

УДК 532.54

## СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ЦИЛИНДРА С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

А. Пантократорас

Инженерная школа Университета им. Демокрита Фракии, 67100 Ксанти, Греция  
E-mail: apantokr@civil.duth.gr

Рассматривается двумерная задача об обтекании неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом горизонтально расположенного цилиндра с квадратным поперечным сечением. Задача решается численно с использованием метода конечных объемов, коммерческого пакета программ Ansys Fluent, большой расчетной сетки для моделирования отсутствия границ (безграничной жидкости) при значениях показателя степени  $0,1 \div 2,0$  и числа Рейнольдса  $0,001 \div 45,000$ . Установлено, что при малых значениях числа Рейнольдса и показателя степени ( $n \leq 0,5$ ) коэффициент сопротивления удовлетворяет соотношению  $C_D = A/Re$ . Также установлено, что величина  $A$  является степенной функцией. Показано, что коэффициент сопротивления практически не зависит от показателя степени при больших значениях числа Рейнольдса, а длина вихревого следа нелинейно зависит от числа Рейнольдса и показателя степени.

Ключевые слова: цилиндр с квадратным поперечным сечением, степенной закон, коэффициент сопротивления, вихревой след.

DOI: 10.15372/PMTF20160209

**Введение.** Течение несжимаемой жидкости вдоль неподвижного кругового цилиндра является классической проблемой гидродинамики. Сложная физика и прикладной характер задачи вызывают интерес исследователей на протяжении более 100 лет, поэтому существует большое количество теоретических и экспериментальных работ по данной теме. Несмотря на простую геометрию, обтекание кругового цилиндра считается базовым случаем более сложных течений [1]. Важной величиной, характеризующей течение жидкости по нормали к цилиндру, является коэффициент сопротивления, который был вычислен экспериментально и численно во многих работах по гидродинамике (см., например, [2. Р. 176; 3. Р. 324]), в которых коэффициент сопротивления приводится для значений числа Рейнольдса от  $Re = 0,1$ , когда поток является ламинарным, до  $Re = 10^6$ , когда поток становится турбулентным. Следует отметить, что значения коэффициента сопротивления для кругового цилиндра вычислялись для неограниченного течения, т. е. для случая, когда цилиндр находится в жидкости, не имеющей границ. Однако для численного или экспериментального расчета коэффициента сопротивления наличие границ необходимо. Экспериментальные исследования проводятся в аэродинамических трубах, где границами являются стенки трубы; в численных расчетах границами являются границы расчетной

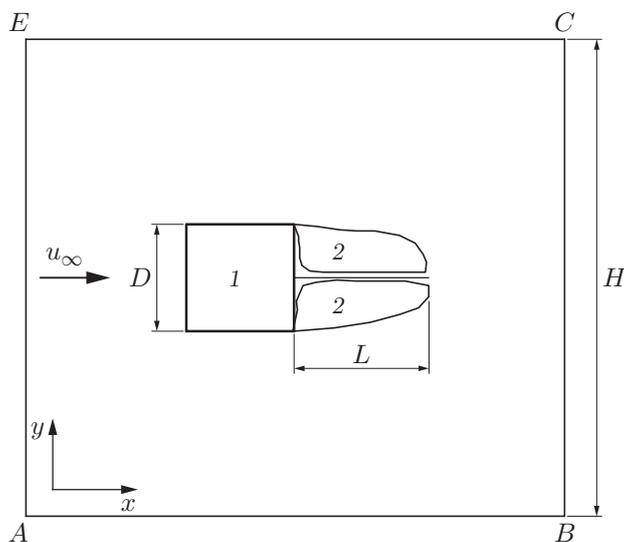


Рис. 1. Расчетная область и схема течения:  
1 — цилиндр, 2 — вихри

области. При обтекании любого тела, погруженного в поток и ограниченного жесткими стенками, возникает блокирующее ограничение. Жесткие стенки препятствуют поперечному смещению потока и в окрестности стенок скорость больше, чем в безграничной жидкости. Насколько существенно влияние стенок и можно ли их расположить на таком расстоянии, чтобы считать жидкость безграничной, зависит от значения числа Рейнольдса. При  $Re = 0$  это невозможно, при  $Re > 0$  стенки можно отодвинуть настолько далеко, что это позволит рассматривать жидкость как безграничную [3. Р. 321]. Влияние стенок на поток при обтекании тела рассматривалось в работе [4]. Интерес к данной задаче обусловлен, возможно, наличием экспериментальных данных об обтекании наклонной пластины в аэродинамической трубе. В [4] исследовано влияние препятствия на образование следа позади плохообтекаемого тела и предложена теория, частично использующая модель Гельмгольца обтекания тела. Также в [4] предложена формула для вычисления коэффициента сопротивления ограниченного потока с использованием коэффициента сопротивления для неограниченного потока. В работе [5] предложена уточненная формула для вычисления коэффициента сопротивления. В работе [6] полученные в [4, 5] формулы использованы для корректировки результатов расчетов для ограниченных течений и вычисления коэффициентов сопротивления для неограниченных течений.

Несмотря на то что преобразование неограниченной области в ограниченную является некоторой аппроксимацией, это позволяет решить задачу [3]. В случае если область мала, можно получить только грубые оценки, если область большая, то точность результатов увеличивается. В большинстве численных исследований используются очень большие вычислительные области, с тем чтобы влиянием границ можно было пренебречь. Одной из первых работ, посвященных изучению обтекания круговых цилиндров, является работа [7]. В [8] использовалась вычислительная область, характерный размер которой равен 300 диаметрам цилиндра. Увеличение мощности компьютеров позволило увеличивать размеры расчетных областей. В [9] изучались импульс и теплоперенос при ламинарном поперечном обтекании цилиндра при  $10^{-4} \leq Re \leq 200$ . Для того чтобы погрешность составила менее 0,1 %, область расчета при  $Re < 1$  (рис. 1) должна удовлетворять условию  $H/D > 4000 Re^{-0,8}$ , для того чтобы получить погрешность до 1 % —  $H/D > 320 Re^{-0,8}$ . Это означает, что при  $Re = 0,1$  расчетная область должна удовлетворять условию  $H/D > 25\,000$  (высокая точность),  $H/D > 2000$  (погрешность приблизительно-

но равна 1 %). В [10] для решения задачи об обтекании вращающегося кругового цилиндра использовалась расчетная область, удовлетворяющая условию  $1000 \leq H/D \leq 100\,000$  в зависимости от значения числа Рейнольдса. По мнению авторов [10], при уменьшении числа Рейнольдса размер расчетной области должен быть значительно увеличен. В [11] с помощью метода спектральных элементов при  $5 \leq Re \leq 250$  в расчетной области, удовлетворяющей условию  $H/D = 8000$ , исследовались течения, перпендикулярные круговому цилиндру. В [12] для исследования стационарного безграничного течения жидкости со степенным реологическим законом вокруг эллиптического цилиндра при  $0,01 \leq Re \leq 40,00$  использовалась расчетная область, удовлетворяющая условию  $H/D = 1200$ . В работе [13] расчетная область, удовлетворяющая условию  $H/D = 8000$ , применялась для исследования стационарного течения жидкости вокруг неподвижного кругового цилиндра при  $6 \leq Re \leq 40$ . Во многих работах, посвященных изучению обтекания жидкостью кругового или эллиптического цилиндра, большие расчетные области используются для того, чтобы избежать влияния границ на результаты.

В работе [14] представлены результаты численных расчетов для цилиндра с квадратным поперечным сечением при  $Re \leq 300$ ,  $H/D = 12$ . В [15] численно исследовано вихреобразование в области за цилиндром с квадратным поперечным сечением при  $H/D = 6$ . В [16] исследовалось обтекание цилиндра с квадратным поперечным сечением под углом при малых числах Рейнольдса. В этой работе приведены результаты 13 работ для областей  $7 < H/D < 125$ , собственные результаты получены для расчетной области  $H/D = 40$ . В [17] исследованы теплопередача и гидродинамика при плоском ламинарном обтекании цилиндра с квадратным поперечным сечением в расчетной области размером  $H/D = 20$ . В работе [18], являющейся наиболее полным исследованием обтекания неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом цилиндра с квадратным поперечным сечением, вычислены коэффициент сопротивления и длина вихревого следа при показателе степени  $n = 0,5 \div 2,0$ , числе Рейнольдса  $Re = 1 \div 45$  и размере области расчета  $H/D = 30$ . В [19] проведено исследование смешанной конвекции от нагретого цилиндра с квадратным поперечным сечением в ньютоновской и неньютоновской жидкостях в области размером  $H/D = 30$ . В [20] изучалось нестационарное обтекание жидкостью со степенным реологическим законом цилиндра с квадратным поперечным сечением в расчетной области размером  $H/D = 20$ . В работе [21] исследовался теплообмен при обтекании жидкостью цилиндра с квадратным поперечным сечением в расчетной области размером  $H/D = 120$ . В [22] исследовались установившееся течение и перенос тепла от наклонного цилиндра с квадратным поперечным сечением в жидкость со степенным реологическим законом в расчетной области размером  $H/D = 100$ . В работе [23] численно моделировалось течение жидкости вокруг цилиндра с квадратным поперечным сечением в расчетной области размером  $H/D = 12$  и показано, что коэффициент сопротивления существенно зависит от размера расчетной области и экспоненциально увеличивается с его уменьшением. Влияние блокировки является более существенным при малых числах Рейнольдса [24]. При малом размере области (большом коэффициенте блокирования  $D/H$ ) длина вихревого следа уменьшается [25].

Из сказанного выше следует, что ранее при решении задачи об обтекании цилиндра с квадратным поперечным сечением в основном использовались расчетные области малых размеров. Размер максимальной расчетной области в этом случае удовлетворял соотношению  $H/D = 120$ , в то время как в случае кругового цилиндра максимальная расчетная область достигала размера  $H/D = 100\,000$ . Очевидно, что малые расчетные области недостаточны для расчетов при малых числах Рейнольдса, т. е. задача о безграничном обтекании цилиндра с квадратным поперечным сечением при малых числах Рейнольдса до сих пор не решена.

Целью настоящей работы является исследование течений ньютоновской и неньютоновской жидкостей вокруг цилиндра с квадратным поперечным сечением при малых числах Рейнольдса  $Re = 0,001 \div 45,000$ . Выбор данного диапазона значений числа Рейнольдса обусловлен тем, что при  $Re > 45$  поток становится периодическим во времени [26]. В настоящей работе размер расчетной области удовлетворяет условию  $H/D = 50\,000$  и жидкость можно считать неограниченной. В работе [27] приведены значения коэффициента сопротивления для тел различной формы, в том числе для цилиндров с круговым (при  $Re = 0,1 \div 10^7$ ) и квадратным (при  $Re = 10^4 \div 10^6$ ) поперечными сечениями. Поскольку для других значений числа Рейнольдса данные отсутствуют, целью настоящей работы является вычисление коэффициента сопротивления для обтекаемого безграничной жидкостью цилиндра с квадратным поперечным сечением, как это сделано для кругового цилиндра.

**1. Математическая модель и ее численная реализация.** Рассмотрим обтекание неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом горизонтально расположенного цилиндра с квадратным поперечным сечением (см. рис. 1). Полная система уравнений для данного течения включает следующие уравнения [28]:

— уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

— уравнение импульсов в проекции на ось  $x$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y};$$

— уравнение импульсов в проекции на ось  $y$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}.$$

Тензор напряжений  $\tau$  и тензор скоростей деформации  $S$  связаны соотношением

$$\tau_{ij} = 2\eta S_{ij}, \quad (1)$$

где  $\eta$  — кажущаяся вязкость. Тензор деформации определяется следующим образом:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

С учетом уравнений (1), (2) уравнения импульсов принимают следующий вид:

— в проекции на ось  $x$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right];$$

— в проекции на ось  $y$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Здесь  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты;  $u, v$  — горизонтальная и вертикальная скорости;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность жидкости. Кажущаяся вязкость находится из соотношения

$$\eta = K \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2},$$

где  $n$  — показатель степени;  $K$  — коэффициент консистенции, который в случае ньютоновской жидкости имеет смысл динамической вязкости. Жидкость характеризуется как

псевдопластическая при  $0 < n < 1$ , дилатантная при  $n > 1$  и ньютоновская при  $n = 1$ . К псевдопластическим жидкостям с малым показателем степени ( $n = 0,2$ ) относятся, например, полимерный расплав и резина.

Течение зависит от числа Рейнольдса следующим образом:

$$\text{Re} = \rho u_{\infty}^{2-n} D^n / K$$

( $D$  — длина стороны цилиндра (см. рис. 1);  $u_{\infty}$  — скорость набегающего потока). Коэффициент сопротивления определяется из выражения [18]

$$C_D = \frac{F}{\rho u_{\infty}^2 D/2} = \frac{1}{\rho u_{\infty}^2 D/2} \left( \int_s p n_x dS + \int_s \tau n_x dS \right), \quad (3)$$

где  $F$  — сила, действующая на цилиндр;  $S$  — площадь поверхности;  $n_x$  — компонента вектора нормали к поверхности цилиндра в направлении  $x$ . В правой части (3) первый интеграл по поверхности представляет собой силу давления, второй — силу реакции.

Численное исследование проводилось с помощью пакета программ Ansys Fluent (версия 12.0). Моделировалось двумерное стационарное ламинарное течение с использованием схемы Muscl третьего порядка для конвективных слагаемых в уравнении импульсов. Для определения давления и скорости использовалась связанная схема, для определения вязкости — степенная модель неньютоновской жидкости. Вычисления, проводившиеся с двойной точностью, заканчивались, если невязки в уравнениях неразрывности и движения были меньше  $10^{-10}$ . Для вычислений использовался код CFD (computational fluid dynamics) [12, 29, 30].

Задавались следующие граничные условия:

— на границе  $AE$

$$u = u_{\infty}, \quad v = 0;$$

— на границе  $BC$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

— на границах  $AB$  и  $EC$

$$u = u_{\infty}, \quad v = 0. \quad (4)$$

На сторонах цилиндра ставились условия непротекания (прилипания). Для моделирования бесконечной области все границы располагались на большом ( $25\,000D$ ,  $H/D = 50\,000$ ) расстоянии от цилиндра. Для получения точных результатов расчетная сетка вблизи поверхности цилиндра сгущалась. Сетка такого размера применялась автором в работах [31, 32], в одной из которых рассматривалось течение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом. Для построения расчетной сетки на поверхности цилиндра использовалась специальная функция, встроенная в пакет Ansys Fluent.

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** В табл. 1 приведены значения коэффициента сопротивления при обтекании цилиндра с квадратным поперечным сечением, полученные в работе [33] и настоящей работе для расчетной области одинакового размера (80 диаметров перед центром цилиндра, 100 диаметров за центром цилиндра, ширина области —  $100D$ ) (см. рис. 1, [33. § 6.2]) при идентичных граничных условиях. В работе [33] использовался метод конечных элементов, в то время как пакет Fluent основан на методе конечных объемов, при этом полученные результаты близки. Таким образом, при использовании различных методов для сеток одинакового размера с одними и теми же граничными условиями результаты идентичны. Это свидетельствует о надежности используемых

Таблица 1

Значения коэффициента сопротивления  $C_D$  для случая течения ньютоновской жидкости перпендикулярно цилиндрам с квадратным и круговым поперечными сечениями при различных значениях числа Рейнольдса

| Re    | $C_D$   |  |   |  |   |             |  |   |
|-------|---|--|---|--|---|-------------|--|---|
|       | Цилиндр с квадратным поперечным сечением      |  |   | Цилиндр с круговым поперечным сечением     |   |             |  |   |
|       | Работа [33]<br>(формула (8),<br>$H/D = 100$ ) | Настоящая<br>работа<br>( $H/D = 100$ ) | Различие<br>результатов,<br>полученных<br>при $H/D = 100$<br>в настоящей работе<br>и работе [33], % | Настоящая<br>работа<br>( $H/D = 50\,000$ ) | Различие<br>результатов,<br>полученных<br>в настоящей<br>работе<br>при $H/D = 100$<br>и $H/D = 50\,000$ , % | Работа [34] | Настоящая<br>работа<br>( $H/D = 50\,000$ ) | Различие<br>результатов,<br>полученных<br>в настоящей<br>работе<br>и работе [34], % |
| 0,001 | —   | 7203,00                                | —   | 2912,00                                    | 147,0   | 2821,00     | 2846,00                                    | <1  |
| 0,01  | —   | 720,00                                 | —   | 385,00                                     | 87,0  | 381,00      | 374,00                                     | 2   |
| 0,1   | —   | 74,82                                  | —   | 58,14                                      | 29,0  | 56,12       | 55,71                                      | <1  |
| 1     | —   | 11,78                                  | —   | 11,04                                      | 7,0   | 10,32       | 10,33                                      | <1  |
| 2     | 7,44  | 7,46                                   | <1  | 7,16                                       | 4,0   |             |  |   |
| 5     | 4,41  | 4,38                                   | <1  | 4,25                                       | 3,0   |             |  |   |
| 10    | 3,06  | 3,06                                   | 0   | 3,00                                       | 2,0   |             |  |   |
| 20    | 2,21  | 2,22                                   | <1  | 2,18                                       | 1,8   |             |  |   |
| 30    | 1,87  | 1,87                                   | 0   | 1,84                                       | 1,6   |             |  |   |
| 40    | 1,68  | 1,66                                   | 1   | 1,64                                       | 1,2   |             |  |   |
| 50    | —   | 1,53                                   | —   | 1,51                                       | 1,3   |             |  |   |

Таблица 2

Значения коэффициента сопротивления и длины вихревого следа  
для случая течения ньютоновских жидкостей, перпендикулярного плоской пластине  
при различных значениях числа Рейнольдса

| Re | $C_D$       |                  |                         | $L/D$       |                  |                         |
|----|-------------|------------------|-------------------------|-------------|------------------|-------------------------|
|    | Работа [35] | Настоящая работа | Различие результатов, % | Работа [35] | Настоящая работа | Различие результатов, % |
| 1  | 9,66        | 9,75             | <1                      | 0,21        | 0,21             | 0                       |
| 5  | 3,75        | 3,78             | <1                      | 0,65        | 0,65             | 0                       |
| 10 | 2,75        | 2,75             | 0                       | 1,16        | 1,16             | 0                       |
| 20 | 2,09        | 2,11             | <1                      | 2,43        | 2,38             | 2                       |
| 30 | 1,82        | 1,84             | 1                       | 3,89        | 3,76             | 3                       |
| 40 | 1,68        | 1,68             | 0                       | 5,48        | 5,25             | 4                       |
| 50 | 1,57        | 1,57             | 0                       | 7,03        | 6,75             | 4                       |

методов. Также в табл. 1 приведены результаты, полученные в настоящей работе для сетки очень большого размера  $H/D = 50\,000$  (практически безграничное течение). Сравнение результатов, полученных на сетках относительно небольшого размера и очень большого размера, показывает, что различие очень существенно при малых значениях числа Рейнольдса и уменьшается при больших значениях Re. Следовательно, для точного решения задачи при малых числах Рейнольдса необходимо использовать очень большую расчетную область. В настоящей работе вычислены значения коэффициента сопротивления для двух областей различного размера ( $H/D = 100$ ,  $H/D = 50\,000$ ). При  $Re = 0,001$  погрешность составила 147 %. Полученные данные о том, что в небольшой расчетной области коэффициент сопротивления увеличивается, подтверждают результаты работы [11]. Из результатов, приведенных в табл. 1, следует, что коэффициент сопротивления  $C_D$  существенно зависит от размера расчетной области. Также в табл. 1 приведены результаты для кругового цилиндра при малых значениях числа Рейнольдса, полученные в настоящей работе и работе [34]. Эти результаты хорошо согласуются.

В табл. 2 представлены значения коэффициента сопротивления и длины вихревого следа для течения, нормального к плоской пластине, полученные в настоящей работе и работе [35]. (Плоскую пластину можно считать частным случаем цилиндра с квадратным поперечным сечением очень малой ширины.) Из табл. 2 следует, что приведенные результаты также хорошо согласуются. Следует отметить, что значения коэффициента сопротивления для цилиндра с квадратным поперечным сечением и для плоской пластины (см. табл. 1, 2) близки при  $Re \approx 30$  и различаются при  $Re < 30$ .

В табл. 3 приведены значения коэффициента сопротивления для неньютоновских жидкостей, свидетельствующие о надежности используемого кода.

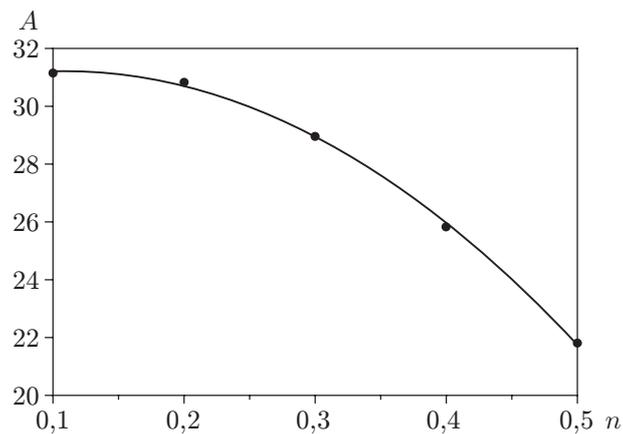
В табл. 4 приведены результаты для случая обтекания неньютоновской жидкостью цилиндра с квадратным поперечным сечением для очень большой области расчета при малых и больших значениях числа Рейнольдса.

С учетом сказанного выше можно предположить, что значения коэффициента сопротивления, полученные в настоящей работе, будут меньше, чем полученные в работах с небольшой расчетной областью (в случае малой расчетной области коэффициент сопротивления увеличивается). Например, при  $Re = 1$ ,  $n = 0,6$   $C_D = 18,79$  (настоящая работа),  $C_D = 28,95$  (работа [18]). Различие составляет 54 %. При  $Re = 0,1$ ,  $n = 1$  (ньютоновская жидкость)  $C_D = 58,1400$ ;  $71,3064$  в настоящей работе и работе [21] соответственно (см. табл. 3) (различие — 23 %). При  $Re = 5$ ,  $n = 1$  (ньютоновская жидкость)  $C_D = 4,25$ ;

Таблица 3

Значения коэффициента сопротивления для случая обтекания неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом кругового цилиндра при различных значениях показателя степени  $n$

| $n$ | $C_D$                           |  |                               |                                 |  |                               |
|-----|---------------------------------|--|-------------------------------|---------------------------------|--|-------------------------------|
|     | Re = 1                          |  |                               | Re = 10                         |  |                               |
|     | Работа [12]<br>( $H/D = 1200$ ) | Настоящая<br>работа<br>( $H/D = 50\,000$ ) | Различие<br>результатов,<br>% | Работа [12]<br>( $H/D = 1200$ ) | Настоящая<br>работа<br>( $H/D = 50\,000$ ) | Различие<br>результатов,<br>% |
| 0,2 | 26,91                           | 26,86                                      | <1                            | 3,25                            | 3,16                                       | 3                             |
| 0,6 | 17,24                           | 17,19                                      | <1                            | 2,85                            | 2,90                                       | 2                             |
| 1,0 | 10,36                           | 10,28                                      | <1                            | 2,73                            | 2,75                                       | <1                            |
| 1,4 | 7,38                            | 7,35                                       | <1                            | 2,64                            | 2,64                                       | 0                             |
| 1,8 | 5,85                            | 5,84                                       | <1                            | 2,57                            | 2,56                                       | <1                            |

Рис. 2. Зависимость коэффициента  $A$  ( $C_D = A/Re$ ) от показателя степени  $n$ 

4,90 в настоящей работе и работе [17] соответственно (различие — 15 %). Во всех случаях при малых числах Рейнольдса значения коэффициента сопротивления в неограниченном потоке меньше, чем полученные в других работах.

Результаты, представленные в табл. 4, получены при малых значениях числа Рейнольдса, для которых до настоящего времени данных не существовало. Из табл. 4 следует, что при малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \leq 1$ ) и показателя степени ( $n \leq 0,5$ ) коэффициент сопротивления удовлетворяет закону  $C_D = A/Re$ . Значения константы  $A$  (при  $n = 0,1$   $A = 31,14$ , при  $n = 0,2$   $A = 30,83$ , при  $n = 0,3$   $A = 28,95$ , при  $n = 0,4$   $A = 25,82$ , при  $n = 0,5$   $A = 21,82$ ) приведены на рис. 2, где через них проведен наилучший полином. Уравнение полинома с наилучшим приближением для указанных значений имеет вид

$$A = 30,493 + 13,335\,714n - 61,642\,857n^2.$$

В табл. 5 приведены значения длины вихревого следа для течения неньютоновской жидкости, перпендикулярного цилиндру с квадратным поперечным сечением. Эти значения больше, чем вычисленные в меньших областях. Например, длина вихревого следа при  $Re = 10$ ,  $n = 1$ , рассчитанная в данной работе, равна  $L/D = 0,6063$ , в то время как в работе [18] (см. уравнение (6)) при  $H/D = 8$   $L/D = 0,4898$  (различие составляет 19 %).

Таблица 4

Значения коэффициента сопротивления для случая обтекания неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом цилиндра с квадратным поперечным сечением при  $H/D = 50000$  и различных значениях показателя степени и числа Рейнольдса

| $n$ | $C_D$      |           |          |        |        |        |         |         |         |         |         |         |         |         |  |
|-----|------------|-----------|----------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|
|     | Re = 0,001 | Re = 0,01 | Re = 0,1 | Re = 1 | Re = 2 | Re = 5 | Re = 10 | Re = 15 | Re = 20 | Re = 25 | Re = 30 | Re = 35 | Re = 40 | Re = 45 |  |
| 0,1 | 31134,0    | 3114,00   | 311,46   | 31,46  | 15,94  | 6,86   | 3,76    | 2,731   | 2,217   | 1,907   | 1,718   | 1,564   | 1,505   | 1,471   |  |
| 0,2 | 30824,0    | 3081,00   | 308,31   | 30,98  | 15,65  | 6,64   | 3,67    | 2,667   | 2,161   | 1,859   | 1,667   | 1,517   | 1,422   | 1,357   |  |
| 0,3 | 28961,0    | 2895,00   | 289,53   | 29,10  | 14,72  | 6,28   | 3,52    | 2,594   | 2,125   | 1,839   | 1,655   | 1,511   | 1,411   | 1,340   |  |
| 0,4 | 25827,0    | 2582,00   | 258,22   | 26,06  | 13,30  | 5,83   | 3,38    | 2,542   | 2,111   | 1,844   | 1,669   | 1,532   | 1,433   | 1,359   |  |
| 0,5 | 21817,0    | 2181,70   | 218,22   | 22,28  | 11,68  | 5,43   | 3,28    | 2,521   | 2,119   | 1,865   | 1,690   | 1,564   | 1,466   | 1,392   |  |
| 0,6 | 17243,0    | 1722,00   | 172,69   | 18,79  | 10,36  | 5,10   | 3,20    | 2,508   | 2,130   | 1,890   | 1,724   | 1,599   | 1,503   | 1,428   |  |
| 0,8 | 8227,0     | 848,14    | 97,45    | 13,99  | 8,45   | 4,61   | 3,09    | 2,492   | 2,160   | 1,941   | 1,788   | 1,669   | 1,575   | 1,502   |  |
| 1,0 | 2912,0     | 384,80    | 58,14    | 11,04  | 7,16   | 4,25   | 3,00    | 2,479   | 2,179   | 1,983   | 1,838   | 1,729   | 1,639   | 1,567   |  |
| 1,2 | 1113,0     | 194,24    | 38,10    | 9,12   | 6,26   | 3,97   | 2,93    | 2,465   | 2,195   | 2,015   | 1,879   | 1,777   | 1,691   | 1,622   |  |
| 1,4 | 507,3      | 111,53    | 27,10    | 7,79   | 5,61   | 3,76   | 2,87    | 2,447   | 2,202   | 2,038   | 1,910   | 1,814   | 1,732   | 1,667   |  |
| 1,6 | 269,3      | 71,23     | 20,55    | 6,86   | 5,12   | 3,59   | 2,79    | 2,428   | 2,203   | 2,051   | 1,934   | 1,841   | 1,765   | 1,701   |  |
| 1,8 | 161,0      | 49,41     | 16,38    | 6,16   | 4,74   | 3,46   | 2,73    | 2,407   | 2,199   | 2,058   | 1,946   | 1,861   | 1,788   | 1,727   |  |
| 2,0 | 105,4      | 36,52     | 13,56    | 5,63   | 4,44   | 3,31   | 2,68    | 2,381   | 2,191   | 2,058   | 1,954   | 1,873   | 1,804   | 1,745   |  |

Таблица 5

Значения длины вихревого следа  $L/D$  для случая, когда течение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом перпендикулярно цилиндру с квадратным поперечным сечением ( $H/D = 50\,000$ )

| $n$ | $L/D$  |        |        |         |         |         |         |
|-----|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
|     | Re = 1 | Re = 2 | Re = 5 | Re = 10 | Re = 20 | Re = 30 | Re = 40 |
| 0,1 | 0,0798 | 0,0825 | 0,1287 | 0,2141  | 0,4277  | 1,4089  | 2,9424  |
| 0,2 | 0,0539 | 0,0707 | 0,1119 | 0,1958  | 0,4476  | 1,0472  | 2,1489  |
| 0,3 | 0,0280 | 0,0432 | 0,0966 | 0,1989  | 0,4842  | 0,9969  | 1,8438  |
| 0,4 | —      | 0,0188 | 0,0829 | 0,2141  | 0,5574  | 1,0701  | 1,8254  |
| 0,5 | —      | —      | 0,0814 | 0,2507  | 0,6398  | 1,1800  | 1,9109  |
| 0,6 | —      | —      | 0,0997 | 0,3011  | 0,7497  | 1,2761  | 2,0208  |
| 0,7 | —      | —      | 0,1302 | 0,3636  | 0,8550  | 1,4043  | 2,1611  |
| 0,8 | —      | —      | 0,1775 | 0,4308  | 0,9694  | 1,5554  | 2,3259  |
| 0,9 | —      | —      | 0,2309 | 0,5086  | 1,1113  | 1,7934  | 2,5273  |
| 1,0 | —      | 0,0707 | 0,2919 | 0,6063  | 1,2624  | 1,9994  | 2,7227  |
| 1,2 | 0,0569 | 0,1683 | 0,4323 | 0,8199  | 1,5813  | 2,4114  | 3,1987  |
| 1,4 | 0,1454 | 0,2782 | 0,5849 | 1,0625  | 1,9902  | 2,9012  | 3,6748  |
| 1,6 | 0,2401 | 0,4033 | 0,7772 | 1,3188  | 2,4755  | 3,4505  | 4,1570  |
| 1,8 | 0,3499 | 0,5468 | 0,9740 | 1,6942  | 2,9698  | 4,0227  | 5,0847  |
| 2,0 | 0,4735 | 0,7177 | 1,2548 | 2,0757  | 3,5741  | 4,6514  | 5,7943  |

На рис. 3, 4 приведены зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и показателя степени. Видно, что коэффициент сопротивления уменьшается при увеличении числа Рейнольдса и перестает зависеть от показателя степени. При  $Re = 20$  коэффициент сопротивления практически не зависит от показателя степени и приближенно равен коэффициенту сопротивления ньютоновской жидкости. Заметим, что при  $Re \leq 1$  кривые зависимостей, соответствующие значениям  $n = 0,1$ ,  $n = 0,5$ , параллельны (см. рис. 3), в случае если справедливо соотношение  $C_D = A/Re$ .

На рис. 5 приведена зависимость длины вихревого следа от показателя степени. Видно, что при  $Re = 1$ ;  $2$ ,  $n_1^* \leq n \leq n_2^*$ ,  $n_1^{**} \leq n \leq n_2^{**}$  вихревой след отсутствует. Также на рис. 5 видно, что длина вихревого следа сначала уменьшается, а затем, достигнув минимума, начинает увеличиваться.

На рис. 6 показана зависимость длины вихревого следа от числа Рейнольдса при различных значениях показателя степени. Полученные результаты свидетельствуют о том, что зависимость длины вихревого следа от числа Рейнольдса линейна в случае ньютоновской жидкости и нелинейна в случае неньютоновской жидкости. Нелинейность зависимости  $L/D(Re)$  существенна при малых значениях показателя степени ( $n = 0,1$ ), уменьшается при  $n \approx 1$  и исчезает при  $n = 1$ . При дальнейшем увеличении показателя степени нелинейность вновь возрастает. На рис. 5, 6 видно, что при изменении  $Re$  и  $n$  длина вихревого следа меняется нелинейно.

**Заключение.** В работе исследована задача об обтекании неньютоновской безграничной жидкостью цилиндра с квадратным поперечным сечением. Получены следующие результаты.

Для расчета обтекания безграничной жидкостью при малых значениях числа Рейнольдса необходима большая вычислительная область. Использование небольшой вычислительной области приводит к завышенным значениям коэффициента сопротивления и заниженным значениям длины вихревого следа.

При  $Re \leq 1$ ,  $n \leq 0,5$  коэффициент сопротивления удовлетворяет закону  $C_D = A/Re$ .

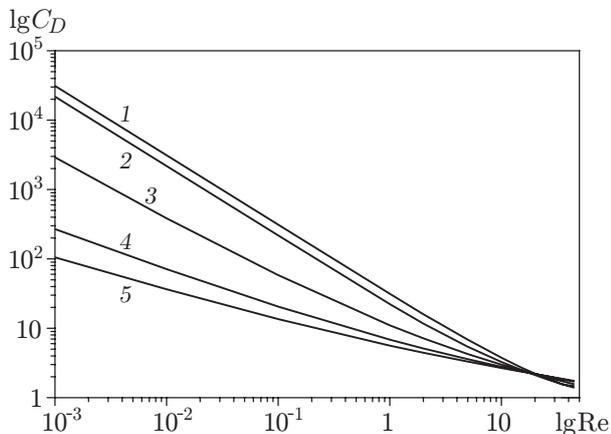


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса при различных значениях показателя степени:

1 —  $n = 0,1$ , 2 —  $n = 0,5$ , 3 —  $n = 1,0$ , 4 —  $n = 1,6$ , 5 —  $n = 2,0$

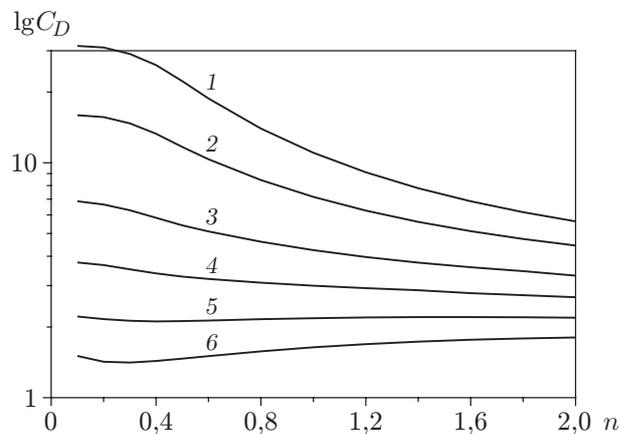


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость коэффициента сопротивления от показателя степени при различных значениях числа Рейнольдса:

1 —  $Re = 1$ , 2 —  $Re = 2$ , 3 —  $Re = 5$ , 4 —  $Re = 10$ , 5 —  $Re = 20$ , 6 —  $Re = 40$

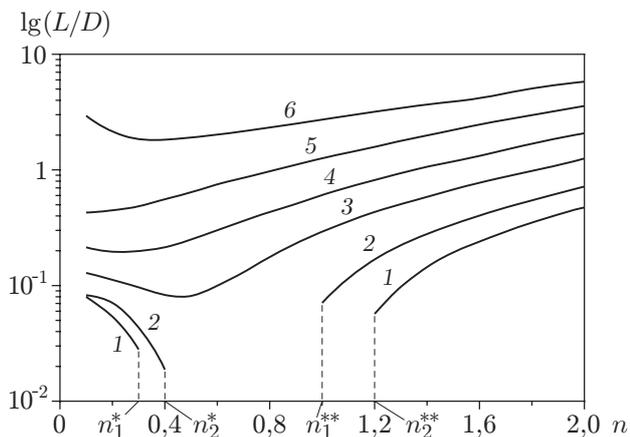


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость длины вихревого следа от показателя степени при различных числах Рейнольдса:

1 —  $Re = 1$ , 2 —  $Re = 2$ , 3 —  $Re = 5$ , 4 —  $Re = 10$ , 5 —  $Re = 20$ , 6 —  $Re = 40$

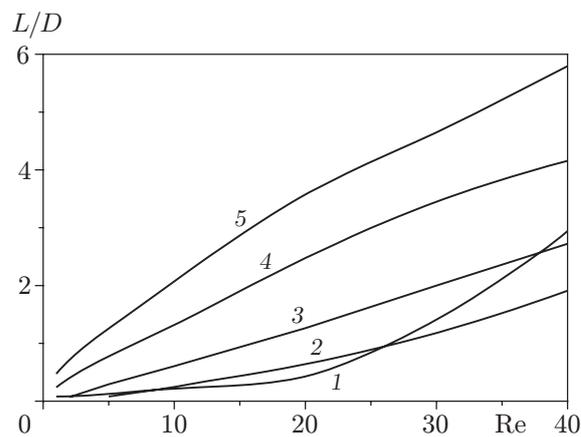


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость длины вихревого следа от числа Рейнольдса при различных значениях показателя степени:

1 —  $n = 0,1$ , 2 —  $n = 0,5$ , 3 —  $n = 1,0$ , 4 —  $n = 1,6$ , 5 —  $n = 2,0$

Влияние показателя степени на коэффициент сопротивления уменьшается при увеличении числа Рейнольдса, при  $Re = 20$  коэффициент сопротивления перестает зависеть от показателя степени.

Длина вихревого следа нелинейно зависит от числа Рейнольдса и показателя степени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Zdravkovich M. M.** Flow around circular cylinders. Oxford: Oxford Univ. Press, 1997. V. 1.
2. **White F.** Viscous fluid flow. 3rd ed. N. Y.: McGraw-Hill, 2006.
3. **Panton R. L.** Incompressible flow. 3rd ed. New Jersey: Wiley, 2005.
4. **Glauert H.** Wind tunnel interference on wings, bodies and airscrews // Aeronaut. Res. Council. Repts Mem. 1933. N 1566.
5. **Maskell E. C.** A theory of the blockage effects on bluff bodies and stalled wings in a closed wind tunnel // Aeronaut. Res. Council. Repts Mem. 1963. N 3400.
6. **Najjar F. M., Vanka S. P.** Simulations of the unsteady separated flow past a normal flat plate // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1995. V. 21. P. 525–547.
7. **Babenko K. I., Vedenskaya N. D., Orlova M. G.** Calculation of stationary viscous liquid flow past a circular cylinder // Comput. Math. Math. Phys. 1975. V. 15, N 1.
8. **Fornberg B.** A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. P. 819–855.
9. **Lange C. F., Durst F., Breuer M.** Momentum and heat transfer from cylinders in laminar cross flow at  $10^{-4} \leq Re \leq 200$  // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1998. V. 41. P. 3409–3430.
10. **Stojkovich D., Breuer M., Durst F.** Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder // Phys. Fluids. 2002. V. 14. P. 3160–3178.
11. **Posdziech O., Grundmann R.** A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of the two-dimensional flow over a circular cylinder // J. Fluids Structures. 2007. V. 23. P. 479–499.
12. **Sivakumar P., Bharti R. P., Chhabra R. P.** Steady flow of power-law fluids across an unconfined elliptical cylinder // Chem. Engng Sci. 2007. V. 62. P. 1682–1702.
13. **Sen S., Mittal S., Biswas G.** Steady separated flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 2009. V. 620. P. 89–119.
14. **Franke R., Rodi W., Schonung B.** Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders // J. Wind Engng Industr. Aerodynam. 1990. V. 35. P. 237–257.
15. **Kelkar K. M., Patankar S. V.** Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1992. V. 14. P. 327–341.
16. **Sohankar A., Norberg C., Davidson L.** Low — Reynolds number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1998. V. 26. P. 39–56.
17. **Sharma A., Eswaran V.** Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar regime // Numer. Heat Transfer. 2004. V. 45. P. 247–269.
18. **Dhiman A. K., Chhabra R. P., Eswaran V.** Steady flow of power-law fluids across a square cylinder // Chem. Engng Res. Design. 2006. V. 84. P. 300–310.
19. **Dhiman A. K., Anjaiah N., Chhabra R. P., Eswaran V.** Mixed convection from a heated square cylinder to Newtonian and power law fluids // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 2007. V. 129. P. 506–513.
20. **Sahu A. K., Chhabra R. P., Eswaran V.** Two-dimensional unsteady laminar flow of a power law fluid across a square cylinder // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2009. V. 160. P. 157–167.

21. **Rao P. K., Sahu A. K., Chhabra R. P.** Momentum and heat transfer from a square cylinder in power-law fluids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 390–403.
22. **Rao P. K., Sasmal C., Sahu A. K., et al.** Effect of power-law fluid behavior on momentum and heat transfer characteristics of an inclined square cylinder in steady flow regime // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 2854–2867.
23. **Islam S. U., Zhou C. Y., Shah A., Xie P.** Numerical simulation of flow past rectangular cylinders with different aspect ratios using the incompressible lattice Boltzmann method // J. Mech. Sci. Technol. 2012. V. 26. P. 1027–1041.
24. **Krishnan S., Kannan A.** Effect of blockage ratio on drag and heat transfer from a centrally located sphere in pipe flow // Engng Appl. Comput. Fluid Mech. 2010. N 4. P. 396–414.
25. **Dhiman A. K., Chhabra R. P., Eswaran V.** Flow and heat transfer across a confined square cylinder in the steady flow regime: Effect of Peclet number // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2005. V. 48. P. 4598–4614.
26. **Yoon D-H., Yang K-S., Choi C-B.** Flow past a square cylinder with an angle of incidence // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 043603.
27. **White F.** Fluid mechanics. 4th ed. N. Y.: McGraw-Hill, 1998.
28. **Denier J. P., Dabrowski P. P.** On the boundary-layer equations for power-law fluids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. V. 460. P. 3143–3158.
29. **Sivakumar P., Bharti R. P., Chhabra R. P.** Effect of power-law index on critical parameters for power-law flow across an unconfined circular cylinder // Chem. Engng Sci. 2006. V. 61. P. 6035–6046.
30. **Wu B., Chen S.** Simulation of non-Newtonian fluid flow in anaerobic digesters // Biotechnol. Bioengng. 2008. V. 99. P. 700–711.
31. **Pantokratoras A.** Further results on non-Newtonian power-law flows past a two-dimensional flat plate with finite length // J. Mech. Sci. Technol. 2013. V. 27. P. 1995–2003.
32. **Pantokratoras A.** Steady laminar assisted mixed convection normally to a heated horizontal plate with finite length // Intern. J. Thermal Sci. 2013. V. 65. P. 158–169.
33. **Sen S., Mittal S., Biswas G.** Flow past a square cylinder at low Reynolds numbers // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2011. V. 67. P. 1160–1174.
34. **Beaudoin A., Huberson S., Rivoalen E.** From Navier — Stokes to Stokes by means of particle methods // J. Comput. Phys. 2006. V. 214. P. 264–283.
35. **Dennis S. C. R., Qiang W., Coutanceau M., Launay J. L.** Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1993. V. 248. P. 605–635.

*Поступила в редакцию 8/X 2013 г.,  
в окончательном варианте — 20/I 2014 г.*

---