

УДК 532.546+536.24

## Численное моделирование влияния теплообмена пласта-коллектора с вмещающими породами на отбор газа через одиночную скважину

В.Е. Николаев<sup>1</sup>, Г.И. Иванов<sup>1</sup>, И.И. Рожин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГАОУ ВПО Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Институт математики и информатики, ул. Кулаковского, 48, г. Якутск, 677000

<sup>2</sup>Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Октябрьская, 1, г. Якутск, 677980

E-mails: venik60@mail.ru (Николаев В.Е.), ivganya@mail.ru (Иванов Г.И.), rozhin@ipng.ysn.ru (Рожин И.И.)

**Николаев В.Е., Иванов Г.И., Рожин И.И.** Численное моделирование влияния теплообмена пласта-коллектора с вмещающими породами на отбор газа через одиночную скважину // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 337–346.

В вычислительном эксперименте исследовано влияние теплообмена через кровлю и подошву газоносного пласта на динамику полей температуры и давления при отборе реального газа через одиночную скважину. Эксперимент выполнен в рамках модифицированной математической модели неизоэнтальпической фильтрации газа, которая выводится из законов сохранения массы и энергии, а также из закона Дарси. В качестве замыкающих соотношений использованы физическое и калорическое уравнения состояния, а также закон Ньютона–Рихмана, описывающий теплообмен газоносного пласта с окружающими вмещающими породами. Показано, что влияние теплообмена с окружающей средой на температурное поле газоносного пласта локализовано в узкой зоне вблизи кровли и подошвы, хотя со временем размер этой зоны увеличивается.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, неизоэнтальпическая фильтрация, реальный газ, конечно-разностные методы.

**Nikolaev V.E., Ivanov G.I., Rozhin I.I.** Numerical modeling of the influence of heat exchange of reservoir beds with enclosing rocks on gas production from a single well // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 337–346.

In the computational experiment, the influence of heat exchange through top and bottom of the gas-bearing reservoir on the dynamics of temperature and pressure fields in the process of real gas production from a single well is investigated. The experiment was carried out with a modified mathematical model of non-isothermal gas filtration, obtained from the energy and mass conservation laws and the Darcy law. The physical and caloric equations of state together with the Newton–Rihman law of heat exchange of a gas reservoir with surrounding enclosing rocks are used as closing relations. It is shown that the influence of the heat exchange with environment on the temperature field of a gas-bearing reservoir is localized in a narrow zone near its top and bottom, though the size of this zone increases with time.

**Key words:** mathematical modeling, non-isothermal filtration, real gas, finite difference methods.

---

### 1. Постановка задачи

Для математического описания процесса отбора газа через одиночную скважину в случае теплообмена пласта с окружающими вмещающими породами предложенную ранее систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1, 2]

дополним слагаемым, описывающим теплопроводность пласта в направлении, перпендикулярном вектору скорости фильтрации газа к скважине, расположенной в центре кругового пласта, а также воспользуемся допущением о пренебрежимо малом изменении давления в этом направлении. Такое допущение физически оправдано тем, что скважина вскрывает всю мощность пласта, т. е. интенсивность отбора по высоте пласта происходит равномерно, а также тем, что кровля и подошва пласта непроницаемы для газа. В этом случае производной давления по вертикальной координате можно пренебречь. Кроме того, как и в предыдущих публикациях [1, 2], здесь теплопроводность в радиальном направлении считается пренебрежимо малой по сравнению с конвективным переносом. При таких предположениях исходная система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left( \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \right) = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right), \quad \bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \quad \bar{t} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \delta \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \left( 1 + \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{c_p}{R} \frac{\bar{p}}{Z\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{T}}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{T}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right)^2, \quad (2)$$

$$\bar{r}_w < \bar{r} < \bar{r}_k, \quad 0 < \bar{z} < \frac{\bar{h}}{2}, \quad \bar{t} > 0,$$

где

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l}, \quad \bar{r}_w = \frac{r_w}{l}, \quad \bar{r}_k = \frac{r_k}{l}, \quad \bar{t} = \frac{\kappa_p t}{l^2}, \quad \bar{T} = \frac{c_r T}{m p_0},$$

$$\delta = \frac{\kappa}{\kappa_p}, \quad \kappa = \frac{\lambda_r}{c_r}, \quad \kappa_p = \frac{k p_0}{m \mu}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l}.$$

В дальнейшем черта над безразмерными переменными для удобства опускается. Здесь приняты обозначения:  $c_p$  — удельная теплоемкость газа,  $h$  — мощность пласта,  $k$  — коэффициент проницаемости пласта,  $l$  — характерный размер,  $m$  — пористость,  $p$  — давление,  $R$  — газовая постоянная,  $r$  — радиальная координата,  $T$  — температура,  $t$  — время,  $Z$  — коэффициент несовершенства газа,  $z$  — координата по высоте;  $\kappa$ ,  $\kappa_p$ ,  $c_r$ ,  $\lambda_r$  — температуропроводность, пьезопроводность, объемная теплоемкость и теплопроводность насыщенного газом пласта соответственно,  $\mu$  — динамическая вязкость газа; нижние индексы означают: 0 — начальное состояние, k — на контуре питания, w — на стенке скважины.

Рассматривается режим отбора газа с постоянным забойным давлением

$$p = p_w, \quad r = r_w. \quad (3)$$

Внешняя граница пласта считается непроницаемой и теплоизолированной

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = r_k. \quad (4)$$

Ввиду малой мощности газоносного пласта по сравнению с его радиальной протяженностью интенсивность теплообмена через его кровлю и подошву можно считать одинаковой. Тогда, если поместить начало координаты  $z$  на кровлю пласта, линия  $z = h/2$  будет осью симметрии. В этом случае условия теплообмена с окружающими вмещающими породами можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \bar{\alpha}(T - T_0), \quad z = 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = \frac{h}{2}; \tag{6}$$

где  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda_r}$  — число Био,  $\alpha$  — коэффициент теплообмена.

В начальный момент времени давление и температура считаются постоянными:

$$p(r, z, 0) = 1, \quad T(r, z, 0) = T_0, \quad r_w \leq r \leq r_k, \quad 0 \leq z \leq h/2. \tag{7}$$

В качестве уравнения состояния принимается уравнение Латонова–Гуревича [3]:

$$Z = \left( 0.17376 \ln \left( \frac{mp_0}{c_r T_c} T \right) + 0.73 \right)^{\frac{p_0}{p_c} p} + 0.1 \frac{p_0}{p_c} p, \tag{8}$$

где  $T_c, p_c$  — критические температура и давление природного газа, зависящие от его состава.

## 2. Численная реализация модели и ее алгоритм

Для решения начально-краевой задачи (1)–(8), заменяя  $p(r_i, z_j, t_{j0}) = p_{i,j}^{j0}$  и  $T(r_i, z_j, t_{j0}) = T_{i,j}^{j0}$  численными аналогами в узлах сетки, уравнение (1) аппроксимируется чисто неявной абсолютно устойчивой разностной схемой аналогично схеме, которая была выведена для случая плоскопараллельной задачи в работе [4]:

$$\left( \frac{p_{i,j}^{s+1j0+1}}{Z_{i,j}^{s+1j0+1} T_{i,j}^{s+1j0+1}} - \frac{p_{i,j}^{j0}}{Z_{i,j}^{j0} T_{i,j}^{j0}} \right) \frac{r_i}{\tau} = k_{i+1} \left( \frac{p_{i+1,j}^{s+1j0+1} - p_{i,j}^{s+1j0+1}}{h_r^2} \right) - k_i \left( \frac{p_{i,j}^{s+1j0+1} - p_{i-1,j}^{s+1j0+1}}{h_r^2} \right), \tag{9}$$

$$i = \overline{1, n_r - 1}, \quad j = \overline{0, n_z}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1},$$

где  $\tau$  — шаг сетки по времени  $\bar{\omega}_\tau = \{t_{j0} = j0 \cdot \tau, j0 = \overline{0, J0}\}$ ,  $h_r$  — шаг сетки по радиальной

координате  $\bar{\omega}_{h_r} = \{r_i = r_w + i \cdot h_r, i = \overline{0, n_r}\}$ ,  $s$  — шаг итерации,  $k_i^s = \frac{r_{i-1/2}^{s+1j0+1}}{Z_{i-1/2,j}^{s+1j0+1} T_{i-1/2,j}^{s+1j0+1}}$ ,

$$r_{i-1/2} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \quad p_{i-1/2,j}^{s+1j0+1} = \frac{p_{i-1,j}^{s+1j0+1} + p_{i,j}^{s+1j0+1}}{2}, \quad T_{i-1/2,j}^{s+1j0+1} = \frac{T_{i-1,j}^{s+1j0+1} + T_{i,j}^{s+1j0+1}}{2}.$$

Разностная аппроксимация граничного условия (3) имеет вид

$$p_{0,j}^{s+1j0+1} = p_w, \quad j = \overline{0, n_z}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1}. \tag{10}$$

Разностный аналог первого граничного условия (4) записывается со вторым порядком аппроксимации. Чтобы получить разностную схему для внешней границы ( $i = n_r$ ), интегрируем уравнение (1) в элементарной ячейке  $[r_{n_r} - h_r/2, r_{n_r}]$  и находим

$$\left( \frac{p_{n_r,j}^{s+1j0+1}}{Z_{n_r,j}^{s+1j0+1} T_{n_r,j}^{s+1j0+1}} - \frac{p_{n_r,j}^{j0}}{Z_{n_r,j}^{j0} T_{n_r,j}^{j0}} \right) \frac{h_r r_{n_r}}{2\tau} = -k_{n_r} \frac{p_{n_r,j}^{s+1j0+1} - p_{n_r-1,j}^{s+1j0+1}}{h_r}, \tag{11}$$

$$j = \overline{0, n_z}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1}.$$

Пользуясь методом слабой аппроксимации, предложенным Н.Н. Яненко [5], расщепим уравнение (2) по пространственным переменным  $r$  и  $z$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(1 + \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_p}{R} \frac{p}{ZT} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Для получения экономичной разностной схемы построим локально-одномерные схемы. Поскольку функция  $T(r, z, t)$  является достаточно гладкой, то уравнению (12) целесообразно поставить в соответствие безусловно устойчивую неявную разностную схему “уголок” [6] при фиксированном  $j = \overline{0, n_z}$ :

$$\frac{T_{i,j}^{s+1j0+1/2} - T_{i,j}^{j0}}{\tau} = \left(1 + \overset{s}{a}_i T_{i,j}^{s+1j0+1/2}\right) \left(\frac{p_{i,j}^{s+1j0+1} - p_{i,j}^{j0}}{\tau}\right) + \overset{s}{b}_i \left(\frac{T_{i+1,j}^{s+1j0+1/2} - T_{i,j}^{s+1j0+1/2}}{h_r}\right) - \overset{s}{d}_i T_{i,j}^{s+1j0+1/2}, \quad i = \overline{0, n_r - 1}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1}. \quad (14)$$

Для построения разностной схемы по осевой координате методом баланса [7] интегрируем уравнение (13) по  $z \in [z_{j-1/2}, z_{j+1/2}]$  при фиксированном  $i = \overline{0, n_r}$  и находим

$$\frac{T_{i,j}^{s+1j0+1} - T_{i,j}^{s+1j0+1/2}}{\tau} = \delta \left(\frac{T_{i,j+1}^{s+1j0+1} - 2T_{i,j}^{s+1j0+1} + T_{i,j-1}^{s+1j0+1}}{h_z^2}\right), \quad j = \overline{1, n_z - 1}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1}, \quad (15)$$

где  $h_z$  — шаг сетки по осевой координате  $\bar{\omega}_{h_z} = \{z_j = j \cdot h_z, j = \overline{0, n_z}\}$ , под  $T_{i,j}^{j0+1/2}$  подразумевается значение температуры на полуцелом временном слое  $t_{j0+1/2}$ . Переход с одного временного слоя на следующий осуществляется в два этапа: на первом этапе определяется температурное распределение в радиальном направлении; второй этап состоит в пересчете полученных на первом шаге по времени промежуточных результатов с учетом теплообмена в осевом направлении.

С учетом второго условия (4) для внешней границы  $i = n_r$  получим схему

$$\frac{T_{n_r,j}^{s+1j0+1/2} - T_{n_r,j}^{j0}}{\tau} = \left(1 + \overset{s}{a}_{n_r} T_{n_r,j}^{s+1j0+1/2}\right) \left(\frac{p_{n_r,j}^{s+1j0+1} - p_{n_r,j}^{j0}}{\tau}\right) - \overset{s}{d}_{n_r} T_{n_r,j}^{s+1j0+1/2}, \quad j = \overline{0, n_z}, \quad j0 = \overline{0, J0 - 1}. \quad (16)$$

Разностные аналоги граничных условий (5) и (6) записываем соответственно в виде:

$$\frac{T_{i,0}^{s+1j0+1} - T_{i,0}^{s+1j0+1/2}}{\tau} \frac{h_z}{2} = \delta \frac{T_{i,1}^{s+1j0+1} - T_{i,0}^{s+1j0+1}}{h_z} - \delta \alpha \left(T_{i,0}^{s+1j0+1} - T_0\right), \quad (17)$$

$$\frac{T_{i,n_z}^{s+1j0+1} - T_{i,n_z}^{s+1j0+1/2}}{\tau} \frac{h_z}{2} = -\delta \frac{T_{i,n_z}^{s+1j0+1} - T_{i,n_z-1}^{s+1j0+1}}{h_z}. \quad (18)$$

Начальные условия аппроксимируем в виде:

$$p_{i,j}^0 = 1, \quad T_{i,j}^0 = T_0, \quad i = \overline{0, n_r}, \quad j = \overline{0, n_z}. \quad (19)$$

В соотношениях (14) и (16) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \overset{s}{a}_i &= \frac{1}{Z_{i,j}^{s^{j0+1/2}}} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_{i,j}^{j0+1/2}, & \overset{s}{b}_i &= \frac{c_p}{R} \frac{\overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0+1}}{Z_{i,j}^{s^{j0+1/2}} T_{i,j}^{s^{j0+1/2}}} \frac{\overset{s+1}{p}_{i+1,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{i-1,j}^{j0+1}}{2h_r}, \\ \overset{s}{d}_i &= \overset{s}{a}_i \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{i+1,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{i-1,j}^{j0+1}}{2h_r} \right)^2, & \overset{s}{a}_{n_r} &= \frac{1}{Z_{n_r,j}^{s^{j0+1/2}}} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_{n_r,j}^{j0+1/2}, & \overset{s}{d}_{n_r} &= \overset{s}{a}_{n_r} \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{n_r-1,j}^{j0+1}}{h_r} \right)^2. \end{aligned}$$

Для численной реализации разностной задачи (9)–(19) на каждом временном слое воспользуемся методом простых итераций. Итерационный процесс организуем следующим образом:

- а) задаются начальные приближения для  $s = 0$ :  $\overset{0}{p}_{i,j}^{j0+1} = \overset{0}{p}_{i,j}^{j0}$ ,  $\overset{0}{T}_{i,j}^{j0+1} = \overset{0}{T}_{i,j}^{j0}$ ; для  $s \geq 1$ :  
 $\overset{s}{p}_{i,j}^{s^{j0+1}} = \overset{s-1}{p}_{i,j}^{s^{j0+1}}$ ,  $\overset{s}{T}_{i,j}^{s^{j0+1}} = \overset{s-1}{T}_{i,j}^{s^{j0+1}}$ ;
- б) методом прогонки решается линейризованная система трехточечных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений давления в узлах пространственной сетки  $\overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0+1}$  для всех  $j = \overline{0, n_z}$ :

$$\overset{s+1}{p}_{0,j}^{j0+1} = p_w; \quad A_i \overset{s+1}{p}_{i-1,j}^{j0+1} - C_i \overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0+1} + B_i \overset{s+1}{p}_{i+1,j}^{j0+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, n_r - 1};$$

$$A_{n_r} \overset{s+1}{p}_{n_r-1,j}^{j0+1} - C_{n_r} \overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0+1} = -F_{n_r};$$

где  $A_i = \frac{\overset{s}{k}_i}{h_i^2}$ ,  $B_i = \frac{\overset{s}{k}_{i+1}}{h_i^2}$ ,  $C_i = \frac{\overset{s}{k}_i}{h_i^2} + \frac{\overset{s}{k}_{i+1}}{h_i^2} + \frac{r_i}{\tau Z_{i,j}^{s^{j0+1}} T_{i,j}^{s^{j0+1}}}$ ,  $F_i = \frac{r_i \overset{s}{p}_{i,j}^{j0}}{\tau Z_{i,j}^{s^{j0}} T_{i,j}^{s^{j0}}}$ ,  $F_{n_r} = \frac{h_r r_{n_r} \overset{s}{p}_{n_r,j}^{j0}}{2\tau Z_{n_r,j}^{s^{j0}} T_{n_r,j}^{s^{j0}}}$ ,

$$C_{n_r} = \frac{\overset{s}{k}_{n_r}}{h_r} + \frac{h_r r_{n_r}}{2\tau Z_{n_r,j}^{s^{j0+1}} T_{n_r,j}^{s^{j0+1}}};$$

- в) при найденных значениях давления определяется промежуточное значение  $\overset{s+1}{T}_{i,j}^{j0+1/2}$  для всех  $j = \overline{0, n_z}$ :

$$\overset{s+1}{T}_{n_r,j}^{j0+1/2} = \left( \frac{\overset{s+1}{T}_{n_r,j}^{j0}}{\tau} + \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0}}{\tau} \right) \right) / \left( \frac{1}{\tau} - \overset{s}{a}_{n_r} \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{n_r,j}^{j0}}{\tau} \right) + \overset{s}{d}_{n_r} \right);$$

$$\overset{s+1}{T}_{i,j}^{j0+1/2} = \frac{\left( \frac{\overset{s+1}{T}_{i,j}^{j0}}{\tau} + \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0}}{\tau} + \overset{s}{b}_i \frac{\overset{s+1}{p}_{i+1,j}^{j0+1}}{h_r} \right) \right)}{\left( \frac{1}{\tau} - \overset{s}{a}_i \left( \frac{\overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0+1} - \overset{s+1}{p}_{i,j}^{j0}}{\tau} \right) + \frac{\overset{s}{b}_i}{h_r} + \overset{s}{d}_i \right)}, \quad i = \overline{n_r - 1, 0};$$

- г) методом прогонки решается линейная система уравнений относительно неизвестных  $\overset{s+1}{T}_{i,j}^{j0+1}$  для всех  $i = \overline{0, n_r}$ :

$$\begin{aligned}
-C_0 \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,0}} + B_0 \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,1}} &= -F_0; \\
A_j \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,j-1}} - C_j \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,j}} + B_j \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,j+1}} &= -F_j, j = \overline{1, n_z - 1}; \\
A_{n_z} \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i, n_z - 1}} - C_{n_z} \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i, n_z}} &= -F_{n_z},
\end{aligned}$$

где  $B_0 = \frac{\delta}{h_z}$ ,  $C_0 = \frac{\delta}{h_z} + \frac{h_z}{2\tau} + \delta\alpha$ ,  $F_0 = \frac{s+1^{j0+1/2}}{T_{i,0}} \frac{h_z}{2\tau} + \delta\alpha T_0$ ,  $A_j = \frac{\delta}{h_z^2}$ ,  $B_j = \frac{\delta}{h_z^2}$ ,  $C_j = \frac{2\delta}{h_z^2} + \frac{1}{\tau}$ ,  
 $F_j = \frac{s+1^{j0+1/2}}{T_{i,j}} \frac{h_z}{\tau}$ ,  $A_{n_z} = \frac{\delta}{h_z}$ ,  $C_{n_z} = \frac{\delta}{h_z} + \frac{h_z}{2\tau}$ ,  $F_{n_z} = \frac{s+1^{j0+1/2}}{T_{i, n_z}} \frac{h_z}{2\tau}$ ;

д) проверяются выполнения условий сходимости итераций:

$$\max_{i=0, n_r, j=0, n_z} \left| \frac{s+1^{j0+1}}{p_{i,j}} - \frac{s^{j0+1}}{p_{i,j}} \right| < \varepsilon_1, \quad \max_{i=0, n_r, j=0, n_z} \left| \frac{s+1^{j0+1}}{T_{i,j}} - \frac{s^{j0+1}}{T_{i,j}} \right| < \varepsilon_2.$$

Если эти условия не выполняются, то  $s$  увеличиваем на единицу и возвращаемся к пункту а), а если выполняются, то за значения  $p_{i,j}^{j0+1}$  и  $T_{i,j}^{j0+1}$  принимаем полученные  $p_{i,j}^{s+1^{j0+1}}$ ,  $T_{i,j}^{s+1^{j0+1}}$ ,  $i = \overline{0, n_r}$ ,  $j = \overline{0, n_z}$ , и переходим к следующему временному слою.

### 3. Вычислительный эксперимент и обсуждение результатов

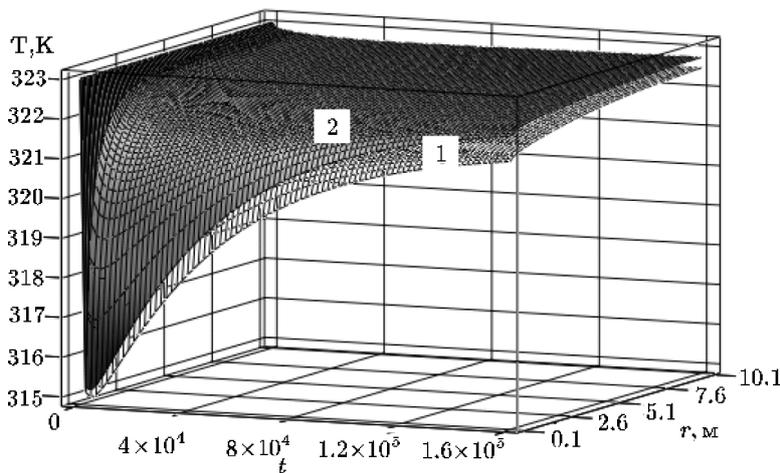
Расчеты проводились для природного газа Средне-Виллойского месторождения Республики Саха (Якутия) при следующих входных данных:  $\alpha = 2$  и  $\alpha = 10$  Вт/(м<sup>2</sup> · К),  $\lambda_r = 2.326$  Вт/(м · К),  $r_w = 0.1$  м,  $r_k = 100.1$  м,  $h = 10$  м,  $l = 1$  м,  $T_0 = 323$  К,  $p_0 = 240$  атм,  $c_p = 2300$  Дж/(кг · К),  $R = 449.4$  Дж/(кг · К),  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$  Па · с,  $c_r = 6 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $m = 0.2$ ,  $k = 10^{-13}$  м<sup>2</sup>,  $p_w = 140$  атм и 230 атм. Критические параметры  $T_c = 205.022$  К и  $p_c = 46.596$  атм были определены по методике, представленной в работе [8], при известном составе газа (объем, %): CH<sub>4</sub> — 90.34, C<sub>2</sub>H<sub>6</sub> — 4.98, C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> — 1.74, iC<sub>4</sub>H<sub>10</sub> — 0.22, nC<sub>4</sub>H<sub>10</sub> — 0.41, C<sub>5</sub>H<sub>12+</sub> — 1.55, CO<sub>2</sub> — 0.28, N<sub>2</sub> — 0.48. Продолжительность эксперимента составляла в безразмерных величинах  $t = 1.6 \cdot 10^6$ , что соответствует 731.1 часа.

Вычислительный эксперимент выполнен с целью выявить степень влияния теплообмена с окружающими породами через кровлю и подошву на динамику изменения полей температуры и давления в газоносном пласте при отборе газа. Предварительные результаты вычислений показали, что это влияние ощутимо только при высоких темпах отбора, поэтому здесь представлены результаты, полученные только для давления на забое скважины  $p_w = 140$  атм. Из этих же результатов следует, что во всех случаях теплообмен с окружающей средой никак не влияет на динамику поля давления газа, так что ниже приведены только иллюстрации, характеризующие динамику температурных полей.

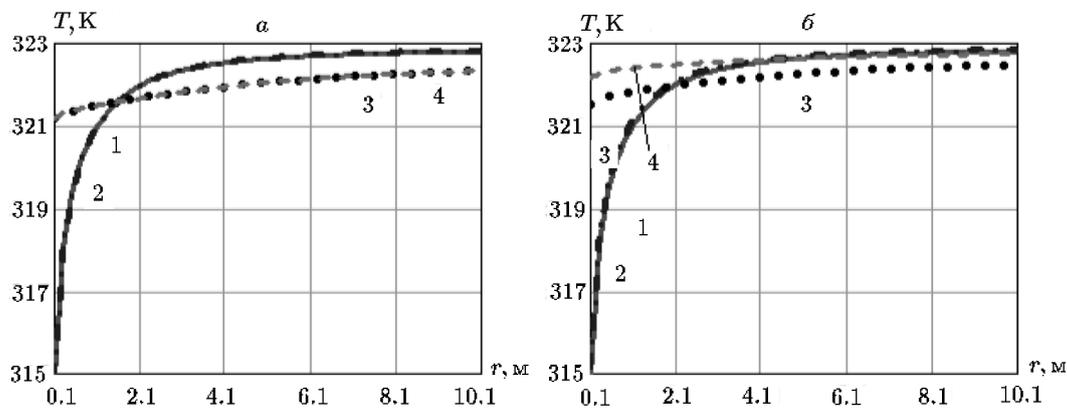
Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунках 1–6. Рассмотрение начнем с анализа динамики температурного поля газоносного пласта. Из физических соображений очевидно, что влияние теплообмена с окружающими вмещающими породами будет наиболее заметно вблизи кровли и подошвы пласта, а наименее заметно на оси симметрии. Это подтверждается рис. 1 и рис. 2 (кривые 1 и 2, а также кривые 3 и 4 на рис. 2а практически совпадают, время безразмерное).

Вначале отметим резкое падение температуры вблизи скважины в начальный пусковой период (рис. 1 и кривые 1, 2 на рис. 2а и 2б). Далее пятикратное увеличение коэффициента теплообмена приводит к увеличению температуры всего лишь на 1, причем в начальный период отбора газа это различие почти незаметно (сравни кривые 1 и 2

с кривыми 3 и 4 на рис. 2б). И наконец, даже при малых временах основные изменения температуры происходят вблизи скважины, т.е. в так называемой призабойной зоне, а на расстоянии порядка 10 м она уже близка к начальному значению, что хорошо видно на рис. 2 и на рис. 3. Последний рисунок также хорошо иллюстрирует уже сказанное о резком падении температуры в пусковой период отбора газа (кривые 1 и 2) и о незначительном изменении температурного поля на достаточном удалении от скважины (кривые 3 и 4).



**Рис. 1.** Динамика поля температур на кровле пласта: поверхность 1 при  $\alpha = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; поверхность 2 при  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$

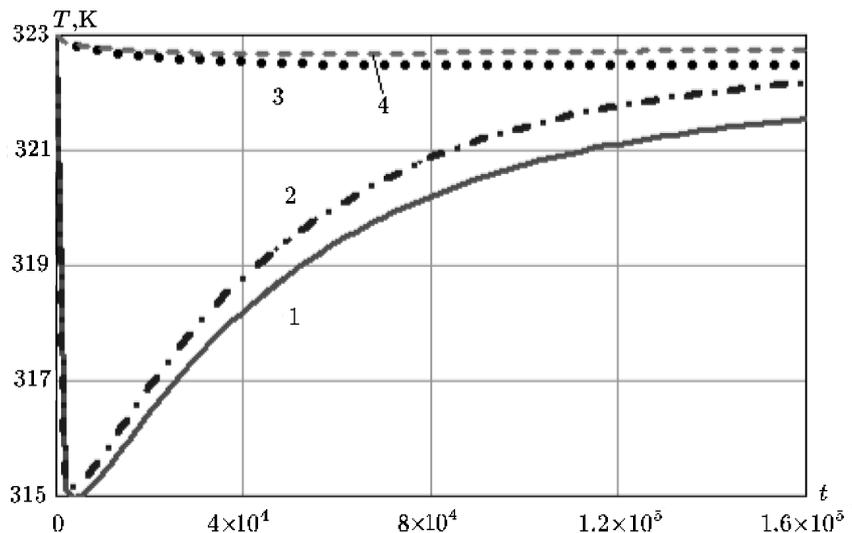


**Рис. 2.** Распределение температуры по радиальной координате: а — на оси симметрии, б — на кровле пласта (кривые 1, 2,  $t = 4000$ ; кривые 3, 4,  $t = 1.6 \cdot 10^5$ ). Нечетные номера соответствуют  $\alpha = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , четные —  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$

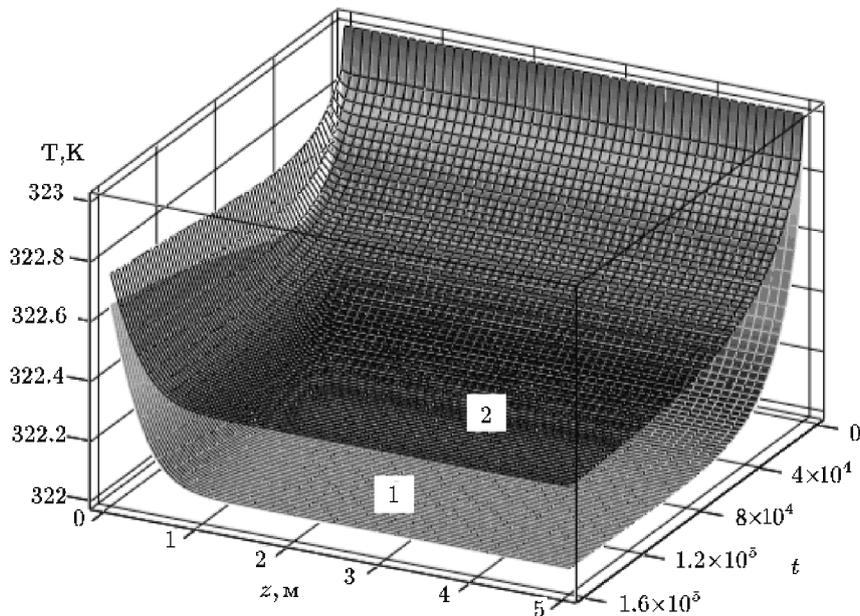
Анализ пространственного распределения температуры начнем с динамики ее изменения по вертикальной координате (рис. 4). Здесь хорошо видно, что наиболее существенное изменение температуры происходит вблизи кровли и подошвы пласта. Далее температура понижается и ее величина определяется охлаждением газа за счет эффекта Джоуля–Томсона и адиабатического расширения. Этот же вывод подтверждается рис. 5, где представлено пространственное распределение температуры газа при двух существенно различных значениях времени. В то же время сравнение поверхности 1

с поверхностью 2 свидетельствует о том, что со временем область влияния теплообмена через кровлю и подошву будет увеличиваться.

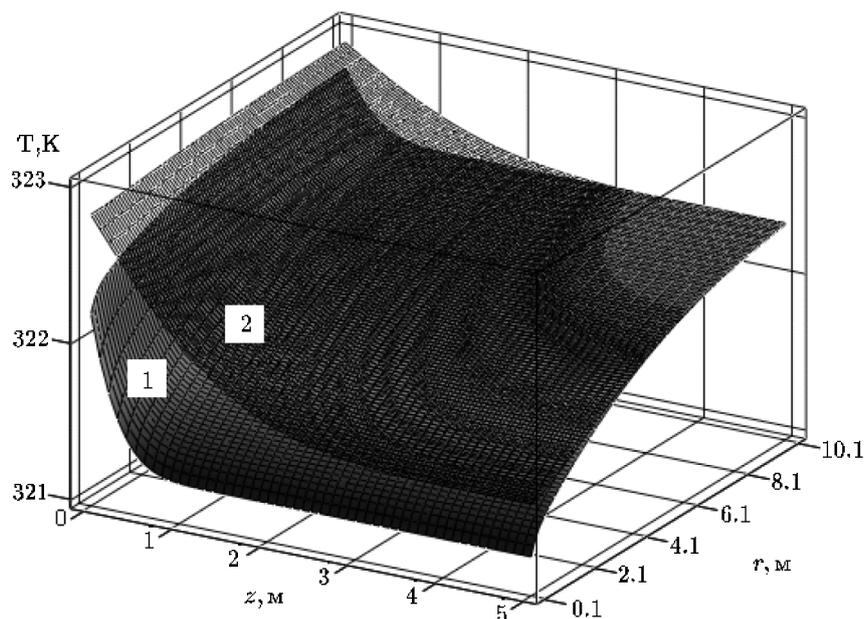
Сказанное выше о слабом влиянии коэффициента теплопередачи на общий характер температурного поля газоносного пласта подтверждается рис. 6 (сравни поверхности 1 и 2). Здесь хорошо видно, что это влияние не очень существенно и что оно ощущается на небольшом расстоянии от кровли, а в силу условия симметрии, и от подошвы пласта.



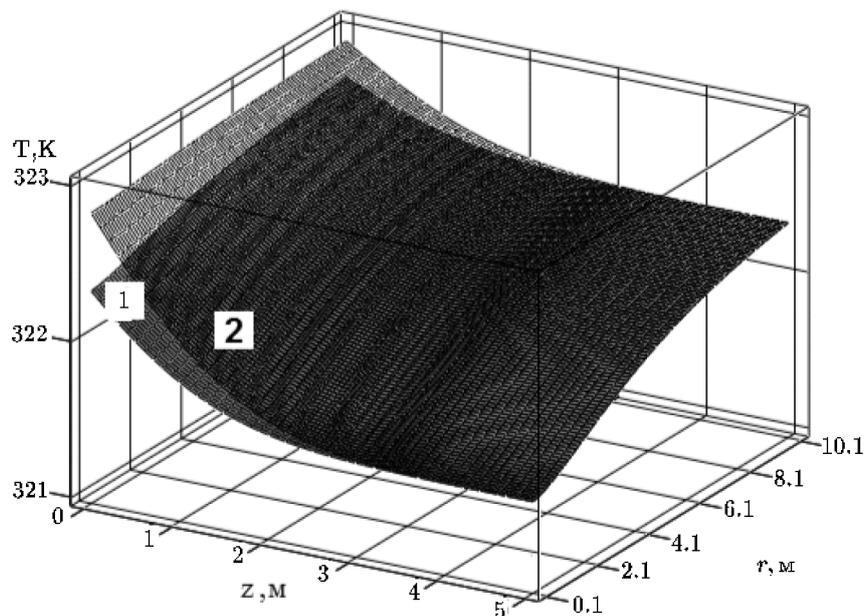
**Рис. 3.** Динамика изменения температуры на забое скважины (кривые 1, 2) и на расстоянии 10 м от нее (кривые 3, 4) при  $z = 0$ . Нечетные номера соответствуют  $\alpha = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , четные —  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$



**Рис. 4.** Динамика изменения температуры по вертикальной координате при  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ : поверхность 1 при  $r = 5.1 \text{ м}$ ; поверхность 2 при  $r = 10.1 \text{ м}$



**Рис. 5.** Распределение температуры по пространственным координатам при  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ : поверхность 1 при  $t = 10^5$ ; поверхность 2 при  $t = 1.6 \cdot 10^6$



**Рис. 6.** Распределение температуры по пространственным координатам при  $t = 1.6 \cdot 10^6$ : поверхность 1 при  $\alpha = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; поверхность 2 при  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$

## Литература

1. Бондарев Э.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Бондарев Э.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф., Павлов Н.К., Шадрина А.Г. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
2. Бондарев Э.А., Рожин И.И., Аргунова К.К. Влияние неизотермических эффектов на добычу газа в северных регионах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 1. — С. 19–28.

3. **Латонов В.В., Гуревич Г.Р.** Расчет коэффициента сжимаемости природного газа // Газовая промышленность. — 1969. — № 2. — С. 7–9.
4. **Бондарев Э.А., Аргунова К.К., Рожин И.И.** Плоскопараллельная неизотермическая фильтрация газа: роль теплопереноса // Инженерно-физический журнал. — 2009. — Т. 82, № 6. — С. 1059–1065.
5. **Яненко Н.Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
6. **Турчак Л.И.** Основы численных методов: Учебное пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
8. **Кау W.B.** Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures // Industrial & Engineering Chemistry Research. — 1936. — Vol. 28. — P. 1014–1019.

*Поступила в редакцию 23 августа 2012 г.*