ПМТФ, № 6, 1973

УДК 534.24

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРЕНИЯ ПОРОХА В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С НЕАДИАБАТИЧЕСКИМ ПЛАМЕНЕМ

Ю. А. Гостинцев, $\boxed{\text{П. Ф. Похил}}$, *Л. А. Суханов*

(Москва)

Получен критерий устойчивости горения пороха с учетом влияния процессов в газовой фазе. Показано, что учет эффектов неадиабатического пламени приводит к снижению запаса устойчивости горения и к уменьшению собственной частоты колебаний. Физически найденные эффекты объясняются излучением части энергии из зоны горения с тепловыми и акустическими волнами.

В [1] рассматривалась внутренняя неустойчивость стационарного горения пороха в пренебрежении эффектами, связанными с существованием пламени и наличием обратной связи между возмущениями давления p в газе и скоростью горения u_s.

Был найден критерий устойчивости горения и установлена величина собственной частоты прогретого слоя конденсированной фазы (k-фазы).

Здесь в пределах феноменологической теории нестационарного горения пороха с неадиабатическим пламенем (неадиабатичность понимается в том смысле, что имеет место поток тепла из пламени в k-фазу и тепловыделение в пламени зависит от давления [2]) анализируется устойчивость горения с учетом влияния газовой фазы. В связанной с поверхностью горения подвижной системе координат общая система описывающих процесс уравнений имеет вид [3] для k-фазы

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u_s \frac{\partial T}{\partial x} \quad (-\infty < x \leqslant 0) \tag{1}$$

$$T = T_s \quad \text{при} \quad x = 0, \quad T \to T_0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

$$T = T_0 + (T_s^\circ - T_0) \exp(u^\circ{}_s x / \varkappa_s), \quad T_s = T_s^\circ, \quad u_s = u_s^\circ,$$

$$T_F = T_F^\circ \quad \text{при} \quad t = 0$$

$$u_s = u_s(p, \varphi_s), \quad T_s = T_s(p, \varphi_s) \quad (\varphi_s = (\partial T / \partial x)_{0-})$$

для газа над пламенем ($\infty > x \geqslant 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = \rho R T_g \tag{2}$$

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + u \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h u) = 0$$

$$T_F = T_F(p, \varphi_s), \quad h = h(p, \varphi_s),$$

$$(\rho u)_s = (\rho u)_F = \rho (u_s + u_g) \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$p = p^\circ, \quad \rho = \rho^\circ, \quad u^\circ = u_s^\circ + u_g^\circ, \quad T_g = T_F^\circ, \quad h = h_F^\circ \quad \text{при} \quad t = 0$$

При написании уравнений для газовой фазы предполагается, что за пламенем отсутствуют химические реакции и продукты химически «заморожены» (h — химическая энтальпия продуктов горения).

Пусть один из параметров, определяющих горение в газе или в $к$-фазе, получает малое отклонение Δ от его стационарного значения.

Исследуем устойчивость стационарного решения системы (1), (2). Введем безразмерные величины

$$\pi = p / p^\circ, \quad w = u / u^\circ, \quad \vartheta_g = T_g / T_F^\circ, \quad i_x = h / h^\circ, \quad M = u^\circ / c^\circ \; (c^{\circ 2} = \gamma p^\circ / \rho^\circ)$$

Исключая из (2) плотность, получим для возмущений линеаризованную систему уравнений в продуктах горения

$$(3) \qquad \frac{\partial \delta\pi}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} + u^\circ \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta\vartheta_g}{\partial t} - u^\circ \frac{\partial \delta\vartheta_g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{c^{\circ 2}}{\gamma u^\circ} \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\vartheta_g + u^\circ \frac{\partial}{\partial x} \delta\vartheta_g - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial \delta\pi}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta i_x + u^\circ \frac{\partial}{\partial x} \delta i_x = 0$$

Будем искать решение (3) в виде $\delta z_j = \Delta Z_j \exp i\omega t$. Тогда

$$(4) \qquad u^\circ \frac{d\Pi}{dx} = \frac{i\omega M^2}{M^2 - 1} (\gamma W - \Pi), \quad u^\circ \frac{dW}{dx} = \frac{i\omega}{M^2 - 1} \left(\frac{\Pi}{\gamma} - M^2 W \right)$$

$$u^\circ \frac{d\Theta}{dx} = \frac{i\omega (\gamma - 1)}{\gamma (M^2 - 1)} (M^2 \gamma W - \Pi) - i\omega\Theta, \quad u^\circ \frac{dI_x}{dx} = - i\omega I_x$$

Частные решения (4) представляются волнами вида $Z_j = | Z_j | \exp k_j x$. Для определения амплитуд $| Z_j |$ и волновых векторов k_j имеем систему уравнений

$$(5) \qquad |\Pi| \left(u^\circ k + \frac{M^2\omega}{M^2 - 1} \right) - \frac{M^2 \gamma \omega}{M^2 - 1} |w| = 0, \quad |I_x| (k u^\circ + \omega) = 0$$

$$- |\Pi| \frac{\omega}{\gamma (M^2 - 1)} + |W| \left(k u^\circ + \frac{M^2 \omega}{M^2 - 1} \right) = 0$$

$$|W| \frac{(\gamma - 1) M^2 \omega}{M^2 - 1} - |\Theta| (k u^\circ + \omega) - |\Pi| \frac{(\gamma - 1) \omega}{\gamma (M^2 - 1)} = 0$$

Разрешая характеристический определитель (5), находим

$$(6) \qquad k_1 = - \frac{\omega}{c^\circ + u^\circ}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c^\circ - u^\circ}, \quad k_3 = k_4 = - \frac{\omega}{u^\circ}$$

Здесь k_1 — волновой вектор уходящей волны, k_2 — волновой вектор падающей волны, k_3, k_4 — волновые векторы индуцированных волн температуры и химической энтальпии.

С учетом (6) общее решение (3) записывается в виде

$$(7) \qquad \delta\pi = \Delta \gamma M e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} - C_2 e^{ik_2 x})$$

$$\delta w = \Delta e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x})$$

$$\delta\vartheta_g = \Delta (\gamma - 1) M e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} - C_2 e^{ik_2 x}) + \Delta C_3 e^{i\omega t + ik_3 x}$$

$$\delta i_x = \Delta C_4 e^{i\omega t + ik_4 x}$$

Поскольку падающая волна отсутствует (рассматривается только внутренняя устойчивость процесса), то $C_2 = 0$ и общее решение (7) должно содержать только уходящие от поверхности горения волны. Оно имеет вид (волна химической энтальпии выражается независимо, на устойчивость не влияет и далее не рассматривается)

$$(8) \qquad \delta\pi = \Delta \gamma M C_1 e^{i\omega t + ik_1 x}, \quad \delta w = \Delta C_1 e^{i\omega t + ik_1 x}$$

$$\delta\vartheta_g = \Delta (\gamma - 1) M C_1 e^{i\omega t + ik_1 x} + \Delta C_3 e^{i\omega t + ik_3 x}.$$

Введем новые безразмерные переменные, более удобные для решения системы (1), описывающей собственно горение пороха

$$\xi = \frac{u_s^\circ}{\varkappa_s} x, \quad \tau = \frac{u_s^{\circ 2}}{\varkappa_s} t, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_s^\circ - T_0}, \quad v = \frac{u_s}{u_s^\circ}, \quad \Omega = \frac{\varkappa_s}{u_s^{\circ 2}} \omega$$

$$\zeta_{1,2,3} = \frac{\varkappa_s}{u_s^\circ} k_{1,2,3}, \quad \varphi = \frac{\varphi_s}{\varphi_s^\circ}$$

Тогда (8) примет вид

(9)
$$\delta\pi = \Delta |\Pi| e^{i\Omega\tau + i\zeta_1\xi} \quad (|\Pi| = \gamma M C_1)$$

$$\delta w = \frac{\Delta |\Pi|}{\gamma M} e^{i\Omega\tau + i\zeta_1\xi}$$

$$\delta\vartheta_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \delta\pi + \Delta C_3 e^{i\Omega\tau + i\zeta_3\xi}$$

Линеаризуя (1), получим

(10)
$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial\xi} \delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial\tau} \delta\vartheta = e^\xi \delta v$$

$$\delta\vartheta(\xi \to \infty) = 0, \quad \delta\vartheta(\xi = 0, \tau) = \delta\vartheta_s, \quad \delta\vartheta(\xi, \tau = 0) = 0$$

$$\delta\vartheta_s = \left(\frac{\partial\vartheta_s}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial\vartheta_s}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

$$\delta\vartheta_F = \left(\frac{\partial\vartheta_F}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial\vartheta_F}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

$$\delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

Так как давление на поверхности горения изменяется по закону $\delta\pi \sim \sim \exp i\Omega\tau$, то решения (10) следует искать среди функций такого же вида. Согласно [2] для комплексных амплитуд можно найти

(11)
$$V = V_1 |\Pi|, \quad V_1 = \frac{\nu + \delta(\alpha - 1)}{1 - k + (\alpha - 1)(r - ik/\Omega)}$$

$$\varepsilon\Theta_F = |\Pi| \left(s - \nu\frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1\right), \quad \alpha = {}^1/_2 (1 + \sqrt{1 + 4i\Omega})$$

Здесь

$$\nu = \left(\frac{\partial \ln u_s^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0}, \quad k = (T_s^0 - T_0)\left(\frac{\partial \ln u_s^\circ}{\partial T_0}\right)_p, \quad r = \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial T_0}\right)_p$$

$$\mu = \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0} (T_s^\circ - T_0)^{-1}, \quad s = \left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0},$$

$$q = (T_s^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial T_0}\right)_p$$

$$\delta = \nu r - \mu k, \quad \varepsilon = (T_s^\circ - T_0) / T_F^\circ$$

Параметры ν, k, r, μ, s, q, δ определяют свойства реакционных зон в пламени в k-фазе пороха.

Постоянные $|\Pi|$ и C_3 в (9) и (11) находятся из условия «сшивки» решений на пламени

$$\delta\vartheta_g = \delta\vartheta_F, \quad \delta w_F = \delta w_g$$

С учетом уравнений состояния и сохранения массы найдем

(12)
$$|\Pi| \left(1 - \nu\frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) - C_3 = 0$$

$$|\Pi| \left[V_1 \left(1 + \frac{q}{k}\right) + s - \nu\frac{q}{k} - 1 - \frac{1}{\gamma M}\right] = 0$$

Из (12) следует характеристическое уравнение:

$$\begin{bmatrix} s-\nu\frac{q}{k}+\frac{q}{k}V_1-\frac{\gamma-1}{\gamma}, & -1 \\ V_1\left(1+\frac{q}{k}\right)+s-\nu\frac{q}{k}-1-\frac{1}{\gamma M}, & 0 \end{bmatrix}=0$$

Используя выражение для V_1 из (11), найдем отсюда

(13) $$\left(1-s+\nu\frac{q}{k}+\frac{1}{\gamma M}\right)\frac{1}{1+q/k}=\frac{\nu+\delta(\alpha-1)}{1-k+(\alpha-1)(r-ik/\Omega)}$$

Поскольку $\Omega=\mathrm{Re}\,\Omega+i\mathrm{Im}\,\Omega$, а решение задачи, искалось в виде $\sim\exp i\Omega\tau=\exp[i(\mathrm{Re}\Omega)\tau-(\mathrm{Im}\,\Omega)\tau]$, то условие устойчивости горения равносильно выполнению неравенства $\mathrm{Im}\Omega\geqslant 0$.

Исследуем характеристическое уравнение (13).

Обозначая

$$\sigma=i\Omega\quad(\alpha={}^1/_2(1+\sqrt{1+4\sigma})),\quad a_1=(1-k)\,a_0-\nu\gamma M$$
$$a_2=ra_0-\delta\gamma M,\ a_3=a_0k,\ a_0=[1+\gamma M\,(1-s+\nu q/k)]\,k/$$
$$/(k+q)$$

перепишем (13) в форме

(14) $$(\sqrt{1+4\sigma}-1)(a_2/a_3+1/\sigma)=-2a_1/a_3$$

Величина σ в уравнении (14) в общем случае комплексная ($\sigma=x+iy$) (x, y — вещественные числа), поэтому (14) можно привести к виду

(15) $$a_2{}^2\sigma^2+\sigma\,(2a_2a_3+a_1a_3-a_1{}^2)+a_3{}^2+a_1a_3=0$$

После разделения действительной и мнимой частей из (15) найдем

(16) $$x=a_2{}^2/2\,(2a_2a_3+a_1a_2-a_1{}^2)$$
(17) $$a_2{}^2y^2=a_3{}^2+a_1a_3-a_2^2\,(2a_2a_3+a_1a_2-a_1{}^2)^2/4$$

По определению значение y вещественное. Найдем область параметров, где это требование выполнено. Для этого рассмотрим знак неравенства $(a_3{}^2+a_1a_3)-a_2{}^2\,(2a_2a_3+a_1a_2-a_1{}^2)\,{}^2/4$. Если оно больше нуля, то y — вещественное число, в противном случае — чисто мнимое.

Анализ показывает, что левая часть неравенства отрицательна, если

(18) $$(1-k)\frac{k}{k+q}\left[\left(1-s+\nu\frac{q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\geqslant 0$$

или

$$k\leqslant 1-\frac{\nu(1+k)\gamma M}{(1-s)\gamma M+1}=k_0$$

Таким образом, в области $k<k_0$ характеристическое уравнение (14) не имеет комплексных корней и y — чисто мнимое число, что противоречит его определению. Поэтому в области $k<k_0$ либо корни характеристического уравнения вещественны, либо корней совсем нет. Полагая σ вещественным и положительным (физически это соответствует определению σ как частоты возмущений), рассмотрим решения (14) в области $k<k_0$.

Запишем

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{k+q}{k^2}\left\{\frac{k(1-k)}{k+q}\left[\left(1-s+\nu\frac{q}{k}\right)\gamma M + 1\right] - \nu\gamma M\right\}\times$$
$$\times\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]^{-1}$$
$$\frac{a_2}{a_3} = \left\{\frac{rk}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right] - \delta\gamma M\right\}\times$$
$$\times\frac{(k+q)}{k^2}\left[\left(1+s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]^{-1}$$

Видно, что левая часть (14) при $k < k_0$ отрицательна ($a_1 / a_3 > 0$ в силу (18) и положительности знаменателя). Правая часть (14) всегда положительна, если выполняется неравенство $k > \nu r - r/\gamma M - (1-s)r - \mu k = k_0'$.

При допустимых значениях параметров величина k_0' всегда отрицательна и, следовательно, в области значений $k_0' < k < k_0$ правая и левая части характеристического уравнения имеют противоположные знаки, что означает отсутствие действительных корней.

Таким образом, при $k < k_0$ уравнение (14) не имеет корней и горение устойчиво. При этом критерий устойчивости принимает вид

$$k < k_0 = 1 - \nu(1+q)\gamma M / [1 + (1-s)\gamma M] \tag{19}$$

Исследуем теперь решение характеристического уравнения (14) в комплексной области $(k > k_0)$

$$\sigma = (i\Omega)_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - \frac{a_1}{a_2} - 2\frac{a_3}{a_2} \pm \right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left[\frac{a_1}{a_2} + 2\frac{a_3}{a_2} - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right]^2 - \frac{4(a_3^2 + a_1a_3}{a_2^2}}\right\} \tag{20}$$

В соответствии с определением устойчивости ($\operatorname{Im}\Omega \geqslant 0$) получим критерий

$$(a_1/a_2)^2 - a_1/a_2 - 2a_3/a_2 \leqslant 0$$

Так как в обычных условиях $a_2 > 0$, то $a_1^2 / a_2 - a_1 - 2a_3 \leqslant 0$.

Подставляя сюда значения a_0, a_1, a_2, a_3, можно найти условие устойчивости при $k > k_0$. Окончательно критерий устойчивого горения пороха с учетом влияния газовой фазы записывается в форме при

$$k < 1 - \nu(1+q)\gamma M\ [(1-s)\gamma M + 1]^{-1} = k_0$$

горение устойчиво всегда, а при $k > k_0$ горение устойчиво, только если

$$r\frac{k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right] - \delta\gamma M \geqslant$$
$$\geqslant\left\{(1-k)\frac{k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\right\}^2\times$$
$$\times\left[\frac{(1+k)k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\right]^{-1} \tag{21}$$

Из (20) можно определить собственную частоту тепловых колебаний зоны горения пороха на пределе устойчивости

$$\Omega^* = \left\{\frac{r}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\delta\gamma M\right\}^{-1}\times$$
$$\times\sqrt{(k+q)^{-1}\left[1+\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M\right]\left\{\frac{k}{k+q}\left[1+\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M\right]-\nu\gamma M\right\}} \tag{22}$$

При горении порохов в обычных условиях число Маха мало, поэтому разлагая (19), (21) и (22) в ряд по γM, найдем, что горение устойчиво всегда, если $k < 1 - \nu\gamma M(1+q) = k_0$, а при $k > k_0$ устойчиво, только если

$$r \geqslant \frac{(k-1)^2}{k+1} - (k+q)\,\gamma M\left(\mu + \frac{\nu(1-k)(3+k)}{(1+k)^2}\right)$$

При этом

$$\Omega^* = \frac{\sqrt{k}}{r} + \frac{k+q}{2r\sqrt{k}}\left(-\nu + \frac{2\delta\sqrt{k}}{r}\right)\gamma M$$

В пренебрежении влиянием газовой фазы ($\gamma M = 0$) из приведенных формул следуют результаты исследования устойчивости горения, полученные в [1, 4].

Видно, что влияние газовой фазы приводит к уменьшению как запаса устойчивости горения, так и собственной частоты пороха. Физически это связано с излучением части энергии из зоны горения с акустическими и тепловыми волнами [2].

Поступила 23 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов Б. В.* Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха. ПМТФ, 1965, № 4.
2. *Гостинцев Ю. А., Суханов Л. А., Похил П. Ф.* Теория нестационарного горения пороха. Горение при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1971, № 5.
3. *Гостинцев Ю. А., Суханов Л. А., Похил П. Ф.* К теории взаимодействия горящего пороха с акустическим полем. Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 4.
4. *Зельдович Я. Б.* К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11, 12.