

УДК 539.374

## ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТенок БУРЯЩИХСЯ СКВАЖИН В СЖИМАЕМЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ

А. Н. Спорыхин, А. С. Чеботарев

Воронежский государственный университет, 394693 Воронеж

В рамках точных трехмерных уравнений исследована локальная неустойчивость стенок скважин в сжимаемых сложных средах. Вычислительный эксперимент проведен для конкретных материалов. Дана оценка влияния на критические параметры скорости дилатансии, вязкости, гравитационного параметра, коэффициента Пуассона.

Известно, что решение задач горной механики, относящихся к процессу бурения нефтяных и газовых скважин, сводится к постановке и решению задач локальной неустойчивости пород приствольной зоны при упругопластических деформациях [1–4]. Это обусловлено тем, что вокруг вертикальных выработок и скважин напряжения уже на небольших глубинах до 1 км превосходят предел прочности горной породы, в результате она переходит в состояние неупругого деформирования раньше, чем происходит локальная потеря упругой устойчивости. Очевидно также, что для изучения проблемы устойчивости горных выработок необходимо применять более сложные модели, наиболее полно отражающие поведение горных пород [4]. В отличие от [3] в настоящей работе локальная неустойчивость пород приствольной зоны моделируется соотношениями сжимаемого упруговязкопластического тела с трансляционным упрочнением [5–7].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \alpha\sigma + \sqrt{(S_i^j - c(e_i^j)^{p'}) - \eta(\dot{e}_i^j)^{p'}) (S_i^j - c(e_i^j)^{p'} - \eta(\dot{e}_i^j)^{p'})} - \sqrt{2}K, \quad (1)$$

а соотношения ассоциированного закона течения —

$$(\dot{e}_i^j)^{p'} = \xi \left( \frac{\alpha}{3} g_i^j + \frac{S_i^j - c(e_i^j)^{p'} - \eta(\dot{e}_i^j)^{p'}}{\sqrt{2}K - \alpha\sigma} \right). \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — скорость дилатансии;  $c$  — коэффициент упрочнения;  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $K$  — предел текучести;  $(e_i^j)^{p'}$ ,  $(\dot{e}_i^j)^{p'}$  — девиаторы тензоров пластических деформаций и скоростей пластических деформаций;  $\sigma = (1/3)\sigma_k^k$ ;  $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma\delta_i^j$  — девиатор тензора напряжений;  $\delta_i^j$  — символ Кронекера;  $g_i^j$  — фундаментальный тензор;  $\xi$  — положительный множитель. Индексы  $i, j, k$  принимают значения от 1 до 3, индекс  $p'$  обозначает девиаторную часть тензора в пластической области. По повторяющимся индексам производится суммирование. В соотношении (2) учитывается ассоциированная сжимаемость материала, связанная с возникновением в теле сдвиговых пластических деформаций.

Исследование устойчивости основного состояния тела объема  $V$ , характеризуемого вектором перемещения  $\overset{\circ}{u}_i(x_k, t)$ , тензором напряжений  $\overset{\circ}{\sigma}_i^j(x_k, t)$ , вектором объемных  $\overset{\circ}{X}_i$  и поверхностных  $\overset{\circ}{P}_i$  сил, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [8].

Уравнения равновесия для областей пластического  $V^p$  и упругого  $V^e$  деформирования имеют вид

$$\nabla_i(\sigma_j^i + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) + X_j - \rho s^2 u_j = 0, \quad s = i\omega \quad (3)$$

( $\nabla$  — символ ковариантного дифференцирования).

Граничные условия на внешней поверхности  $S_p^p$  (соответственно  $S_p^e$ ) следующие:

$$(\sigma_j^i + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) n_i = p_j, \quad (4)$$

при этом в случае «следящей» нагрузки  $p_j = \overset{\circ}{p}_k \nabla^k u_j$ ,  $X_j = \overset{\circ}{X}_k \nabla^k u_j$ , в случае «мертвой» нагрузки  $p_j = X_j = 0$ . Здесь и далее верхний индекс  $p$  обозначает величины, относящиеся к пластической области,  $e$  — к упругой области; кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния.

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений в пластической и упругой областях представима в форме

$$\sigma_j^i = a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_k g_j^k + (1 - g_j^i) g^{\alpha\alpha} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \quad (5)$$

(отсутствует суммирование по  $i, j$ ). В пластической области коэффициенты  $a_{i\alpha}$ ,  $G_j^i$  имеют вид

$$a_{i\alpha} = \frac{E}{1+\nu} \delta_{i\alpha} + \overset{\circ}{f}_{\alpha\alpha} B_{ii} + A_{ii}, \quad G_j^i = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (6)$$

(отсутствует суммирование по  $i, \alpha$ ), где

$$A_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1}{3} \overset{\circ}{\delta}_{ij} - \frac{AB}{(\alpha\alpha)^2 D} \lambda_{ij} - \frac{\overset{\circ}{f}_{ij}}{\alpha\alpha} \right), \quad B_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\overset{\circ}{E}B}{Da\alpha} + \frac{C}{a\alpha} \right) \lambda_{ij}, \quad a = \sqrt{2}K - \alpha\overset{\circ}{\sigma},$$

$$\lambda_{ij} = \frac{3\overset{\circ}{f}_{ij}(2\nu-1)}{\alpha\alpha E} - \frac{\nu+1}{E} \delta_{ij}, \quad A = \overset{\circ}{f}_{ij} \overset{\circ}{j}_{ij}, \quad B = 1 + \frac{1+\nu}{E} C, \quad C = c + s\eta,$$

$$D = \frac{1+\nu}{E} - \frac{3(2\nu-1)BA}{(\alpha\alpha)^2 E}, \quad \overset{\circ}{E} = 1 - \frac{3AC(2\nu-1)}{(\alpha\alpha)^2 E}, \quad \overset{\circ}{j}_{ij} = \overset{\circ}{S}_{ij} - c\overset{\circ}{e}_{ij}^{p'}$$

В упругой области коэффициенты  $a_{i\alpha}$ ,  $G_j^i$  определяются соотношениями (6) при  $A_{ij} = B_{ij} \equiv 0$ , т. е.

$$a_{i\alpha} = (\lambda + 2\mu)g_{i\alpha}, \quad G_j^i = \mu. \quad (7)$$

В уравнениях (6), (7)  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Заметим, что представление (5) возможно только в случае однородного докритического состояния или зависимости его от одной переменной.

Условия непрерывности на упругопластической границе  $\Gamma$  имеют вид

$$[(\sigma_j^i + \overset{\circ}{\sigma}_\alpha^i \nabla^\alpha u_j) n_j] = 0, \quad [u_i] = 0. \quad (8)$$

Уравнения (3)–(8) представляют собой замкнутую систему уравнений для исследования задач устойчивости, когда имеется граница раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении.

Пусть круглая скважина, вертикально проведенная в массиве горных пород, заполнена жидкостью с удельным весом  $\gamma_*$  и испытывает давление на стенки  $q = \gamma_* h$  ( $h$  — глубина).

Давление  $q$  называется противодействием бурового раствора, препятствующим изменению формы и размеров поперечного сечения ствола скважин. Заменяем [9] горный массив со скважиной невесомой бесконечной плоскостью с круговым отверстием радиуса  $a$ , по контуру которого приложено равномерно распределенное давление  $q$ . На бесконечности напряжения в пластине стремятся к  $\gamma_n h$  ( $\gamma_n$  — удельный вес горной породы). Распределение напряжений в нетронутом массиве горных пород принимается гидростатическим:  $p = \gamma_n h$ .

При определении компонент напряженно-деформируемого основного состояния в осесимметричном случае все функции представляются в виде рядов по степеням параметра  $\alpha$  — скорости дилатансии:  $\{\sigma_{ij}, e_{ij}^p, e_{ij}^e, \xi, \dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \{\sigma_{ij}^{(n)}, e_{ij}^{p(n)}, e_{ij}^{e(n)}, \xi^{(n)}, \dots\}$ .

Нулевое приближение соответствует несжимаемому упруговязкопластическому массиву в области  $V^p$  и имеет вид [8]:

— в пластической области ( $a^* < r < 1$ )

$$\sigma_r^{(0)} = -q - \frac{\chi}{c + 2G} \left( 4G \ln \frac{r}{a^*} + \frac{c}{a^{*2}} - \frac{c}{r^2} \right), \quad e_{\theta}^{p(0)} = -\frac{\chi}{c + 2G} \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right),$$

$$\sigma_{\theta}^{(0)} = -\tilde{q} - \frac{\chi}{c + 2G} \left( 4G + 4G \ln \frac{r}{a^*} + \frac{c}{a^{*2}} + \frac{c}{r^2} \right), \quad u^{(0)} = \frac{\chi}{2Gr}, \quad \chi = \text{sign}(q - p);$$

— в упругой области ( $1 < r < \infty$ )

$$\sigma_r^{(0)} = -p + \frac{\chi}{r^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)} = -p - \frac{\chi}{r^2}, \quad u^{(0)} = \frac{\chi}{2Gr}.$$

Здесь все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к  $k = \sqrt{2}K/2$ , а имеющие размерность длины — к радиусу  $r_s^{(0)}$  упругопластической границы в нулевом приближении. Величина  $a^* = a/r_s^{(0)}$  определяется из уравнения  $|q - p|(c + 2G) - 2G + 4G \ln a^* - c/a^{*2} = 0$ .

Первое приближение запишем в виде соотношений:

— в пластической области ( $a^* < r < 1$ )

$$\sigma_r^{(1)} = C_2 + \tilde{B} \ln r + \frac{\tilde{C}}{2r^2} + \tilde{D} (\ln r)^2 - \tilde{E} \left( \frac{\ln r}{2r^2} + \frac{1}{4r^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = C_2 + \tilde{B} \ln r + \tilde{B} + \frac{\tilde{C}}{2r^2} + \tilde{D} \ln r \left( \frac{1}{2} \ln r + 1 \right) - \tilde{E} \left( \frac{1}{4r^2} - \frac{\ln r}{2r^2} + \frac{1}{4r^2} \right), \quad (9)$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{c + 2G} \left( \frac{\ln r}{r} - \frac{r}{2} \right) + \frac{C_1}{r};$$

— в упругой области ( $1 < r < \infty$ )

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{C_3}{r^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(1)} = -\frac{C_3}{r^2}, \quad u^{(1)} = \frac{C_3}{2Gr}, \quad (10)$$

где

$$\tilde{B} = 2qA + A^2 + \frac{A^2 c}{2a^{*2}} - 2A^2 \ln a^*, \quad \tilde{C} = C_1 A c - \frac{A c}{2c + 4G}, \quad \tilde{D} = 2A^2, \quad \tilde{E} = \frac{A c}{2c + 4G},$$

$$\tilde{C}_1 = \left( 2G + A c \frac{1 - a^{*2}}{2a^{*2}} \right)^{-1} \left( \frac{G}{c + 2G} + \frac{A c (1 - a^{*2})}{2a^{*2} (c + 2G)} + \tilde{B} \ln a^* - \tilde{E} \left( \frac{\ln a^*}{2a^{*2}} - \frac{1}{4a^*} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\tilde{D}}{2} (\ln a^*)^2 \right),$$

$$C_2 = -\frac{\tilde{C}}{2a^{*2}} - \tilde{B} \ln a^* + \tilde{E} \left( \frac{\ln a^*}{2a^{*2}} + \frac{1}{4a^*} \right) - \frac{\tilde{D}}{2} (\ln a^*)^2, \quad C_3 = \frac{G}{c + 2G} - 2G C_1.$$

Уравнение для радиуса  $r_{s1}$  пластической границы в первом приближении имеет вид

$$r_{s1} = (\sigma_{\theta}^{(1)e} - \sigma_{\theta}^{(1)p}) / \left( \frac{d\sigma_{\theta}^{(1)p}}{dr} - \frac{d\sigma_{\theta}^{(1)e}}{dr} \right) \Big|_{r=1} = - \frac{\sigma_{\theta}^{(1)e} - \sigma_{\theta}^{(1)p}}{8G} (c + 2G) \Big|_{r=1}. \quad (11)$$

Для определения нулевого и первого приближений использованы уравнения равновесия, условие пластичности (1), соотношения ассоциированного закона пластического течения (2), соотношения, связывающие полные, упругие и пластические деформации, общие уравнения теории упругости, граничные условия, а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях.

Согласно (4) граничные условия на поверхности скважины и условия затухания возмущений при  $r \rightarrow \infty$  запишем в виде

$$\left( a_{11}u_{,r} + a_{12}\frac{1}{r}v_{,\theta} + a_{12}\frac{1}{r}u + a_{13}w_{,z} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (rv_{,r} + u_{,\theta} - v) \Big|_{r=a} = 0, \quad (w_{,r} + u_{,z}) \Big|_{r=a} = 0, \\ u \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad v \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad w \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Условия сопряжения (8) на упругопластической границе  $r_s$  для амплитуд возмущений перемещений и напряжений согласно (5) принимают вид

$$[u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [w] = 0, \quad \left[ a_{12}\frac{1}{r}u + (a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_1)u_{,r} + a_{12}\frac{1}{r}v_{,\theta} + a_{13}w_{,z} \right] = 0, \\ \left[ G_3^1u_{,z} + (G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1)w_{,z} \right] = 0, \quad \left[ G_2^1u_{,\theta} + (G_2^1 + 2\overset{\circ}{\sigma}_1)v + (G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1)rv_{,r} \right] = 0. \quad (12)$$

В квазистатической постановке уравнения (3) с учетом (5) приводятся к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами:

$$u \left( \frac{1}{r}a_{12,1} - \frac{1}{r^2}(a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + u_{,r} \left( a_{11,1} - \frac{1}{r}(a_{12} + a_{11} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + u_{,rr}(a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_r) + \\ + u_{,\theta\theta}\frac{1}{r^2}(G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) + u_{,zz}(G_1^3 + \overset{\circ}{\sigma}_z) + v_{,\theta} \left( \frac{1}{r}a_{12,1} - \frac{1}{r^2}(G_1^2a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + \\ + v_{,r\theta}\frac{1}{r}(G_1^2 + a_{12}) + w_{,z} \left( a_{13,1} + \frac{1}{r}(a_{13} - a_{23}) \right) + w_{,rz}(G_1^3 + a_{13}) = 0, \\ u_{,\theta} \left( G_{2,1}^1 + \frac{1}{r}(a_{22} + G_1^2 + 2\overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + u_{,r\theta}(a_{21} + G_2^1) + \\ + v \left( -G_{2,1}^1 + \frac{1}{r}(-G_1^1 + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + v_{,r}r(G_{2,1}^1 + G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) + v_{,rr}r(G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_z) + \\ + v_{,\theta\theta}\frac{1}{r}(a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) + v_{,zz}r(G_2^3 + \overset{\circ}{\sigma}_z) + w_{,\theta z}(G_2^3 + a_{23}) = 0, \\ u_{,z} \left( G_{3,1}^1 + \frac{1}{r}(a_{32} + G_3^1) \right) + u_{,rz}(a_{31} + G_3^1) + v_{,\theta z}\frac{1}{r}(a_{32} + G_3^2) + \\ + w_{,r} \left( G_{3,1}^1 + \frac{1}{r}(G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) \right) + w_{,rr}(G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_r) + w_{,\theta\theta}\frac{1}{r^2}(G_3^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{\theta}) + w_{,zz}(a_{33} + \overset{\circ}{\sigma}_z) = 0.$$

В упругой области также выполняются уравнения равновесия (13), где для коэффициентов  $a_{i\alpha}$ , определенных из (6), как отмечено выше, необходимо положить  $A_{ij} = B_{ij} \equiv 0$ .

Решение уравнений (13) будем искать в виде  $u = A^p(r) \cos(m\theta) \cos(nz)$ ,  $v = B^p(r) \sin(m\theta) \cos(nz)$ ,  $w = C^p(r) \cos(m\theta) \sin(nz)$ , где  $m$ ,  $n$  — параметры волнообразования.

Используя функции  $A^p, B^p, C^p$ , запишем систему уравнений (13) следующим образом:

$$\begin{aligned} A^p \xi_1 + A'^p \xi_2 + A''^p \xi_3 + B^p \xi_4 + B'^p \xi_5 + C^p \xi_6 + C'^p \xi_7 &= 0, \\ A^p \xi_8 + A'^p \xi_9 + B^p \xi_{10} + B'^p \xi_{11} + B''^p \xi_{12} + C^p \xi_{13} &= 0, \\ A^p \xi_{14} + A'^p \xi_{15} + B^p \xi_{16} + C^p \xi_{17} + C'^p \xi_{18} + C''^p \xi_{19} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Штрихи у функций  $A(r), B(r), C(r)$  обозначают порядок производных по  $r$ .

Для области  $V^e$  в системе (14) функции  $A^p, B^p, C^p$  необходимо заменить на  $A^e, B^e, C^e$ .

Граничные условия при  $r = a$  и условия затухания возмущений при  $r \rightarrow \infty$  принимают вид

$$\begin{aligned} A^p a_{12} \frac{1}{r} + A'^p a_{11} + B^p m \frac{1}{r} a_{12} + C^p n a_{13} = 0, \quad A^p m + B^p - B'^p r = 0, \quad A^p n - C'^p = 0, \\ A^e(r) \rightarrow 0, \quad B^e(r) \rightarrow 0, \quad C^e(r) \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Условия сопряжения (12) на упругопластической границе  $r_s$  имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{a_{12}}{r} + A'(a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_1^1) + B \frac{m a_{12}}{r} + C n a_{13} = 0, \\ -A m G_2^1 + B(2\overset{\circ}{\sigma}_1^1 - G_2^1) + B' r (G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1) = 0, \quad -A n G_3^1 + C'(G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

В соотношениях (14)–(16) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \frac{a_{12,1}}{r} - \frac{a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} (G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2) - n^2 (G_1^3 + \overset{\circ}{\sigma}_3^3), \quad \xi_2 = a_{11,1} + \frac{a_{12} + a_{11} - a_{21} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r}, \\ \xi_3 = a_{11} + \overset{\circ}{\sigma}_1^1, \quad \xi_4 = m \left( \frac{a_{12,1}}{r} - \frac{G_1^2 + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r^2} \right), \quad \xi_5 = \frac{m}{r} (G_1^2 + a_{12}), \\ \xi_6 = n \left( a_{13,1} + \frac{a_{13} - a_{23}}{r} \right), \quad \xi_7 = n (G_3^1 + a_{13}), \quad \xi_8 = m \left( G_{2,1}^1 + \frac{G_1^2 + a_{22} + 2\overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} \right), \\ \xi_9 = -m (G_1^2 + a_{21}), \quad \xi_{10} = - \left( G_{2,1}^1 + \frac{G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} + m^2 \frac{a_{22} + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r} + n^2 r (G_2^3 + \overset{\circ}{\sigma}_3^3) \right), \\ \xi_{11} = r G_{2,1}^1 + G_1^2 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2, \quad \xi_{12} = r (G_2^1 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2), \quad \xi_{13} = -m n (a_{23} + G_3^3), \\ \xi_{14} = -n \left( G_{3,1}^1 + \frac{G_3^1 + a_{32}}{r} \right), \quad \xi_{15} = -n (G_3^1 + a_{31}), \quad \xi_{16} = \frac{-m n}{r} (G_3^2 + a_{32}), \\ \xi_{17} = \frac{-m^2}{r} (\overset{\circ}{\sigma}_2^2 + G_3^2) - n^2 (\overset{\circ}{\sigma}_3^3 + a_{23}), \quad \xi_{18} = G_{3,1}^1 + \frac{G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_2^2}{r}, \quad \xi_{19} = G_3^1 + \overset{\circ}{\sigma}_1^1. \end{aligned} \tag{17}$$

Для коэффициентов  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, 17$ ) в области  $V^p$  параметры  $\overset{\circ}{\sigma}_r, \overset{\circ}{\sigma}_\theta, \overset{\circ}{\sigma}_z$  определяются по формулам (9),  $a_{ij}$  и  $G_j^i$  — по (6), в области  $V^e$  — по формулам (10) и (7) соответственно.

Поскольку точное аналитическое решение краевой задачи (14)–(17) найти не удается, будем искать приближенное решение методом конечных разностей. Метод основан на замене производных от функций  $A(r), B(r), C(r)$  конечно-разностными выражениями. В результате получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричной форме:  $\{X_{ij}\}\{Y_i\} = \{0\}$ . Отсюда следует, что определение критических параметров (нагрузок) сводится к разрешимости матричного уравнения

$$\det\{X_{ij}\} = 0. \tag{18}$$

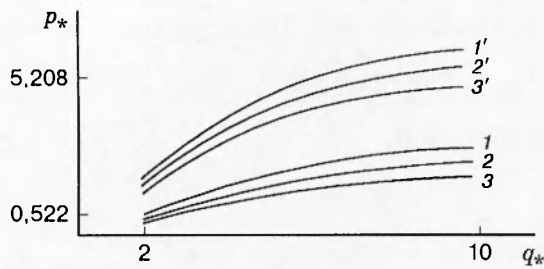


Рис. 1

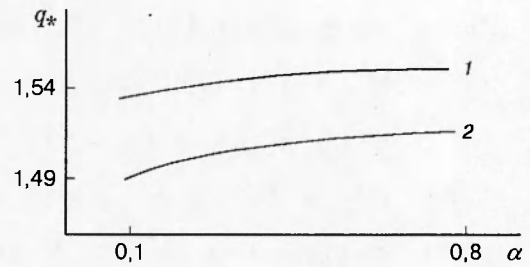


Рис. 2

При вычислении определителя наряду с напряженно-деформируемым докритическим состоянием (см. (9), (10)) для каждой области необходимо учитывать уравнение (11), определяющее положение упругопластической границы. Минимизация должна проводиться по шагу разностной сетки  $h$ , параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$  и величине  $s$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $p$  в зависимости от  $s, m, n$  при условии  $F(p, s, m, n, \lambda_j) = 0$ .

Задача определения критической нагрузки при фиксированных значениях  $h$  и параметрах  $\lambda_j$  решалась в два этапа. На первом этапе определялась область в пространстве параметров  $p, s, m, n$ , в которой происходит смена знака функции  $F(p, s, m, n, h, \lambda_j)$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < p < 1$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ , на втором согласно (18) вычисляется значение  $p_* = \min_{s, m, n} p(s, m, n)$ , при котором  $F(p_*, s_*, m_*, n_*, h, \lambda_j) = 0$ . Оптимизация по параметру  $h$  проводилась следующим образом. Вычисление критической нагрузки прекращается, если после уменьшения шага разностной сетки в 2 раза получаемые значения нагрузки отличаются друг от друга с заданной точностью. Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1–3.

На рис. 1 приведена зависимость критического давления  $p_*$  от гравитационного параметра  $q_*$  при  $E/k = 100$ ,  $\eta_0 = 0,1$ ,  $c_0 = 0,1$ . Кривые 1–3 соответствуют  $\nu = 0,3$ ; 1'–3' —  $\nu = 0,5$ ; кривые 1, 1' —  $\alpha = 0,1$ ; 2, 2' —  $\alpha = 0,4$ ; 3, 3' —  $\alpha = 0,8$ . С ростом гравитационного параметра величина критического давления увеличивается, с ростом коэффициента Пуассона она увеличивается существенно (на 10–15%).

На рис. 2 представлена зависимость критического значения гравитационного параметра  $q_*$  для свободной выработки (значения нагрузки на бесконечности, при котором свободная выработка начинает терять устойчивость) от скорости дилатансии  $\alpha$  при  $E/k = 100$ ,  $c_0 = 0,1$ ,  $\nu = 0,3$  (кривая 1 соответствует  $\eta_0 = 0,1$ ; 2 —  $\eta_0 = 0,001$ ). Как следует из рис. 2,

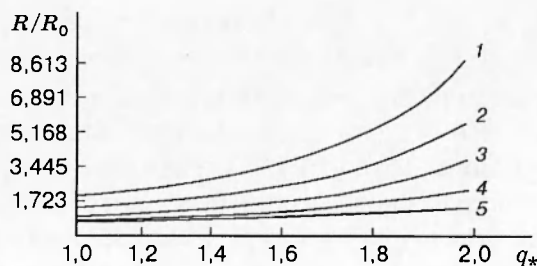


Рис. 3

критическая нагрузка при увеличении вязкости уменьшается, в этом смысле можно говорить о дестабилизирующей роли вязкости в среде.

На рис. 3 приведена зависимость отношения радиуса упругопластической границы  $R$  к радиусу выработки  $R_0$  от гравитационного параметра  $q_*$  для свободной выработки. Кривым 1–5 соответствуют  $\alpha = 0,70; 0,55; 0,40; 0,25; 0,10$  при  $E/k = 100$ ,  $\eta_0 = 0,1$ ,  $c_0 = 0,1$ ,  $\nu = 0,3$ . Видно, что радиус упругопластической границы возрастает с ростом гравитационного параметра и увеличением скорости дилатансии. Кривые на рис. 1–3 отвечают безразмерным значениям механических параметров материалов, близких по свойствам к горным породам аллгериту и углю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость вертикальных выработок в упрочняющихся пластических средах // Прикл. механика. 1974. Т. 10, вып. 11. С. 76–80.
2. Спорыхин А. Н. К устойчивости горизонтальных подземных выработок в массивах, обладающих упруговязкопластическими свойствами // Изв. АН КазССР. 1975. № 1. С. 67–72.
3. Алимжанов М. Т. Об устойчивости стенок бурящихся скважин // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела. Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. С. 3–13.
4. Алимжанов М. Т. Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Успехи механики. 1990. Т. 13, вып. 3. С. 21–57.
5. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.
6. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1971.
7. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
8. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1997.
9. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977.

*Поступила в редакцию 20/III 1998 г.*