

УДК 531

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКОВИДНОЙ ТРЕЩИНЫ С КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ

В. И. Смирнов, С. А. Атрошенко*

Петербургский государственный университет путей сообщения,
198103 Санкт-Петербург, Россия

* Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mails: vsmirnov1@gmail.com, satroshe@mail.ru

Оценивается критическая нагрузка (сила) для пространства с дисковидной трещиной, в случае когда на ее берегах вдоль окружности действует сосредоточенная сила. Показано, что с помощью классических критериев разрушения невозможно определить предельную силу, поэтому используется структурный критерий прочности, сформулированный применительно к осесимметричным задачам. Исследована зависимость между вязкостью разрушения и размером трещины и построена двухкритериальная диаграмма разрушения.

Ключевые слова: дисковидная трещина, критическая сила, структурный критерий, вязкость разрушения, короткие трещины.

DOI: 10.15372/PMTF20220417

Введение. В некоторых случаях для представления результатов испытаний материалов на трещиностойкость используются двухкритериальные (двухпараметрические) диаграммы [1–4]. Такие диаграммы строятся для случаев, когда нагрузка действует на большом расстоянии и движение трещины является неустойчивым. В данной работе исследуется сосредоточенная сила, приложенная к берегам дисковидной трещины и действующая вдоль окружности. В этом случае предельную нагрузку можно определить лишь с помощью двумерного варианта силового интегрального критерия (критерия средних напряжений).

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу о равновесии упругого пространства с дисковидной трещиной со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -p(r), & z &= 0, & r < a, \\ u_z &= 0, & z &= 0, & r > a, \\ \tau_{rz} &= 0, & z &= 0, & 0 < r < \infty.\end{aligned}$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты; a — радиус трещины; σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжений; u_z — смещение в вертикальном направлении.

К берегам трещины вдоль окружности радиусом c ($c \leq a$) приложена нагрузка $p(r)$ в виде сосредоточенной силы P :

$$p(r) = -\frac{P}{2\pi r} \delta(r - c) \quad (1)$$

($\delta(r)$ — дельта-функция Дирака).

Нормальное растягивающее напряжение σ_z на продолжении трещины ($r > a$, $z = 0$) определяется по формуле [5, 6]

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}}{r^2 - \rho^2} p(\rho) d\rho. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), находим

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{Pa\sqrt{1 - (c/a)^2}}{\pi^2(r^2 - c^2)\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad r > a, \quad 0 \leq c \leq a. \quad (3)$$

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) равен [7]

$$K_I = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{p(r)r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr. \quad (4)$$

Из (1), (4) получаем

$$K_I = \frac{P}{(\pi a)^{3/2} \sqrt{1 - (c/a)^2}}. \quad (5)$$

Смещение берегов трещины относительно плоскости, в которой находится трещина ($z = 0$), можно определить из выражения [7]

$$u_z(r, 0) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{E} \int_r^a \frac{g(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, \quad g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{p(r)r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \quad r \leq a,$$

где ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.

Выполнив ряд вычислений, для нагрузки (1) имеем

$$u_z(r, 0) = -\frac{2(1 - \nu^2)P}{\pi^2 E \sqrt{1 - (c/a)^2}} \frac{1}{r} \arccos \frac{r}{a}, \quad r \leq a, \quad 0 \leq c \leq a. \quad (6)$$

В силу осевой симметрии потенциальная энергия упругой деформации, обусловленная раскрытием трещины радиусом a , может быть определена по формуле

$$W = 2\pi p \int_0^a u_z(r)r dr, \quad p = \frac{P}{2\pi a^2},$$

откуда следует

$$W = \frac{2(1 - \nu^2)P^2}{\pi^2 E a \sqrt{1 - (c/a)^2}}. \quad (7)$$

Наконец, определим угол раскрытия трещины в произвольном сечении:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{du_z(r)}{dr}.$$

После дифференцирования имеем

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2(1 - \nu^2)P}{\pi^2 E \sqrt{1 - (c/a)^2}} \left(\frac{1}{r^2} \arccos \frac{r}{a} + \frac{1}{ar\sqrt{1 - (r/a)^2}} \right) \right], \quad r < a, \quad 0 \leq c \leq a. \quad (8)$$

При $c \rightarrow 0$ из (3), (5)–(8) получаем решение для трещины с сосредоточенной силой, приложенной в центре.

Из выражений (5)–(8) следует, что КИН, раскрытие трещины, энергия деформации и угол раскрытия трещины неограниченно возрастают при $c/a \rightarrow 1$. Поэтому для оценки разрушающей нагрузки классические критерии прочности неприменимы. При сколь угодно малой нагрузке при $c \rightarrow a$ могут быть превышены значения экспериментально определяемых констант материала: вязкости разрушения K_{Ic} , критического раскрытия трещины δ_c , плотности поверхностной энергии γ и критического угла раскрытия α_c . Кроме того, в указанных критериях прочности отсутствует предельный переход к телу без трещины ($a \rightarrow 0$).

2. Структурный критерий прочности. Для оценки предельной нагрузки, при которой начинает распространяться трещина, применим структурный критерий в виде [8, 9]

$$\frac{2}{2ad + d^2} \int_a^{a+d} \sigma_z(r) r dr \leq \sigma_c, \quad (9)$$

где σ_c — предел прочности материала на растяжение; d — структурный параметр разрушения, определяемый из равенства $d = 2K_{Ic}^2/(\pi\sigma_c^2)$. Обоснование этого равенства приведено ниже.

Подставим (3) в (9) и введем безразмерные величины

$$\eta = \frac{a}{a+d}, \quad k = \frac{c}{a}, \quad 0 \leq \eta, \quad k \leq 1. \quad (10)$$

Вместо критической силы целесообразно ввести давление

$$p_* = \frac{P_*}{\pi d^2}. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi(1+\eta)}{2(1-\eta) \arccos(\eta\sqrt{(1-k^2)/(1-k^2\eta^2)})}. \quad (12)$$

Из (12) следуют предельные решения:

1) $k \rightarrow 0$ (сосредоточенная сила приложена в центре трещины):

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi(1+\eta)}{2(1-\eta) \arccos \eta}; \quad (13)$$

2) $\eta \rightarrow 0$ (тело без трещины): $p_*/\sigma_c \rightarrow 1$;

3) $\eta \rightarrow 1$ (бесконечно большая трещина): $p_*/\sigma_c \rightarrow \infty$;

4) $k \rightarrow 1$ (сосредоточенная сила приложена на фронте трещины):

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

т. е. для трещины конечного размера ($\eta < 1$) разрушающая нагрузка имеет конечное значение. Например, для трещины диаметром $2a = d$ получаем $p_* = 2\sigma_c$.

Следует отметить, что критерий граничного напряжения [10] также содержит характерный размер зоны предразрушения r^* : $\sigma_z(r^*) \leq \sigma_c$. Однако в данной задаче в этом критерии отсутствует предельный переход к телу без трещины ($a \rightarrow 0$). Здесь r^* — некоторое расстояние от вершины трещины в плоскости $z = 0$. В общем случае величина r^* не равна d и ее требуется определить.

Согласно критерию Ирвина трещина начинает распространяться в тот момент, когда КИН достигает критического значения $K_I = K_{Ic}$ (вязкость разрушения K_{Ic} — экспериментально определяемая константа материала). В данном случае $K_{Ic} = K_I(P_*)$, где P_* — предельная нагрузка (сила). Согласно (11) из (5) находим

$$K_{Ic} = \frac{p_* \pi d^2}{(\pi a)^{3/2} \sqrt{1 - (c/a)^2}}. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы величина предельной нагрузки p_* была одинаковой при применении критерия Ирвина и структурного критерия (9). Подставляя значение p_* из (12) в (14), с учетом введенных обозначений (10) получаем

$$K_{Ic} = \frac{1}{2} \sigma_c \sqrt{\pi d} \frac{(1 + \eta) \sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{1 - k^2} \eta \sqrt{\eta} \arccos(\eta \sqrt{(1 - k^2)/(1 - k^2 \eta^2)})}. \quad (15)$$

Согласно (15) величина K_{Ic} зависит от размера трещины η .

При $\eta \rightarrow 0$ из (15) следует $K_{Ic} \rightarrow \infty$. Это означает, что критерий Ирвина неприменим в области коротких трещин, так как при его использовании разрушающая нагрузка становится неограниченной. Для случая длинных трещин ($\eta \rightarrow 1$) введем обозначение $K_{Ic}|_{\eta \rightarrow 1} = K_{Ic}^\infty$. Тогда из (15) получаем

$$d = 2(K_{Ic}^\infty)^2 / (\pi \sigma_c^2).$$

Поскольку вязкость разрушения материала K_{Ic} определяется на стандартных образцах с заданной длиной исходной трещины, значение структурного параметра d в расчетах принимается равным

$$d = 2K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_c^2).$$

Следовательно, d — линейный размер зоны предразрушения (структурная характеристика прочности материала с трещиной), выбираемый таким образом, чтобы обеспечить эквивалентность (в смысле предельной нагрузки) структурного критерия, в частности в виде (9), с классическими критериями Ирвина и Гриффитса. Иными словами, структурный параметр прочности является размерной комбинацией классических характеристик прочности — вязкости разрушения K_{Ic} и предела прочности σ_c — на макроуровне.

3. Построение двухкритериальной диаграммы разрушения. Для трещин бесконечно большой длины имеем

$$K_{Ic}^\infty = K_{Ic}|_{\eta \rightarrow 1} = \sigma_c \sqrt{\pi d/2},$$

или в безразмерном виде

$$\frac{K_{Ic}}{K_{Ic}^\infty} = \frac{(1 + \eta) \sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{1 - k^2} \eta \sqrt{2\eta} \arccos(\eta \sqrt{(1 - k^2)/(1 - k^2 \eta^2)})}. \quad (16)$$

При $\eta \rightarrow 0$ (трещина бесконечно малой длины) $K_{Ic}/K_{Ic}^\infty \rightarrow \infty$, при $\eta \rightarrow 1$ (трещина бесконечно большой длины) $K_{Ic}/K_{Ic}^\infty \rightarrow 1$.

С использованием уравнений (12), (16) можно построить так называемую двухкритериальную диаграмму разрушения $R = \sqrt{(p_*/\sigma_c)^2 + (K_{Ic}/K_{Ic}^\infty)^2}$. В данной задаче она представляет собой параметрически заданную параболу (рис. 1), построенную при $k = 0$ (сосредоточенная сила приложена в центре трещины). На рис. 1 показаны кривые $K_{Ic}/K_{Ic}^\infty = f(\eta)$, $p_*/\sigma_c = f(\eta)$ и $R = f(\eta)$ для дисковидной и центральной трещин.

В случае когда равномерная нагрузка действует на большом расстоянии, диаграмма разрушения имеет форму окружности единичного радиуса (центральная трещина) или кривой, близкой к окружности (дисковидная трещина).

Для сравнения на рис. 1 приведены аналогичные зависимости для случая центральной трещины, нагруженной в центре сосредоточенными растягивающими силами (плоская деформация). В этом случае критерий разрушения (9) записывается в одномерной форме

$$\frac{1}{d} \int_a^{a+d} \sigma_z(r) dr \leq \sigma_c,$$

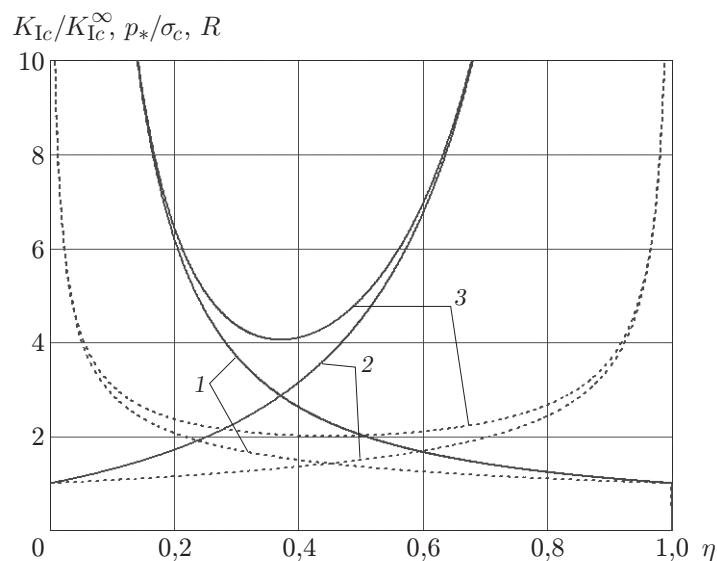


Рис. 1. Двухкритериальная диаграмма прочности:

1 — $K_{Ic}/K_{Ic}^{\infty} = f(\eta)$, 2 — $p_*/\sigma_c = f(\eta)$, 3 — $R = f(\eta)$; сплошные линии — дисковидная трещина, пунктирные — центральная трещина

а уравнения (12), (16) принимают вид

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi}{2 \arccos \eta}, \quad \frac{K_{Ic}}{K_{Ic}^{\infty}} = \frac{\sqrt{2(1-\eta)}}{\sqrt{\eta} \arccos \eta}. \quad (17)$$

Первое равенство в (17) можно записать в виде, удобном для сопоставления с экспериментальными данными о расклинивании пластин с центральной трещиной сосредоточенными силами:

$$P_* = \frac{\pi d h \sigma_c}{\arccos((a/d)/(1+a/d))} \quad (18)$$

(P_* — критическая сила; h — толщина пластины; a — половина длины трещины).

Результаты измерений разрушающей силы P_* на образцах из листового стекла с трещиной, симметрично нагруженной на берегах ($\sigma_c = 39,2$ МПа, $K_{Ic} = 39,2$ МПа·м^{1/2}, $d = 0,124$ мм, $h \approx 2$ мм) [11], показаны на рис. 2 точками, теоретическая кривая построена с использованием формулы (18).

Для частного случая кольцевой нагрузки $k = 0$ в соответствии с критерием Ирвина разрушающая нагрузка для дисковидной трещины равна

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^{3/2}. \quad (19)$$

Различие значений критической нагрузки, вычисленных согласно точному решению (13) и приближенному решению (19), не превышает 10 %, если $2a \geq 18d$.

Уравнение энергетического баланса для определения наименьшей нагрузки, при которой начинает распространяться трещина, в данном случае (при $k = 0$) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial a} (W + U) = 0, \quad (20)$$

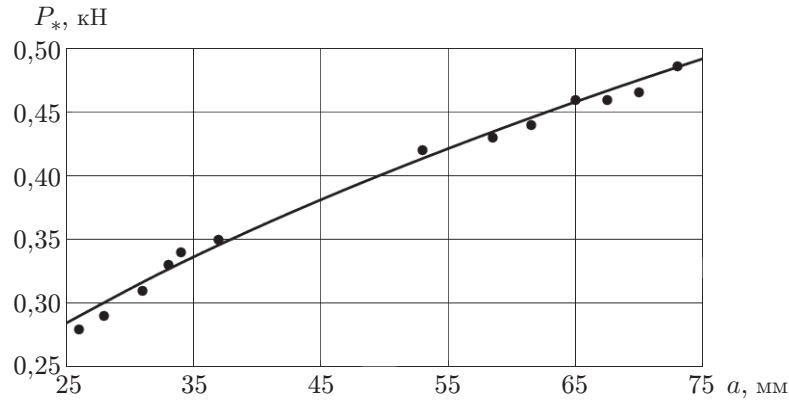


Рис. 2. Зависимость предельной нагрузки (силы) от половины длины трещины: линия — результаты расчета по формуле (18), точки — экспериментальные данные для силикатного стекла

где W — потенциальная энергия упругой деформации, обусловленная раскрытием трещины радиусом a ; U — поверхностная энергия трещины. Энергию деформации можно найти из выражения [7]

$$W = \frac{2\pi^2(1-\nu^2)}{E} \int_0^a [g(t)]^2 dt, \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{rp(r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Выражение для нагрузки на берегах имеет следующий вид:

$$p(\rho) = \frac{P}{2\pi\rho} \delta(\rho).$$

Тогда $g(t) = P/(\pi^2 t)$. Отсюда следует

$$W = \frac{2(1-\nu^2)P^2}{\pi^2 E a}.$$

Поверхностная энергия определяется равенством

$$U = 2\gamma\pi a^2,$$

где γ — плотность поверхностной энергии, затрачиваемой на разрушение (константа материала).

Из (20) находим предельную по Гриффитсу силу

$$P_* = \sqrt{2\gamma E(\pi a)^3/(1-\nu^2)}. \quad (21)$$

С учетом равенства $K_{Ic} = \sqrt{2\gamma E/(1-\nu^2)}$, выражающего эквивалентность силового и энергетического подходов в линейной механике разрушения (плоская деформация), (21) запишем в виде $P_* = K_{Ic}(\pi a)^{3/2}$. Это выражение соответствует величине критической нагрузки, получаемой с использованием критерия Ирвина.

В аналогичной плоской задаче [11]

$$P_* = \sqrt{2\gamma E\pi l/(1-\nu^2)}, \quad (22)$$

где l — половина длины трещины (толщина пластины принята равной единице).

Из (21), (22) следует ограниченность критериев Ирвина и Гриффитса при $a \rightarrow 0$, $l \rightarrow 0$. (Заметим, что в экспериментах с образцами из листового стекла [11] равенство (22) использовалось для трещин с минимальной длиной $2l \approx 5$ см.) Двумерный структурный критерий позволяет получить конечное значение предельной нагрузки при $a \rightarrow 0$: $P_* = \sigma_c \pi d^2$, соответствующее статическому пределу прочности при растяжении.

При $a = 0$ зона предразрушения представляет собой круг радиусом d . При $\eta \rightarrow 1$ (трещина бесконечно большой длины) для устойчиво распространяющихся трещин ($dK_I/da < 0$), как следует из (13), $p_*/\sigma_c \rightarrow \infty$, поэтому предельная нагрузка растет с увеличением размера трещины. Следует отметить, что критерий фиктивной трещины и градиентный критерий (см., например, [12, 13]) не обеспечивают предельный переход к бездефектному материалу при $\eta \rightarrow 0$. В этом случае для оценки критической нагрузки для тела с малым макродефектом необходимо построить интерполяционные кривые, что, по сути, является подгонкой под конкретный материал и эксперимент. Критерий граничного напряжения в задачах с сингулярными точками применялся также в [14], но вместо компонент тензора напряжений использовались эквивалентное напряжение и его градиент.

Заключение. Двухкритериальная (двухпараметрическая) диаграмма разрушения позволяет соотнести понятия длинных и коротких трещин с отношением a/d . Для коротких трещин определяющим является критерий критического напряжения, для длинных — критерий критического коэффициента интенсивности напряжений. Такие диаграммы, как правило, используются в качестве критерия прочности, при этом часто используются полуэмпирические коэффициенты. В данной работе диаграмма получена в результате применения структурного критерия с учетом точного представления напряженного состояния на продолжении трещины.

Для случая сосредоточенной нагрузки на берегах трещины показано, что результаты, полученные с использованием локальных критериев прочности и трещиностойкости, предполагающих достижение предельного состояния в определенной точке или сечении, оказываются неверными. Если в плоской задаче предельное состояние достигается на всем фронте трещины, то в пространственной задаче точки фронта, удаленные от точки приложения нагрузки, не вовлечены в процесс распространения трещины. Требуется выполнение критериального соотношения на некотором конечном отрезке фронта трещины. В данном случае таким отрезком служит структурная характеристика прочности материала d , являющаяся комбинацией стандартных параметров прочности и трещиностойкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ando K., Kim B. A., Iwasa M., Ogura N. Process zone size failure criterion and probabilistic fracture assessment curves for ceramics // *Fatigue Fracture Engng Materials Structures*. 1992. V. 15, N 2. P. 139–149.
2. Dowling A. R., Townley C. H. A. The effect of defects on structural failure: a two-criteria approach // *Intern. J. Pressure Vessels Piping*. 1975. V. 3, N 2. P. 77–107.
3. Harrison R. P. A unified approach to failure assessment of engineering structures // *Fracture mechanics in engineering practice* / Ed. by P. Stanely. L.: Appl. Sci. Publ. Ltd., 1977. P. 69–82.
4. Ziliukas A. Two parametrical fracture criterion // *Пробл. прочности*. 2006. № 4. С. 56–63.
5. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968.
6. Слепян Л. И. Механика трещин. 2-е изд. Л.: Судостроение, 1990.
7. Sneddon I. N. A note on the problem of the penny-shaped crack // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1965. V. 61, pt 2. P. 609–611.
8. Петров Ю. В., Смирнов В. И. О прочности материалов с малыми дефектами // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2006. № 4. С. 165–177.

9. **Смирнов В. И.** Структурный подход в задачах предельного равновесия хрупких тел с концентраторами напряжений // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 162–172.
10. **Dyskin A. V.** Crack growth criteria incorporating non-singular stresses: Size effect in apparent fracture toughness // Intern. J. Fracture. 1997. V. 83, N 2. P. 191–206.
11. **Панасюк В. В., Ковчик С. Е.** Влияние поверхностно-активной среды на поверхностную энергию хрупкого тела // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 1. С. 82–85.
12. **Сукнев С. В.** Критерий фиктивной трещины: преимущества и ограничения // Завод. лаб. 2009. Т. 75, № 10. С. 45–51.
13. **Сукнев С. В.** Критерий локальной прочности // Пробл. прочности. 2004. № 4. С. 108–124.
14. **Садиков П. В.** Новое предложение к проверке прочности в сингулярных точках тела // Вестн. гражд. инженеров. 2011. № 4. С. 64–68.

*Поступила в редакцию 20/IX 2021 г.,
после доработки — 21/X 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*
