

УДК 539.374

МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ЭФФЕКТЫ ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

И. Э. Келлер, П. В. Трусов

Пермский государственный технический университет, 614600 Пермь

На основе анализа известных экспериментов на непропорциональное циклическое нагружение металлов предложен возможный физический механизм дополнительного упрочнения. Построена модель упругопластического поликристалла с законом упрочнения, учитывающим взаимодействие систем скольжения. Качественно описаны эффект дополнительного упрочнения на классе эллиптических траекторий деформаций, формы траектории напряжений и петель гистерезиса, характерные для эллиптических траекторий деформаций, нарушение гипотезы локальной определенности и ориентации траекторий напряжений на классе квадратных траекторий деформаций, имеющие место при испытании хромоникелевых нержавеющей сталей аустенитного класса.

Введение. В реальных процессах пластического деформирования металлического поликристаллического тела его любая малая материальная частица подвергается сложному нагружению даже тогда, когда компоненты граничных сил и перемещений изменяются пропорционально. Причиной тому служит сложная геометрия поверхности, на которой задаются граничные условия, а также (с физической точки зрения) наличие внутренних границ в теле, разделяющих кристаллиты. Локальные пластические свойства некоторых широко используемых металлов при *непропорциональном циклическом* нагружении характеризуются рядом эффектов, отсутствующих в процессах непропорционального монотонного и пропорционального циклического видов нагружений [1–4]. Сложность проблемы построения определяющих соотношений упругопластичности для сложного циклического нагружения, подчеркиваемая всеми специалистами (см., например, [5–7]), обуславливает необходимость физически обоснованного выбора структуры данных соотношений и изучения причин, физических механизмов явления. В работе представлена математическая модель, описывающая эффект дополнительного упрочнения и ряд других эффектов пластичности при непропорциональном циклическом нагружении макрооднородных образцов.

1. Эффект дополнительного упрочнения при непропорциональном циклическом нагружении. В работах [1–4] изложены результаты систематических экспериментальных исследований, направленных на изучение локальных пластических свойств металлов в зависимости от формы траектории циклических деформаций. Объект исследования представлял собой тонкостенный трубчатый образец, подвергаемый растяжению-сжатию и знакопеременному кручению (P – M -опыты [7]). На продольный и закручивающий управляющие механизмы подавались некоторые симметричные периодические воздействия, изображаемые фазовыми траекториями в двумерном подпространстве деформаций $e_1 = \varepsilon$, $e_2 = \gamma/\sqrt{3}$ (ε — осевая, γ — крутильная деформации). В работе [1] изучались эллиптические траектории в подпространстве полных деформаций, а в работе [2] — различные замкнутые траектории в подпространстве пластических деформаций. При изучении зависимости пластических свойств от формы траектории деформации максимальные

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00125).

Таблица 1

Материал	σ_Y , МПа	σ_P , МПа	σ_{NP} , МПа
Al	36	55	55
Ni	245	370	420
Cu	100	190	220
SUS 304	250	420	620

в цикле интенсивности деформаций e_+ в соответствующих сериях экспериментов были фиксированы. Испытания проводились при комнатной температуре, скорость деформаций изменялась в пределах $10^{-4} - 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. В начальном состоянии материал образцов был изотропным.

Эксперименты показали некоторые новые свойства испытанных материалов в циклически стабилизированном состоянии. В частности, обнаружено сильнейшее дополнительное упрочнение ряда металлических материалов в зависимости от формы траектории деформации. Хромоникелевая аустенитная нержавеющая сталь AISI 304, подвергнутая деформированию по эллиптическим траекториям [1] $e_1 = e_+ \sqrt{2}(1 + \delta^2)^{1/2} \cos(\theta + \varphi)$, $e_2 = e_+ \sqrt{2}(1 + \delta^2)^{1/2} \cos(\theta - \varphi)$, $\delta = \text{tg } \varphi = e_-/e_+$, $\theta = \omega t$ с большой полуосью $e_+ = 0,005$ и значениями отношения полуосей $\delta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$, имела соответствующие значения максимальной интенсивности напряжений в цикле σ_∞ , равные 296, 320, 340, 425 и 460 МПа. Опыты [2] со сталью того же класса AISI 316, деформируемой по траекториям фиксированного радиуса $e_+^p = 0,002$ и разнообразной формы в подпространстве пластических деформаций, также показали отчетливую зависимость значений σ_∞ от формы траектории цикла: 300 МПа для пропорциональной, 405 для крестообразной, 435 для звездообразной, 470 для квадратной, 485 МПа для круговой. Максимальное циклическое упрочнение в обоих случаях достигалось на круговой траектории деформаций. В [6] содержатся ссылки на эксперименты, в которых величина σ_∞ для круговой траектории превышала аналогичную величину для пропорциональной на 75–80%. В работе [3] исследовалась склонность к дополнительному циклическому упрочнению ряда металлических материалов, подвергаемых пропорциональному и непропорциональному (по крестообразной траектории) циклическому деформированию в подпространстве полных деформаций ($e_+ = 0,004 \div 0,008$). Результаты исследования приведены в табл. 1 (σ_Y — начальный предел текучести, σ_P и σ_{NP} — соответствующие величины σ_∞ при деформировании по пропорциональной и непропорциональной крестообразной траекториям).

Другими важными характерными особенностями рассматриваемого вида нагружения являются нарушение [2] гипотезы локальной определенности В. С. Ленского [7], своеобразный вид петель упругопластического гистерезиса (см., например, [2]), неполнота циклического разупрочнения в программах, включающих этапы непропорционального и пропорционального циклического деформирования [1].

2. Вероятный физический механизм эффекта. В результате анализа 13 опубликованных экспериментальных работ, выполненных с различными металлами и сплавами, нами найдено [8], что все чувствительные к форме циклической траектории деформирования металлы и твердые растворы имели ГЦК-решетку, а основным механизмом неупругой деформации являлся механизм кристаллографического скольжения, разрешающий только простой сдвиг по 12 системам скольжения. Сравнение склонности металлов к дополнительному упрочнению при различных гомологических температурах (отношения температуры проведения эксперимента к температуре плавления по шкале Кельвина) позволило принять гипотезу об атермичности данного эффекта.

Авторами работы [3] экспериментально исследована корреляция меры дополнительного упрочнения $\eta \equiv (\sigma_{NP} - \sigma_Y)/(\sigma_P - \sigma_Y)$ с энергией дефекта упаковки кристаллической структуры металла или сплава. Данные [3] подтвердили независимо высказанную нами гипотезу [9] о том, что мера дополнительного упрочнения коррелирует с безразмерным комплексом $\Gamma \equiv \gamma_{SF}/(Gb)$ отношения энергии дефекта упаковки γ_{SF} к осредненному модулю сдвига G и модулю вектора Бюргерса b . С уменьшением этого параметра значение меры дополнительного упрочнения увеличивается: $\eta \sim 1/\sqrt{\Gamma}$ (экспериментальные точки и регрессионные кривые строились по данным [3]). В то же время параметр $\mu \equiv \bar{d}_{NP}/d_P$ чувствительности дислокационной структуры к форме траектории циклического нагружения показывает зависимость $\mu \sim \sqrt{\Gamma}$, где d_P и d_{NP} — средние значения диаметра ячейки дислокационной структуры при пропорциональном и непропорциональном циклическом деформировании. С уменьшением Γ происходит уменьшение средних размеров фрагмента дислокационной структуры после непропорционального циклического деформирования по отношению к тому же параметру после пропорционального циклического деформирования.

Параметр безразмерной энергии дефекта упаковки обратно пропорционален отнесенной к размеру атома ширине дефекта упаковки в расщепленной дислокации, относительно низкая его величина соответствует широкой расщепленности дислокаций, что затрудняет все процессы, требующие их сжатия, в том числе процессы разрушения дислокационных барьеров. По этой причине в металлах с низкой величиной Γ эффективным является упрочнение за счет образования дислокационных барьеров Ломер — Коттрелла [10] при взаимодействии дислокаций, принадлежащих определенным парам систем скольжения. При реализации цикла непропорционального деформирования, особенно такой формы, когда тензоры деформаций и скоростей деформаций непропорциональны в каждый момент времени (траектории деформирования в виде квадрата, окружности), оказываются более вероятными случаи совместной работы определенных пар систем скольжения, образующих при взаимодействии упомянутые сильные дислокационные барьеры. Таким образом, вероятным механизмом эффекта дополнительного упрочнения является образование сильных дислокационных барьеров типа Ломер — Коттрелла.

3. Модель. Для учета в определяющих уравнениях предполагаемого механизма упрочнения на уровне кристаллической решетки строится следующая модель. Поликристаллический образец представляется состоящим из множества упругопластических монокристаллов (зерен) с некоторой ориентацией. Упругие свойства зерен полагаются одинаковыми и имеющими кубическую симметрию, пластические — анизотропными с анизотропным законом упрочнения без трансляции. Для соединения зерен в единое целое принята гипотеза о равенстве тензора скоростей полных деформаций образца аналогичным тензорам каждого зерна. Тензор напряжений в образце определяется как среднее по составляющим агрегат зернам с некоторой функцией плотности распределения $f(\tau_*)$, где τ_* — начальное значение напряжения текучести системы скольжения. Все зерна распределяются по группам, в каждой из которых начальные пластические свойства зерен одинаковы, а их ориентации распределены по равномерному закону для начальной изотропии материала.

Для составляющего агрегат монокристалла сформулированы определяющие соотношения упругопластичности, учитывающие механизм скольжения по системам скольжения ГЦК-кристалла и возможность различного изотропного упрочнения этих систем (критические сдвиговые напряжения τ_{\pm}^k , $k = 1, \dots, 12$ могут быть не равны):

$$\dot{E} = \dot{E}^* + \dot{\bar{E}}; \quad (1)$$

$$\dot{E}^* = pq(q-1)A : \dot{S}; \quad (2)$$

$$\dot{\bar{E}} = j \lambda q A : S, \quad j = \begin{cases} 1 & \text{при } F(S) = \nu, \quad dF(S) = 0, \\ 0 & \text{при } F(S) < \nu \text{ или } F(S) = \nu, \quad dF(S) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$F(S) \equiv \sum_{k=1}^{12} \left| \frac{S : M_k}{\tau_*^k} \right|^q, \quad A \equiv \frac{1}{q(q-1)} \frac{\partial^2 F(S)}{\partial S^2} = \sum_{k=1}^{12} \frac{M_k}{\tau_*^k} \left| \frac{S : M_k}{\tau_*^k} \right|^{q-2} \frac{M_k}{\tau_*^k}. \quad (4)$$

Здесь S — девиатор напряжений; E , E^* , \bar{E} — девиаторы тензора малых деформаций, его упругой и пластической частей соответственно; M_k — симметризованная диада, задающая k -ю систему скольжения ГЦК-кристалла ($k = 1, \dots, 12$), также являющаяся девиатором:

$$\bar{E} = \dot{\gamma}^k M_k; \quad (5)$$

$q \geq 2$ — параметр, определяющий форму поверхности текучести одновременно с показателем степени гиперупругого потенциала. Определение зависящей от q константы ν как $\nu = F(\tau_* M_k)$ гарантирует наличие 24 общих точек поверхности текучести $F(S) = \nu$ и многогранника Бишопа — Хилла, соответствующих случаям единичного скольжения. Функция текучести $F(S)$ учитывает вклад всех приведенных напряжений $S : M_k$ ($k = 1, \dots, 12$), а соответствующий критерий предсказывает начало текучести в момент достижения энергией обратимых деформаций (2) предельного значения. Константа q определяет начальную форму поверхности текучести монокристалла, p определяет наклон кривой одноосного растяжения монокристалла вдоль оси куба в момент, предшествующий началу текучести. Построению и анализу уравнений (1)–(4) посвящена статья [11].

Скорость пластического сдвига по k -й системе скольжения $\dot{\gamma}^k$ находится из градиентного закона в терминах приведенных напряжений и сдвигов по системам скольжения

$$\dot{\gamma}^k \equiv \dot{\lambda} \frac{\partial F(S : M_k)}{\partial (S : M_k)} - \dot{\lambda} q \frac{S : M_k}{\tau_*^k} \left| \frac{S : M_k}{\tau_*^k} \right|^{q-2} \frac{1}{\tau_*^k} \quad (6)$$

(из которого в сочетании с (5) следует (3)). В (6) суммирование по k не проводится.

Закон упрочнения k -й системы скольжения принят в виде

$$\tau_*^k = \tau_* + \alpha^k (\tau_*^k), \quad (7)$$

где α^k — параметр циклического упрочнения k -й системы скольжения, зависящий от τ_*^k . Первое слагаемое в правой части (7) обусловлено внутренним трением, второе отвечает за деформационное циклическое упрочнение и может быть обусловлено сопротивлением статистически изотропных дислокационных структур. В зависимости от истории циклического деформирования дислокационная структура подстраивается под воздействие, в результате чего имеет место упрочнение или разупрочнение (однако $\tau_*^k \geq \tau_*$). Выражение для меры α^k записывается в виде

$$\alpha^k = \int_0^t g^k(t) \exp(-\varkappa(\chi^k(t) - s(t))) ds(t), \quad (8)$$

учитывающем «забывание» локальных актов упрочнения (таких как поперечное упрочнение при резкой смене ориентации траектории деформирования), имеющее место в экспериментах [1]. В (8) t — параметр процесса деформирования; \varkappa — коэффициент релаксации; $0 \leq s \leq \chi^k$, χ^k — накопленный пластический сдвиг по k -й системе скольжения

$$\chi^k(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}^k(t)| dt;$$

$g^k(t)$ — функция упрочнения k -й системы скольжения, принимаемая в виде

$$g^k(t) = H \left[(1 - \exp(-\xi \chi^k)) + B \sum_{j(k)} h(\dot{\gamma}^k \dot{\gamma}^j) |\gamma^k| |\gamma^j| \right]. \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9) учитывает самоупрочнение системы скольжения при пропорциональном циклическом деформировании (когда взаимодействие систем мало), константы H и ξ определяют соответственно упрочнение и скорость упрочнения в таком процессе, константа B — упрочнение за счет образования дислокационных барьеров. В выражениях меры (8) и функции (9) присутствуют пластические сдвиги и их скорости. Пластические деформации наблюдаются в течение части цикла, когда точка, представляющая напряженное состояние, находится на поверхности текучести. Поэтому мера $\alpha^k(\tau_*^k)$ в (7) зависит от напряжения текучести. Аналогичный (7) вид закона упрочнения принят в модели [12] для структурного элемента в рамках одного варианта статистической модели Кадашевича — Новожилова, отличающейся, кроме того, выбором параметра упрочнения. В качестве последнего в [12] принята работа пластического формоизменения структурного элемента за последний цикл, зависящая, так же как и мера $\alpha^k(\tau_*^k)$, от текущего напряжения текучести.

Изучение геометрии реакции Ломер — Коттрелла [10] показало, что системы скольжения ГЦК-монокристалла распределяются по 4 непересекающимся группам, так что барьер образуется только при взаимодействии пары систем скольжения из одной и той же группы. Соответствующая реакция имеет место при определенном сочетании знаков векторов Бюргерса и направлений движения дислокаций (другими словами, при подходящих конфигурациях простых сдвигов) взаимодействующих систем скольжения. Симметризованные диады систем скольжения оказалось возможным ориентировать так, чтобы тройка таких диад любой группы образовывала замкнутый контур в пространстве симметричных девиаторов. Поэтому критерий образования барьеров записан в приведенной выше функции (9) с помощью функции Хевисайда $h(x)$; в (9) $j(k)$ — индексы группы систем скольжения Ломер — Коттрелла, включающей k -ю систему.

Для описания P - M -экспериментов все соотношения модели записаны в терминах подпространств деформаций $e_1 = \varepsilon$, $e_2 = \gamma/\sqrt{3}$ (ε — осевая, γ — крутильная деформации) и напряжений $s_1 = \sigma$, $s_2 = \tau/\sqrt{3}$ (σ — осевое, τ — закручивающее напряжения) соответствующих векторных пространств \mathfrak{D}_5 и Σ_5 А. А. Ильюшина [7]. Ниже рассмотрена упрощенная (гипотетическая) модель поликристалла, в которой каждый монокристалл имеет системы скольжения, представляемые тройкой единичных векторов в рассматриваемом двумерном подпространстве, образующих замкнутый контур. Все приведенные ниже результаты получены для $q = 2$, т. е. начальная форма кривой текучести монокристалла в подпространстве s_1, s_2 была круговой. Агрегат содержал n групп зерен, элементы каждой из которых различались ориентацией, но имели одинаковый начальный радиус окружностей текучести. По кривым одноосного растяжения нержавеющей стали AISI 304 и AISI 316 в интенсивностях, взятых соответственно из [2] и [4], по методу [13] определены начальные пределы текучести зерен, их вес и упругие модули материалов. В данном варианте модели начальные значения пределов текучести зерен совпадают с τ_* , а (3) принимает вид $\dot{s} = 3G\dot{\varepsilon}$. В табл. 2 приведены значения τ_* (в мегапаскалях) и f для AISI 304 ($n = 11$, $3G = 245,4$ ГПа) и AISI 316 ($n = 10$, $3G = 199,2$ ГПа). Остальные параметры для обоих материалов (достаточно близких по пластическим свойствам) $\alpha = 50$, $\xi = 2 \cdot 10^4$, $H = 2 \cdot 10^9$ Па, $B = 1,4 \cdot 10^6$ выбраны из условия описания эффекта дополнительного упрочнения на эллиптических траекториях циклического деформирования.

4. Результаты и их обсуждение. Зависимость циклического упрочнения $|s|_\infty$ стали AISI 304, деформированной по эллиптическим траекториям, равнонаклоненным к осям e_1, e_2 , с неизменной большой полуосью $e_+ = 0,005$, от отношения полуосей эллип-

Таблица 2

AISI 304		AISI 316	
τ_*	f	τ_*	f
165,0	0,350	90,0	0,2800
190,4	0,306	155,4	0,2410
249,0	0,135	245,4	0,1370
304,6	0,083	360,0	0,1040
412,5	0,041	482,7	0,0652
498,2	0,028	605,4	0,0431
609,1	0,021	777,2	0,0330
747,2	0,013	998,1	0,0339
996,3	0,009	1210,8	0,0293
1245,0	0,008	1472,6	0,0318
1495,0	0,006		

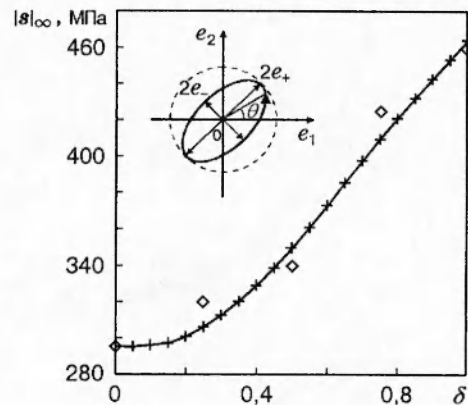


Рис. 1

са δ , рассчитанная по модели, приведена на рис. 1. Ромбами отмечены экспериментальные данные [1], крестиками — расчетные. Из рис. 1 следует, что функция упрочнения (9) и «забывающая» мера (8) позволяют описать точку перегиба на экспериментальной кривой. Расчет данной кривой устойчив по отношению к малому изменению параметров материала q , α , ξ , H , B .

На рис. 2 приведены расчетные кривые упругопластического гистерезиса (рис. 2, *a, б*) и траектория напряжений (рис. 2, *в*) для аналогичной эллиптической траектории циклического деформирования с $\delta = 0,25$ стали AISI 304. Рассчитанные согласно предлагаемой модели кривые, представленные на рис. 2, *a, б*, обнаруживают следующие особенности: одна из петель гистерезиса (рис. 2, *a*) имеет закругленную форму и ниспадающие участки, другая (рис. 2, *б*) — заостренную форму и вогнутые участки. Такие же характерные формы имеют петли, экспериментально полученные в аналогичных условиях [2]. Еще в первых исследованиях непропорциональной циклической пластичности отмечалось, что петли гистерезиса при данном виде нагружения качественно отличаются по форме от петель при пропорциональном циклическом деформировании. Известно, что форма и размеры петель гистерезиса характеризуют величину поглощаемой материалом энергии в процессе циклического деформирования, часть из которой запасается в виде внутренней (упругой) энергии дислокационной структуры. Теоретическое описание формы и размеров петель гистерезиса в зависимости от свойств материала и траектории циклического деформиро-

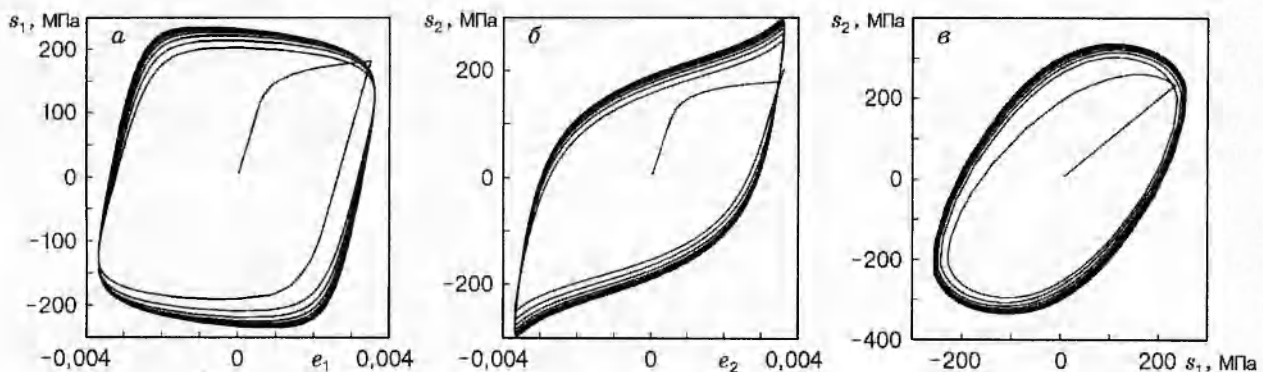


Рис. 2

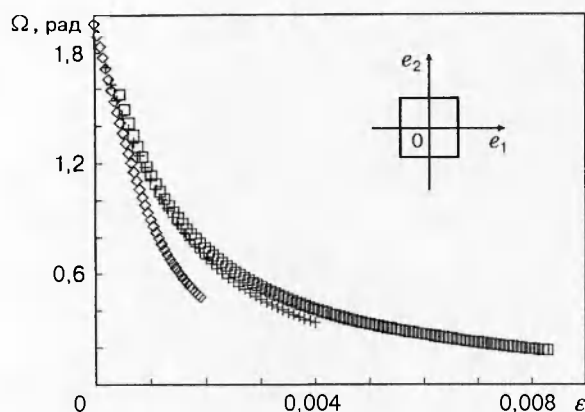


Рис. 3

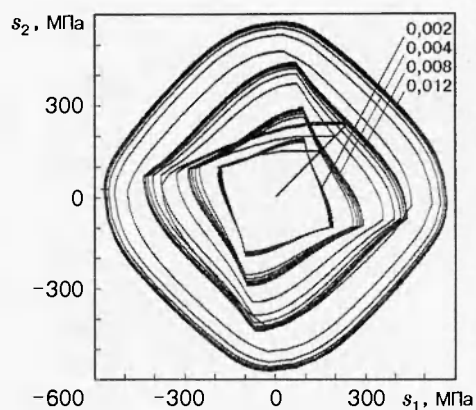


Рис. 4

вания важно при изучении малоциклового усталости. На рис. 2, в приведена траектория напряжений, также качественно хорошо согласующаяся с экспериментальной [2].

На рис. 3 представлены расчетные зависимости угла сближения Ω векторов напряжений и скоростей деформаций после точки излома от длины дуги траектории полных деформаций ε при циклическом деформировании стали AISI 316 по траекториям в форме квадрата. Ромбами отмечены результаты, полученные для размера стороны квадрата 0,002, крестиками — 0,004, квадратами — 0,008. Различие полученных кривых соответствует нарушению гипотезы локальной определенности [7], поскольку размер стороны квадрата в число локальных параметров процесса не входит. Эта особенность, характерная для циклической непропорциональной пластичности, впервые отмечена в [4], где приведены аналогичные экспериментальные зависимости.

На рис. 4 представлены траектории напряжений, соответствующие циклическому деформированию стали AISI 316 по квадратным траекториям (см. рис. 3) со стороной квадрата 0,002, 0,004, 0,008 и 0,012. Экспериментальные данные работы [4] показывают, что траектории напряжений имеют оси симметрии, повернутые относительно осей симметрии квадратной траектории деформаций. Угол поворота осей симметрии увеличивается с увеличением размера стороны квадратной траектории деформирования. Расчетные траектории (рис. 4) имеют такую же особенность. Это свидетельствует о том, что модель качественно описывает векторные и скалярные свойства материала [7], совместно отвечающие за эффект.

Несмотря на то что модель описывает ряд особенностей непропорциональной циклической пластичности, остается открытым вопрос о ее пригодности для описания зависимости циклического упрочнения от формы траектории деформирования (траектории в виде крестов, звезд, бабочек и т. д. [1]). Расчетные результаты для таких траекторий нами не приведены, так как в соответствующих экспериментах [1] контролировались пластические деформации, а предложенный алгоритм реализации модели предназначен для полных деформаций, и сравнивать эти результаты не вполне корректно.

До сих пор нерешенной проблемой остается описание эффекта неполноты «забывания» истории циклического деформирования (в том числе неполноты циклического разупрочнения), также характерного для непропорционального циклического деформирования [1].

В заключение следует указать на важность сопоставления различных подходов к построению определяющих уравнений для сложного циклического нагружения, в том числе подхода, затронутого в настоящей статье. Практически все существующие модели рассматриваемого явления основываются на модификациях двухповерхностных теорий пластического течения в терминах пространств напряжений и/или деформаций (см. [6, 14]) или

эндохронной теории пластичности [15]. Плодотворным может оказаться отказ от гипотезы макроопределимости и описание макросвойств материала во взаимосвязи с описанием развивающихся в нем структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effect of strain paths shapes on nonproportional cyclic plasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1985. V. 33, N 6. P. 559–575.
2. Ishikawa H., Sasaki K. Application of the hybrid constitutive model for cyclic plasticity to sinusoidal loading // *Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol.* 1992. V. 114, N 2. P. 172–179.
3. Itoh T., Sakane M., Ohnami M., Ameyama K. Effect of stacking fault energy on cyclic constitutive relation under nonproportional loading // *J. Soc. Mat. Sci.* 1992. V. 41, N 468. P. 1361–1367.
4. Охаси Е., Танака Е., Оока М. Пластическое деформирование нержавеющей стали типа 316 под действием несинфазных циклов по деформации // *Теорет. основы инж. расчетов*. 1985. Т. 107, № 4. С. 61–73.
5. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Об эффекте непропорциональности при сложном циклическом нагружении // *Прикладные проблемы прочности и пластичности: численное моделирование физико-механических процессов: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. С. 171–175.*
6. McDowell D. L. An evaluation of recent developments in hardening and flow rules for rate-independent, nonproportional cyclic plasticity // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1987. V. 54, N 2. P. 323–334.
7. Васин Р. А. Определяющие соотношения теории пластичности. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–75. (Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела; Т. 21).
8. Келлер И. Э. Непропорциональная циклическая пластичность: физический анализ и моделирование: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1997.
9. Trusov P. V., Keller I. E., Oniskiv V. D. On constitutive relations of plasticity under nonproportional cyclic loading // *Influence of microstructure on the constitutive equations in solids: Proc. EUROMECH colloq. 303, Moscow — Perm, 11–19 May, 1993. Perm, 1993. P. 28.*
10. Hirth J. P. On dislocation interactions in the FCC lattice // *J. Appl. Phys.* 1961. V. 32, N 4. P. 700–706.
11. Келлер И. Э., Трусов П. В. Обобщение теории Бишопа — Хилла пластического формоизменения монокристалла // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 1997. № 6. С. 93–103.
12. Келлер И. Э., Трусов П. В. Простая модель упругопластичности для непропорционального циклического нагружения // *Пробл. прочности*. 1998. № 1. С. 15–24.
13. Келлер И. Э., Кузнецова В. Г., Новокшанов Р. С. Сравнение двух моделей упругопластичности, обобщающих модель Мазинга на случай сложного нагружения // *Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. техн. ун-та, 1996. Вып. 4. С. 29–39.*
14. Tanaka E. A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening // *Eur. J. Mech. A. Solids*. 1994. V. 13. P. 155–165.
15. Кучер Н. К., Бородий М. В. Вариант эндохронной теории пластичности для описания сложных историй циклического нагружения // *Пробл. прочности*. 1993. № 5. С. 3–12.