с большим объемом оперативной памяти. Задача о высокоскоростном взаимодействии ударника и преграды относится к классу контактных задач динамического деформирования неупругих тел. В настоящее время разработаны достаточно эффективные алгоритмы численного решения таких задач (см., например, [1–7]). Однако оценить погрешности, которые неизбежно возникают при численном решении, во многих случаях затруднительно. При решении задачи в лагранжевых переменных требуется многократная перестройка сетки в областях сильного искажения ячеек и экстраполяция решения с прежней сетки на новую, что ведет к потере точности. При решении в эйлеровых переменных погрешности появляются, в частности, при расчете быстроменяющихся контактных и свободных поверхностей и осреднении величин при перетекании вещества из одной ячейки в другую. При формулировке и решении задач о деформировании материалов при интенсивных теплосиловых воздействиях следует учитывать, что экспериментальные данные о физико-механических свойствах материалов, работающих в экстремальных условиях, как правило, неполны. Константы материала, характеризующие его прочностные свойства, и уравнения состояния определяются с погрешностью, которая может достигать десятков процентов. Поэтому представляет практический интерес построение последовательности математических моделей, сложность которых возрастает с расширением возможностей описания качественных и количественных характеристик процесса соударения.

Наиболее полно одномерные и двумерные модели высокоскоростного соударения представлены в [8].

Одной из первых одномерных моделей высокоскоростного соударения является гидродинамическая модель М. А. Лаврентьева для оценки глубины проникания цилиндрического стержня в полубесконечную преграду [9]. Согласно этой модели $(l/l_0)/(\rho_n/\rho_c)^{-1/2} = \text{const}$, где l_0 — исходная длина стержня; l — глубина проникания; ρ_n , ρ_c — плотность материалов преграды и стержня соответственно.

Существуют различные модификации гидродинамической модели, целью которых является приближенный учет влияния прочностных свойств материалов ударника и преграды [8]. Например, в модели, построенной в предположении, что разрушение преграды происходит в виде выбивания “пробки”, из всех факторов, определяющих сопротивление преграды прониканию ударника, учитывается лишь влияние касательных напряжений. В [10] предложена модифицированная форма гидродинамической теории, учитывающая влияние прочности ударника и преграды, и приведены экспериментальные данные по определению динамического предела текучести. Во всех приближенных моделях содержатся параметры, которые имеют характер “подгоночных” коэффициентов, и могут быть определены из экспериментов.

Ниже рассматриваются две численные схемы определения интегральных характеристик процесса соударения, которые мы назвали квазиодномерными моделями. В них применяется алгоритм решения двумерных динамических задач упругопластического деформирования [4–7], и в то же время для построения решения используется одномерный столбец конечных элементов (двумерная область заменяется одномерной).

1. Уравнение состояния. При выводе уравнения состояния предполагается, что $1 + \gamma'_{ij} \simeq 1$, где γ'_{ij} — компоненты тензора упругих деформаций. Это предположение справедливо для большинства металлов. Считается также, что объемное деформирование элемента среды происходит упруго. При этих предположениях кинематические соотношения в случае произвольных деформаций можно записать в виде [11]

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{ij} &= \alpha e'_{ij} - \gamma'_{jk} \omega_{ki} - \gamma'_{ik} \omega_{kj} - \varphi'_{ij}, & \dot{\gamma} &= \alpha e, & \rho &= \rho_0 \alpha^{3/2}, & \alpha &= 1 - 2\gamma/3, \\ e_{ij} &= e_{ij}^y + \varphi_{ij}, & \varphi_{ij} \delta_{ij} &= 0, & e'_{ij} &= e_{ij} - e \delta_{ij}/3, \\ \gamma'_{ij} &= \gamma_{ij} - \gamma \delta_{ij}/3, & e &= e_{ij} \delta_{ij}, & \gamma &= \gamma_{ij} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где φ_{ij} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций; $\omega_{ij} = \partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i$ — компоненты тензора скоростей поворотов.

Полные деформации ε_{ij} удовлетворяют соотношениям

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = e_{ij}.$$

При построении определяющих соотношений между напряжениями, деформациями и температурой считаем, что внутренняя энергия U является функцией первого и второго инвариантов тензора упругих деформаций и энтропии S : $U = U(\gamma, J_2, S)$, $J_2 = \gamma'_{ij} \gamma'_{ij} / 2$. Используя закон сохранения энергии $\sigma_{ij} e_{ij} = \rho \dot{U}$ и соотношения (1.1), получаем $\sigma e + \sigma'_{ij} e'_{ij} = \rho \alpha e U_\gamma + \rho \gamma'_{ij} (\alpha e'_{ij} - \gamma'_{ki} \omega_{kj} - \gamma'_{kj} \omega_{ki} - \varphi'_{ij}) U_{J_2} + \rho U_S \dot{S}$. Следовательно,

$$\sigma = \rho \alpha U_\gamma, \quad \sigma'_{ij} = \rho \alpha \gamma'_{ij} U_{J_2}, \quad \rho U_S \dot{S} = \rho \gamma'_{ij} \varphi'_{ij} U_{J_2}. \quad (1.2)$$

Последнее из соотношений (1.2) перепишем в виде

$$T \dot{S} = \frac{1}{\alpha \rho} \sigma'_{ij} \varphi'_{ij}, \quad (1.3)$$

где $T = U_S$ — температура. Через свободную энергию $\Phi = U - ST$ соотношения (1.2), (1.3) записываются в виде

$$\sigma = \rho \alpha \Phi_\gamma, \quad \sigma'_{ij} = \rho \alpha \gamma'_{ij} \Phi_{J_2}, \quad -T \Phi_{TT} \dot{T} = \frac{1}{\alpha \rho} \sigma'_{ij} \varphi'_{ij} + T \Phi_{\gamma T} \dot{\gamma} + T \Phi_{J_2 T} \dot{J}_2. \quad (1.4)$$

Величина $-T \Phi_{TT}$ имеет смысл теплоемкости при постоянных деформациях и обозначается через c_V .

Дальнейшая конкретизация уравнений (1.4) зависит от выбора функции Φ и предположения о характере необратимой пластической деформации.

Если принять, что теплоемкость c_V не зависит от γ и J_2 , среднее напряжение σ не зависит от J_2 , зависимость σ'_{ij} линейна по γ'_{ij} , то функцию Φ можно представить в виде

$$\Phi = [\psi(\gamma) + T\varphi(\gamma) + 2\mu J_2 + f(T)]/\rho_0,$$

где μ — модуль сдвига. При этом соотношения (1.4) записываются в виде

$$\sigma = \alpha^{5/2}(\psi_\gamma + T\varphi_\gamma), \quad \sigma'_{ij} = 2\mu\alpha^{2/5}\gamma'_{ij}, \quad c_V\dot{T} = (1/\alpha\rho)\sigma'_{ij}\varphi'_{ij} + (\alpha/\rho_0)eT\varphi_\gamma. \quad (1.5)$$

В модели упругопластического тела примем следующую зависимость среднего напряжения σ от инварианта упругих деформаций γ и температуры T :

$$\sigma = K\alpha^{5/2}\gamma - c_V\Gamma\rho(T - T_0), \quad (1.6)$$

где $K = E/(3(1 - \nu))$ — коэффициент объемного расширения; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; Γ — коэффициент Грюнайзена; T — абсолютная температура; T_0 — температура, соответствующая нормальным условиям (обычно 300 К).

Соотношение (1.6) получается из первого соотношения (1.5), если

$$\psi = K\gamma^2/2 + (3/2)c_V T_0 \rho_0 \ln \alpha, \quad \varphi_\gamma = -(c_V/\alpha)\Gamma\rho_0.$$

При этом третье соотношение (1.5) принимает вид

$$\dot{T} = \sigma'_{ij}\varphi'_{ij}/(c_V\alpha\rho) - \Gamma T e. \quad (1.7)$$

Скорость необратимых деформаций определяется соотношениями

$$\varphi'_{ij} = \lambda\gamma'_{ij}. \quad (1.8)$$

Процедура вычисления неотрицательного множителя λ приведена в [7]. Уравнения (1.1), (1.6)–(1.8) определяют модель упругопластического тела.

В приводимых ниже численных алгоритмах расчетная область состоит из одного столбца конечных элементов с краевыми условиями на границе области, моделирующими процесс перетекания вещества. В расчетной области используется модель упругопластического течения при больших деформациях (1.6)–(1.8). Напряжения и деформации в расчетной области вычисляются по алгоритму, изложенному в [4–7].

Схемы различаются видом краевых условий на границе расчетной области, которые формулируются в зависимости от того, какие качественные и количественные характеристики процесса соударения подлежат определению.

2. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины проникания ударника в преграду. Ударник рассматривается как абсолютно жесткий цилиндр радиуса R , высоты h и массы M . Преграда толщины H — изотропная упругопластическая среда. Рассмотрим в преграде область D (расчетную область), находящуюся под ударником и ограниченную боковой поверхностью A_1A_2 (рис. 1).

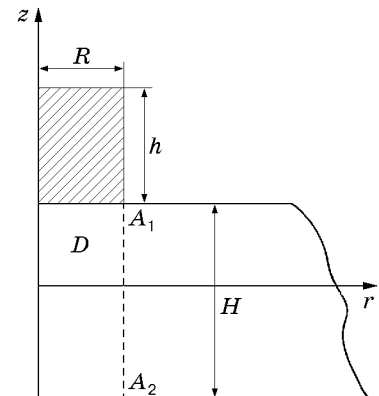


Рис. 1

На боковой поверхности A_1A_2 в процессе соударения действуют касательные и нормальные напряжения σ_{rz} и σ_r , изменяющиеся во времени. Для определения напряженно-деформированного состояния в области D нужно знать закон изменения этих напряжений во времени и по пространственным координатам. Для их определения необходимо решать

двумерную задачу. При построении квазиодномерной модели воздействие на область D через поверхность A_1A_2 со стороны остальной части преграды будем моделировать крайними условиями.

Для оценки предельной величины проникания условия на поверхности A_1A_2 формулируются следующим образом. Радиальное напряжение σ_r полагается равным нулю. Очевидно, что среди всех возможных вариантов крайних условий для σ_r это условие максимально ослабляет сопротивление преграды прониканию ударника. При отсутствии радиальных напряжений на боковой поверхности A_1A_2 появляются скорости в радиальном направлении, которые приводят к истечению части материала из расчетной области. Материал, вытекающий через поверхность A_1A_2 , исключается из дальнейших расчетов. Поскольку масса этого материала имеет скорость в осевом направлении, то исключение ее из расчета означает, что из системы изымается некоторое количество движения в осевом направлении, что приводит к торможению ударника.

Крайевые условия на поверхности A_1A_2 для скорости в осевом направлении u_z и касательного напряжения σ_{rz} формулируются следующим образом. Вначале принимается, что u_z на боковой поверхности равно нулю. Если при этом условии $|\sigma_{rz}| < \tau^*$ (τ^* — предел текучести на сдвиг или сопротивление срезу), то решение вычисляется с условием $u_z = 0$ на A_1A_2 . Если же $|\sigma_{rz}| \geq \tau^*$, то решение вычисляется при условии $|\sigma_{rz}| = \pm\tau^*$; при этом знак σ_{rz} принимается таким же, какой был у σ_{rz} при нулевом значении u_z . При вычислении решения по схемам, изложенным в [4–7], не требуется итераций для реализации сформулированных крайних условий.

3. Квазиодномерная модель для оценки предельной глубины зоны тыльных отколов. Одним из основных факторов, определяющих тыльные отколы, является амплитуда давления на фронте ударной волны. Очевидно, что амплитуда давления будет максимальной, если ударник в процессе проникания считать недеформируемым абсолютно жестким телом, а среди вариантов крайних условий для радиальных составляющих скорости и напряжения на поверхности A_1A_2 принять условие $u_r = 0$.

Крайевое условие для касательного напряжения σ_{rz} принимается таким же, как в п. 2.

4. Зависимость глубины проникания от отношения плотностей материалов ударника и преграды. В этом расчете считается, что ударник является недеформируемым цилиндром массы M , имеющим начальную скорость соударения V_0 . Затем скорость его принимается равной нормальной скорости на верхней границе конечного элемента расчетной области, соприкасающегося с основанием цилиндра. Поскольку расчетная область состоит из одного столбца конечных элементов, то вычисление решения по алгоритму, изложенному в [4–7], ведется по конечным формулам.

Входные данные задачи были следующими: начальная скорость $V_0 = 5 \cdot 10^4$ см/с, радиус ударника $R = 0,5$ см, высота ударника $h = 1,0$ см, плотность материала преграды $\rho = 8 \cdot 10^3$ г/см³, $\rho/\rho_0 = 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ (ρ_0 — плотность материала ударника), модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, касательный модуль $E' = 0$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, предел текучести при сдвиге $\tau_s = 5 \cdot 10^2$ МПа, коэффициент Грюнайзена $\Gamma = 2,0$, теплоемкость $c_V = 8,96 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К), $T_0 = 300$ К, толщина преграды $H = 5$ см, число конечных элементов в столбце $N = 50$.

На рис. 2 по оси ординат отложена величина l/h (l — глубина проникания ударника), по оси абсцисс — величина $\sqrt{\rho_0/\rho}$. Крестиками показаны значения, полученные в предположении, что на границе расчетной области радиальная скорость равна нулю, точками — значения, полученные в предположении, что на границе расчетной области радиальное напряжение равно нулю. Сплошная линия соответствует гидродинамической модели М. А. Лаврентьева. Для рассмотренных входных данных оба варианта крайних условий на границе расчетной области приводят к близким результатам.

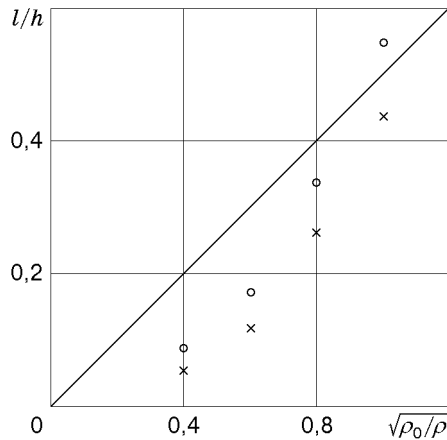


Рис. 2

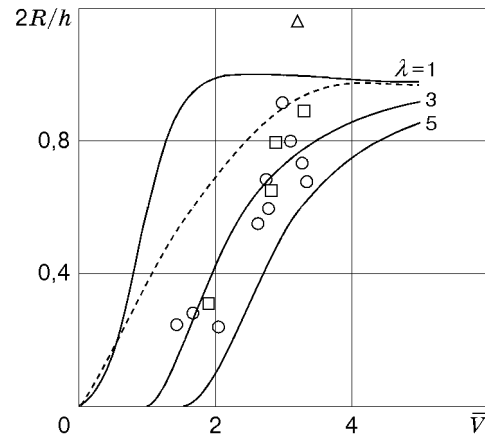


Рис. 3

5. Зависимость глубины проникания цилиндрического стержня в преграду от скорости соударения. В [10] приведены экспериментальные данные о скоростном ударе цилиндрических стержней из мягкой стали по мишени из того же материала и сопоставление их с расчетами по модифицированной гидродинамической модели. Предел текучести материала $Y_p = 11$ кбар. Диаметр образцов 0,6 см. В модифицированной гидродинамической модели содержится безразмерный параметр λ , характеризующий прочностные свойства ударника и преграды и определяемый по адиабате Гюгоню и пределу прочности.

На рис. 3 представлены зависимости глубины проникания от скорости ударника $\bar{V} = \rho V_0^2 / (4\sigma_T)$. Треугольниками, квадратами и кружками нанесены экспериментальные точки [10]. Треугольники соответствуют длине ударника $h = 1,25$ см, квадраты — 1,5 см, кружки — 2,5 см. Сплошные кривые соответствуют расчетам по модифицированной гидродинамической модели [10], штриховая — расчетам по схеме, приведенной в п. 2. Соответствие расчетной кривой экспериментальным данным с учетом их разброса удовлетворительное.

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что предложенные простые расчетные схемы могут быть использованы для оценки интегральных характеристик процессов соударения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мерзиевский Л. А. Метод расчета течений вязкоупругой среды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 45. С. 141–151.
2. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 12).
3. Гулидов А. И., Шабалин И. И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел в пространственном случае // Материалы X Всесоюз. конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности", Красноярск, 23–27 февр. 1987 г. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1988. С. 70–75.
4. Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д. Численное решение задач динамического упругопластического деформирования тел вращения на основе локальной аппроксимации

- линейными полиномами // Материалы VII Всесоюз. конф. “Численные методы решения задач теории упругости и пластичности”, Миасс, 1–3 июля 1981 г. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 233–247.
5. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования в задачах динамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 66. С. 60–68.
 6. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Схема численного решения динамических задач с условиями трения Кулона на поверхностях контакта // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т горного дела СО АН СССР, 1987. С. 80–83.
 7. **Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д.** Об аппроксимации уравнений упругопластического деформирования // Неклассические задачи механики твердого тела: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92. С. 45–54.
 8. **Сагомонян А. Я.** Проникание. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
 9. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 4. С. 41–56.
 10. **Тейт А.** Теория торможения длинных стержней после удара по мишени // Механика. 1968. № 5. С. 125–137.
 11. **Иванов Г. В.** Об уравнениях упругопластического деформирования при произвольной величине поворотов и деформаций // ПМТФ. 1978. № 3. С. 130, 131.

Поступила в редакцию 25/V 2000 г.
