УДК 539.3

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

С. А. Лурье[*,**], П. А. Белов[*]

[*] Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия
[**] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия
E-mails: salurie@mail.ru, belovpa@yandex.ru

Предложен метод построения вариационных моделей сплошных сред для обратимых и необратимых процессов на основе обобщенного принципа Гамильтона — Остроградского, сводящегося к принципу стационарности для неинтегрируемой вариационной формы для пространственно-временного континуума. Для диссипативных процессов соответствующая линейная вариационная форма строится в виде суммы вариации лагранжиана обратимой части и линейной комбинации каналов диссипации необратимых физически нелинейных процессов. Рассмотрены примеры использования вариационного подхода для описания гидродинамических моделей. Построены соответствующие вариационные модели гидродинамики Дарси, линейной гидродинамики Навье — Стокса, гидродинамики Бринкмана, градиентной гидродинамики и некоторого обобщения классической нелинейной гидродинамики Навье — Стокса. Для моделирования необратимых процессов гидромеханики с учетом связанности процессов деформирования и сопутствующих физических процессов теплопереноса предлагается использовать вариационный формализм для пространственно-временного континуума, где пространственные и временные процессы рассматриваются одновременно и согласованно, так как нормированное время является координатой.

Ключевые слова: вариационные модели, неинтегрируемые вариационные формы, необратимые процессы, пространственно-временной континуум, связанная гидродинамика и теплоперенос, уравнения Дарси, уравнения Бринкмана, уравнения теплового баланса.

DOI: 10.15372/PMTF20210515

Введение. Вариационный подход в механике деформируемых сред является одним из фундаментальных, поскольку он не только обеспечивает корректность и полноту формулировок математических постановок для различных моделей сред, корректность учета влияния связанных термомеханических эффектов, но и является основой численных методов решения прикладных задач. В случае обратимых процессов модели обобщенных сред полностью определяются плотностью потенциальной энергии, структура выражения для которой зависит от ряда обобщенных переменных. Необратимые процессы, к числу которых, очевидно, относятся процессы упругопластического деформирования и гидродинамические процессы для вязких жидкостей, рассмотрены в [1–7]. Для построения вариационных моделей необратимых процессов часто вводится не вполне обоснованное понятие диссипативной функции (см., например, [2, 3, 8, 9]). Значительный интерес к моделям

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-41-04404).

гидродинамики жидкости различной сложности обусловлен, в частности, моделированием капиллярно-пористых структур [4, 5, 10, 11]. Необходимость развития фундаментальных строгих подходов и обобщений в задачах гидродинамики при постановке начально-краевых условий отмечалась в работах [12, 13].

Большое количество частных моделей, описывающих локальные тепловые эффекты в тепловых трубках, приведено в [6, 8–10]. В работах [8–11] предложены одномерные модели для описания течения жидкости. В частности, используются модели гидродинамики Дарси. Некоторые их обобщения представлены в работах [14, 15].

Проблемы, связанные с обобщением термодинамики, учетом градиентных, масштабных эффектов, термомеханических связанных процессов представляются весьма сложными и в настоящее время не решены в полной мере. Например, известно, что даже классическая теория теплопереноса является недостаточной для описания процесса распространения тепла при низких температурах [16] и для определения термоупругих характеристик малоразмерных систем [17, 18]. Эти проблемы, а также задачи моделирования связанных процессов термодинамического деформирования тщательно исследуются и обобщаются. Как правило, процессы теплопереноса связаны с иными физическими необратимыми процессами. Например, в работах [19–21] показано, что время релаксации в законе теплопроводности Максвелла — Каттанео может определяться вязкоупругими свойствами среды. В полной мере неизвестно, что является более важным: учет градиентных (масштабных) эффектов или учет эффектов связанности и нелинейных эффектов. Представляется, что учет этих эффектов важен при построении обобщенных моделей гидродинамики. Например, известно, что модель гидродинамики Бринкмана можно рассматривать как вариант градиентной модели. Попытки учета масштабных эффектов в термодинамических процессах деформирования предпринимались в работах [22–24].

Для решения проблем, возникающих при моделировании связанных процессов термодинамического деформирования сплошных сред, в которых эффекты взаимовлияния механических и тепловых полей могут быть существенными, требуется использовать не только наиболее полные и энергетически согласованные формулировки физических моделей, но и полные формулировки краевых и начальных условий для процессов с учетом диссипации [14, 15]. Использование вариационных моделей позволяет решать эти проблемы корректно. В этом случае модификация моделей для учета, например, масштабных эффектов проводится формально путем увеличения количества аргументов функционала (вариационной формы) различной тензорной размерности и за счет неформальной трактовки и идентификации новых физических характеристик. В работах [25, 26] показано, что перспективными являются модели, основанные на рассмотрении пространственно-временного континуума. В отличие от постулата об изотропности пространства событий, использованного в работах [23, 24, 26], в данной работе предложено исследовать трансверсально-изотропную в направлении орта времени обобщенную среду (пространственно-временной континуум), что является существенным, поскольку традиционная гипотеза изотропности приводит к противоречиям при моделировании импульсов и тепловых потоков в рамках связанной термодинамики.

В данной работе исследуется возможность использования вариационного формализма для описания диссипативных процессов гидродинамики и в рамках традиционного трехмерного моделирования, и с использованием четырехмерного пространственно-временного континуума, в котором время является координатой. Последний подход является наиболее перспективным при моделировании связанных термодинамических процессов деформирования (течения) и теплопереноса. В данной работе показана эффективность использования вариационного принципа Седова [27] для моделирования диссипативных процессов в нелинейных задачах механики, в том числе в нелинейной задаче Навье — Стокса.

1. Вариационные модели необратимых процессов в механике сред. В механике сплошной среды вариационные постановки [28] имеют существенное преимущество: формулировка системы дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих краевых задач заменяется построением одной скалярной функции (функционала) — лагранжиана. Соответствующие дифференциальные уравнения и краевые задачи следуют из условия стационарности этого функционала. Однако принцип стационарности функционала ограничен моделированием исключительно обратимых процессов. В случае моделирования диссипативных процессов принцип стационарности функционала следует обобщить до принципа стационарности неинтегрируемой, линейной по вариациям своих аргументов вариационной формы [14, 27]. В данной работе предлагается использовать вариационный подход для построения моделей сред, в соответствии с которым для необратимых процессов может быть записана вариационная форма, которая в общем случае является неинтегрируемой. Вариационная модель обратимых процессов деформирования полностью определяется аргументами плотности потенциальной энергии, соответственно для необратимых процессов также следует определить аргументы вариационной формы.

Рассмотрим выражение для плотности некоторой вариационной формы δw, которая может быть интегрируемой и неинтегрируемой:

$$\delta W = \int\limits_V \delta w \, dV.$$

Если линейная форма интегрируема, то она может быть рассмотрена в качестве вариации некоторого функционала Лагранжа.

Пусть аргументы плотности линейной формы δw (или действия в случае динамических процессов, зависящих от времени как от параметра) определяются тензорными величинами Q_a, в общем случае имеющими различный ранг. Тогда можно записать выражение для вариации плотности δw:

$$\delta w = P_a \, \delta Q_a, \qquad \delta W = \int\limits_V \delta w \, dV. \tag{1}$$

Здесь V — объем тела; P_a — обобщенные усилия, совершающие возможную работу на введенных обобщенных кинематических переменных Q_a в объеме тела V. Очевидно, аналогично может быть представлена плотность линейной формы δw, определенная на поверхности тела.

Введем тензоры, определяющие физические свойства, которые в общем случае являются нелинейными:

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_a} = C_{ab}(Q) \tag{2}$$

($C_{ab}(Q)$ — тензор обобщенных модулей упругости).

Положим, что форма δw является интегрируемой, т. е. может быть построен функционал $w(Q_a)$, плотность которого определяется аргументами Q_a. Для линейной формы (1) необходимые условия существования плотности функционала $w(Q_a)$ имеют вид

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_b} - \frac{\partial P_b}{\partial Q_a} = 0. \tag{3}$$

Следовательно, в силу (2), (3) необходимым условием интегрируемости является симметрия тензоров обобщенных модулей упругости

$$C_{ab} = C_{ba}. \tag{4}$$

В этом случае с учетом (2), (4) можно записать

$$\delta w = P_a\,\delta Q_a. \tag{5}$$

Если определяющие соотношения являются линейными (физические параметры не зависят от параметров деформации), то имеют место линейные уравнения закона Гука $P_a = C_{ab}Q_b$. Соответственно с учетом (5) для линейных обратимых процессов получаем

$$\delta W = \int\limits_V \delta w\,dV = \int\limits_V \frac{1}{2}\,\delta(C_{ab}Q_aQ_{ab})\,dV, \qquad \delta w = \frac{1}{2}\,\delta(C_{ab}Q_aQ_{ab}), \tag{6}$$

где W — потенциальная энергия, накопленная в теле объемом V.

В частном случае тензор Q_a может являться тензором дисторсии (деформации) $\{Q_a : R_{i,j}\}$ или тензором кривизн перемещений $\{Q_a : R_{i,jk}\}$ в объеме тела. Тогда тензоры обобщенных силовых факторов также являются тензорами второго ранга (тензор напряжений σ_{ij}) $\{P_a : \sigma_{ij}\}$ или тензорами третьего ранга (тензор моментов m_{ijk}) $\{P_a : m_{ijk}\}$, а тензоры упругих свойств, очевидно, имеют вид тензоров четвертого $\{C_{ab} : C_{ijkm}\}$ или шестого $\{C_{ab} : C_{ijklmb}\}$ ранга.

Из условия (4) следует, что для интегрируемости вариационной формы необходима симметрия тензоров модулей упругости C_{ijkm} относительно перестановки первой и второй пар индексов (для тензоров модулей четвертого ранга в классической теории упругости) или первой и второй троек индексов для тензоров модулей градиентной упругости шестого ранга C_{ijklmb}.

Предположим, что процессам деформирования соответствуют и обратимые и необратимые процессы. Формально необратимым процессам соответствует некоторая вариационная неинтегрируемая форма. Будем считать, что линейная неинтегрируемая форма определяется теми же аргументами, что и интегрируемая, а тензорные объекты Q_a, характеризующие процесс деформирования среды, являются аргументами необратимой части возможной работы внутренних силовых факторов $\delta\bar{U}(Q_a)$ в объеме тела. Для физических необратимых процессов вариационная форма $\delta\bar{U}$, определяющая каналы диссипации, может быть также записана непосредственно. Для этого введем явно условия неинтегрируемости вариационной формы

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_b} - \frac{\partial P_b}{\partial Q_a} = 2E_{ab} \neq 0. \tag{7}$$

Условие (7) означает, что несимметричность тензоров обобщенных модулей E_{ab} обеспечивает неинтегрируемость вариационной формы. В этом случае вариационная форма $\delta\bar{U}$, соответствующая диссипативным процессам, для линейных процессов принимает следующий вид:

$$\delta\bar{U} = \int\limits_V \bar{u}\,dV, \qquad \delta\bar{u} = \frac{1}{2}\,E_{ab}(Q_b\,\delta Q_a - Q_a\,\delta Q_b). \tag{8}$$

В общем случае, когда одновременно происходят и обратимые и необратимые процессы, согласно (3), (7) физические соотношения могут быть представлены в аддитивной форме

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_a} = C_{ab} + E_{ab}, \qquad C_{ab} = C_{ba}, \qquad E_{ab} = -E_{ba}. \tag{9}$$

Вариационная форма для обратимой и необратимой частей процесса может быть представлена в виде аддитивного разложения на интегрируемую δu и неинтегрируемую $\delta\bar{u}$ части:

$\delta w = \delta u + \delta \bar{u}$. Для линейных процессов вариационная форма δW с учетом (6), (8), (9) записывается в виде

$$\delta \bar{W} = \int\limits_V \delta \bar{w}\, dV, \qquad \delta \bar{w} = \delta\, \frac{1}{2}\, C_{ab} Q_a Q_b + \frac{1}{2}\, E_{ab}(Q_b\, \delta Q_a - Q_a\, \delta Q_b). \tag{10}$$

В соответствии с обобщенным принципом Седова [27] в случае необратимых процессов требуется стационарность вариационной формы (10):

$$\delta A - \delta \bar{W} = \delta A - \int\limits_V \delta \bar{w}\, dV = 0 \tag{11}$$

(A — работа внешних сил).

Замечание 1. Аргументами в диссипативной паре могут быть тензорные величины одной тензорной размерности. Тогда интегрируемость и неинтегрируемость вариационных форм для физически линейных процессов определяется симметрией по соответствующей группе индексов тензоров обобщенных модулей упругости четной тензорной размерности. В случае если рассматривается вариационная форма с разной тензорной размерностью обобщенных аргументов, такая вариационная форма записывается через тензор обобщенных модулей упругости нечетной размерности. Например, вариационная форма

$$\delta w = (C_{ijmn} R_{m,n} + C_{ijmnl} R_{m,nl})\, \delta R_{i,j} + (C_{mnijk} R_{m,n} + C_{ijkmnl} R_{m,nl})\, \delta R_{i,jk}$$

записывается через тензоры модулей упругости четвертого, пятого и шестого рангов. Заметим, что условия интегрируемости и неинтегрируемости не накладывают требований симметрии на тензоры модулей упругости нечетного ранга. Однако в этом случае тензор модулей пятого ранга также может быть формально представлен в виде разложения $C_{ijmnl} + E_{ijmnl}$, где модули C_{ijmnl} и E_{ijmnl} соответствуют обратимому диссипативному процессу, а вариационная форма для плотности функционала Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \bar{w} = \delta u + \delta \bar{u} = \frac{1}{2}\, (C_{ijmn} R_{m,n} R_{i,j} + C_{ijmnl} R_{m,nl} R_{i,j} + C_{ijkmnl} R_{m,nl} R_{i,jk}) + \\ + \frac{1}{2}\, [E_{ijmn}(R_{m,n}\, \delta R_{i,j} - R_{i,j}\, \delta R_{m,n}) + E_{ijmnl}(R_{m,nl}\, \delta R_{i,j} - R_{i,j}\, \delta R_{m,nl}) + \\ + E_{ijkmnl}(R_{m,nl}\, \delta R_{i,jk} - R_{i,jk}\, \delta R_{m,nl})]. \end{aligned}$$

Замечание 2. В случае если рассматриваются динамические процессы, в которых время играет роль параметра, в качестве функционала может выступать гамильтоново действие (динамический лагранжиан). Тогда тензорные аргументы функционала q_a и $\dot{q}_a = dq_a/dt$ имеют одну и ту же тензорную размерность и могут образовывать диссипативную пару, например:

$$\delta \bar{u} = E(q_a \delta\, \dot{q}_a - \dot{q}_a\, \delta q_a). \tag{12}$$

В соответствии с обобщенным принципом Гамильтона — Остроградского для необратимых процессов в случае динамических процессов предлагается вместо (11) использовать условие стационарности

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_V \delta w\, dV = 0.$$

Условие стационарности выделяет движение системы (значения всех координат точек системы как функции времени), которое переводит систему из начальной конфигурации, соответствующей моменту времени t_0, в конечную конфигурацию, соответствующую моменту времени t_1. При этом записанный интеграл имеет экстремальное значение. Координаты всех точек системы в моменты времени t_0, t_1 заданы.

Рассмотрим случай обобщенной линейной упругости, полагая, что возможная работа внутренних сил может быть представлена в следующей общей форме:

$$\delta W = \int\limits_V (\sigma_i \, \delta R_i + \sigma_{ij} \, \delta R_{i,j} + \sigma_{ijk} \, \delta R_{i,jk}) \, dV. \tag{13}$$

В случае обратимого процесса по определению может быть записан функционал и найдена его вариация. В случае необратимого процесса может быть представлена только линейная вариационная форма. Предполагается также, что для силовых факторов, тензоров первого, второго и третьего рангов имеют место определяющие соотношения, которые можно разделить на определяющие соотношения обратимых процессов с тензорами модулей упругости C_{im}, C^{α}_{imn}, C^{β}_{imnl}, C^{γ}_{ijkm}, C_{ijkmnl}, $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2, 3$, $\gamma = 2, 3$ и определяющие соотношения диссипативных процессов с тензорами модулей упругости E_{im}, E^{α}_{imn}, E^{β}_{imnl}, E^{γ}_{ijkm}, E_{ijkmnl}, $\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2, 3$, $\gamma = 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= (C_{im} + E_{im}) R_m + (C^1_{imn} + E^1_{imn}) R_{m,n} + (C^1_{imnl} + E^1_{imnl}) R_{m,nl}, \\
\sigma_{ij} &= (C^2_{ijm} + E^2_{ijm}) R_m + (C^2_{ijmn} + E^2_{ijmn}) R_{m,n} + (C^2_{ijmnl} + E^2_{ijmnl}) R_{m,nl}, \\
\sigma_{ijk} &= (C^3_{ijkm} + E^3_{ijkm}) R_m + (C^3_{ijkmn} + E^3_{ijkmn}) R_{m,n} + (C_{ijkmnl} + E_{ijkmnl}) R_{m,nl}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно показать, что из условий интегрируемости вариационной формы (13) следуют условия симметрии тензоров модулей упругости в определяющих соотношениях (14) для обратимой части процесса:

$$\begin{gathered}
C_{im} - C_{mi} = 0, \qquad C^1_{imn} - C^2_{mni} = 0, \qquad C^2_{ijm} - C^1_{mij} = 0, \\
C^1_{imnl} - C^3_{mnli} = 0, \qquad C^3_{ijkm} - C^1_{mijk} = 0, \qquad C^2_{ijmn} - C^2_{mnij} = 0, \\
C^2_{ijmnl} - C^3_{mnlij} = 0, \qquad C^3_{ijkmn} - C^2_{mnijk} = 0, \qquad C_{ijkmnl} - C_{mnlijk} = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Введение явных условий неинтегрируемости приводит к следующим условиям антисимметрии тензоров модулей упругости в определяющих соотношениях (14) для диссипативных процессов:

$$\begin{gathered}
-E_{im} = E_{mi}, \qquad -E^1_{imn} = E^2_{mni}, \qquad -E^2_{ijm} = E^1_{mij}, \\
-E^1_{imnl} = E^3_{mnli}, \qquad -E^3_{ijkm} = E^1_{mijk}, \qquad -E^2_{ijmn} = E^2_{mnij}, \\
-E^2_{ijmnl} = E^3_{mnlij}, \qquad -E^3_{ijkmn} = E^2_{mnijk}, \qquad -E_{ijkmnl} = E_{mnlijk}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Запишем вариационную форму (13), учитывая свойства симметрии тензоров модулей упругости для обратимых процессов (15) и свойства антисимметрии тензоров (16), соответствующих диссипативным процессам. После достаточно очевидных, но громоздких преобразований находим

$$\delta W = \int\limits_V (\sigma_i \, \delta R_i + \sigma_{ij} \, \delta R_{i,j} + \sigma_{ijk} \, \delta R_{i,jk}) \, dV =$$

$$= \delta \Big\{ \frac{1}{2} \int\limits_V [(C_{im} + C_{mi}) R_m R_i + (C^1_{imn} + C^2_{mni}) R_{m,n} R_i + (C^1_{imnl} + C^3_{mnli}) R_{m,nl} R_i +$$

$$+(C^2_{ijmn}+C^2_{mnij})R_{m,n}R_{i,j}+(C^2_{ijmnl}+C^3_{mnijk})R_{m,nl}R_{i,j}+(C_{ijkmnl}+C_{mnlijk})R_{m,nl}R_{i,jk}]\,dV\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_V \big[(E_{im}-E_{mi})(R_m\,\delta R_i - R_i\,\delta R_m)+$$

$$+(E^1_{imn}-E^2_{mni})(R_{m,n}\,\delta R_i - R_i\,\delta R_{m,n})+(E^1_{imnl}-E^3_{mnli})(R_{m,nl}\,\delta R_i - R_i\,\delta R_{m,nl})+$$

$$+(E^2_{ijmn}-E^2_{mnij})(R_{m,n}\,\delta R_{i,j} - R_{i,j}\,\delta R_{m,n})+(E^2_{ijmnl}-E^3_{mnijk})(R_{m,nl}\,\delta R_{i,j} - R_{i,j}\,\delta R_{m,nl})+$$

$$+(E_{ijkmnl}-E_{mnlijk})(R_{m,nl}\,\delta R_{i,jk} - R_{i,jk}\,\delta R_{m,nl})\big]\,dV. \qquad (17)$$

В результате установлено, что для градиентной модели среды второго порядка имеется шесть типов каналов диссипации, каждый из которых после разложения тензоров модулей упругости по базисным тензорам представляется в виде суммы конкретных каналов диссипации с индивидуальными модулями упругости. Покажем, что только пять типов каналов диссипации являются существенными. Действительно, рассмотрим первый канал диссипации, которому соответствует выражение $(E_{im}-E_{mi})(R_m\,\delta R_i - R_i\,\delta R_m)$. Разлагая тензоры второго ранга на пространственную и временную компоненты, получаем

$$(E_{im}-E_{mi})(R_m\,\delta R_i - R_i\,\delta R_m) = (E_1\,\delta^*_{im} + E_2 N_i N_m)(R_m\,\delta R_i - R_i\,\delta R_m) =$$
$$= E_1(r_i\,\delta r_i - r_i\,\delta r_i) + E_2(iv)^2(R\,\delta R - R\,\delta R) = 0,$$

где i — мнимая единица; v — нормирующий множитель, имеющий размерность скорости. Можно показать, что остальные типы каналов диссипации (17) не являются тривиальными.

Следует отметить, что в общем случае для анизотропных материалов допускается существование тензоров механических характеристик сред с нечетным числом индексов при трехмерном описании. Поскольку в целом рассматриваемые процессы диссипативные, можно опустить ограничения, связанные с требованием положительной определенности.

2. Пространственно-временная модель термодинамических процессов в механике сплошных сред. Исследуем возможность использования вариационного формализма для моделирования диссипативных связанных термомеханических процессов для пространственно-временного континуума [22–26]. Введем 4D-вектор перемещений R_i, определяя его следующим образом: первыми тремя компонентами являются пространственные компоненты перемещений 3D-среды r_i, четвертой компонентой — локальное неравномерное время R:

$$R_i = r_i + ivRN_i, \qquad r_k = R_i\,\delta^*_{ik}, \qquad R = R_i N_i/(iv). \qquad (18)$$

Здесь N_i — орт времени; δ_{ij} — тензор Кронекера в 4D-пространстве ($\delta_{ij}\delta_{ij}=4$); $\delta^*_{ij}=\delta_{ij}-N_iN_j$ — тензор Кронекера в 3D-пространстве ($\delta^*_{ij}\delta^*_{ij}=3$); индексы принимают значения от 1 до 4.

Наряду с 4D-вектором перемещений (18) кинематическая модель содержит 4D-тензор второго ранга $R_{i,j}$ [24]:

$$R_{i,j} = r_{i,j} + ivR_{,j}N_i + \dot r_i N_j/(iv) + \dot R N_i N_j,$$
$$r_{i,j} = \gamma_{ij} + \theta\delta^*_{ij}/3 - \omega_p e_{ijpq}N_q, \qquad (19)$$

$$\gamma_{mn} = (\delta^*_{im}\delta^*_{jn}/2 + \delta^*_{in}\delta^*_{jm}/2 - \delta^*_{ij}\delta^*_{mn}/3)r_{i,j}, \quad \theta = r_{i,j}\delta^*_{ij} = r_{m,m}, \quad \omega_p = -r_{i,j}e_{ijps}N_s/2,$$

где $r_{i,j}$ — 3D-тензор дисторсии, представленный в виде разложения на 3D-девиатор (изменение объема $\theta\delta^*_{ij}/3$) и 3D-псевдовектор локальных пространственных вращений $\omega_p e_{ijpq}N_q$;

e_{ijpq} — тензор Леви-Чивиты; $R_{,j} = R_{,i}\delta^*_{ij}$ — пространственный градиент локального неоднородного времени; $\dot{r}_i$ — 3D-вектор скорости; $\dot{R} = R_{,i}N_i$ — энтропия.

Определение внутренних 4D-напряжений σ_{ij} следует из принципа возможных перемещений как силовых факторов, выполняющих возможную работу $\sigma_{ij}\,\delta R_{i,j}$ на возможных кинематических 4D-переменных $\delta R_{i,j}$, в соответствии с соотношениями (19):

$$\sigma_{ij} = \sigma^*_{ij} - ivp_iN_j + q_jN_i/(iv) + TN_iN_j. \qquad (20)$$

Здесь $\sigma^*_{ij} = \sigma_{pq}\delta^*_{ip}\delta^*_{jq}$ — 3D-тензор пространственных напряжений (в классической теории упругости имеющий шесть компонент: $\sigma^*_{ij} = \tau_{ij} + p\delta^*_{ij}$); $\tau_{pq} = \sigma_{ij}(\delta^*_{pi}\delta^*_{qj}/2 + \delta^*_{pj}\delta^*_{qi}/2 - \delta^*_{pq}\delta^*_{ij}/3)$; $p_k = -\sigma_{ij}\delta^*_{ik}N_j/(iv)$ — 3D-вектор импульсов (в общем случае имеющий три компоненты); $q_k = iv\sigma_{ij}N_i\delta^*_{jk}$ — 3D-вектор теплового потока (в общем случае имеющий три компоненты); $T = \sigma_{ij}N_iN_j$ — разность локальной и глобальной температур (в общем случае одна компонента).

Переходя к физической модели, дадим определение тензорного поля модулей обратимых свойств C_{ijmn} (в общем случае нелинейных): $\partial\sigma_{ij}/\partial R_{m,n} = C_{ijmn}$. Напомним, что согласно (3), (4) необходимыми условиями интегрируемости вариационной формы δW являются соотношения $\partial\sigma_{ij}/\partial R_{m,n} - \partial\sigma_{mn}/\partial R_{i,j} = 0$, из которых следует симметрия тензоров относительно перестановки первой и второй пар индексов: $C_{ijmn} = C_{mnij}$. Необходимыми условиями неинтегрируемости вариационной формы $\delta\bar{w}$ являются соотношения (7) и $\partial\sigma_{ij}/\partial R_{m,n} - \partial\sigma_{mn}/\partial R_{i,j} = 2E_{ijmn}$, где E_{ijmn} — тензорное поле в ненулевой правой части условий неинтегрируемости (7).

Рассмотрим случай физически линейных обратимых процессов, когда имеет место стандартная форма плотности потенциальной энергии $u = C_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n}/2$ в 4D-объеме. Определим структуру тензоров модулей упругости C_{ijmn}, характеризующую физические свойства среды. В рассматриваемом 4D-континууме существует выделенное направление — орт времени N_i. Поэтому полагаем, что свойства обобщенной 4D-среды являются трансверсально-изотропными относительно направления времени и разложение тензоров модулей упругости по базисным тензорам имеет вид

$$C_{ijmn} = \lambda\delta^*_{ij}\delta^*_{mn} + \mu(\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + \delta^*_{in}\delta^*_{jm}) + C_1(n_in_j\delta^*_{mn} + \delta^*_{ij}n_mn_n) + {} \\ {} + C_2n_in_jn_mn_n + C_3n_in_m\delta^*_{jn} + C_4\delta^*_{im}n_jn_n + C_5(n_in_n\delta^*_{jm} + \delta^*_{in}n_jn_m). \qquad (21)$$

Тензоры модулей упругости в уравнениях (21), естественно, удовлетворяют условиям потенциальности $C_{ijmn} = C_{mnij}$. Коэффициенты λ и μ являются, очевидно, адиабатическими коэффициентами Ламе классической теории упругости и определяют упругие свойства в классической теории упругости изотропного тела. Пять других постоянных $C_1, \ldots, C_5$ определяют трансверсально-изотропные свойства рассматриваемой среды.

Следует отметить, что результаты, приведенные в п. **1** для градиентной модели и относящиеся к общей структуре каналов диссипации, распространяются на пространственно-временной континуум с учетом того, что дифференцирование должно проводиться по всем координатам, включающим пространственные координаты и координату нормированного времени: $x_4 = ivt$, $\partial/\partial x_4 = (iv)^{-1}\,\partial/\partial t$.

Замечание 3. Обобщение, относящееся к трансверсальной изотропии, представляется важным и вполне мотивированным [23, 24, 26]. Действительно, в соответствии с гипотезой изотропности уравнение теплопроводности не содержит индивидуальные термомеханические характеристики. Указанные противоречия устраняются путем введения трансверсальной изотропии. Более того, для трансверсально-изотропного пространственно-временного континуума тензор напряжений должен быть несимметричным (парность напряжений сохраняется только для пространственных компонент тензора напряжений).

Иначе 3D-вектор импульса p_k и 3D-вектор теплового потока q_k становятся коллинеарными, что противоречит экспериментальным данным. В соответствии с гипотезой Фурье вектор теплового потока должен быть потенциальным, в то время как вектор импульсов в общем случае может иметь 3D-вихри.

В случае диссипативных процессов и обобщенного нелинейного закона Гука можно не разделять обратимые и диссипативные свойства, понимая под тензором $C_{ijmn} + E_{ijmn}$ несимметрированный тензор модулей упругости. Далее этот тензор обозначается через C_{ijmn}.

Рассмотрим обратимый физически нелинейный процесс деформирования, в котором тензор модулей упругости C_{ijmn} является функцией дисторсии: $C_{ijmn} = C_{ijmn}(R_{a,b})$. Тогда, раскладывая C_{ijmn} в ряд Тейлора и удерживая линейные по дисторсиям слагаемые, получаем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} = C_{ijmn} = C^0_{ijmn} + C^1_{ijklmn} R_{k,l} + \ldots;$$

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}}\, dR_{m,n} = (C^0_{ijmn} + C^1_{ijklmn} R_{k,l} + \ldots)\, dR_{m,n}. \tag{22}$$

Соответственно уравнения физически нелинейного закона Гука принимают вид

$$\sigma_{ij} = C^0_{ijmn} R_{m,n} + C^1_{ijklmn} R_{k,l} R_{m,n} + \ldots. \tag{23}$$

Заметим, что представление (23) возможно при выполнении условия интегрируемости (22):

$$C^1_{ijklmn} = C^1_{ijmnkl}. \tag{24}$$

3. Частные случаи вариационных моделей. Приведем некоторые примеры вариационных моделей диссипативных динамических процессов деформирования и гидродинамики, построенных с использованием неинтегрируемых вариационных форм.

3.1. *Качественный анализ уравнений Эйлера.* Запишем вариационное равенство для пространственно-временного континуума, используя принцип возможных перемещений:

$$\delta A - \delta \bar{U} = \delta A - \int\limits_V \sigma_{ij}\, \delta R_{i,j}\, dV =$$
$$= \int\limits_V (\sigma_{ij,j} + P^V_i)\, \delta R_i\, dV + \int\limits_F (P^F_i - \sigma_{ij} n_j)\, \delta R_i\, dF = 0. \tag{25}$$

Здесь n_k — орт нормали к гиперповерхности F, ограничивающей объем пространства событий V.

При вариации вектора перемещений в (25) уравнение движения (уравнение Эйлера) представляет собой векторное 4D-уравнение, пространственные проекции которого являются уравнениями равновесия (движения), а временная проекция — уравнением теплового баланса:

$$(\sigma_{ij,j} + P^V_i)\delta^*_{ik} = 0, \qquad (\sigma_{ij,j} + P^V_i) N_i = 0. \tag{26}$$

Тензор 4D-напряжений в (26) может быть представлен в виде разложения по пространственным, смешанным и временному направлениям. В результате с учетом определения (20) уравнения (26) могут быть записаны в виде

$$\sigma^*_{kj,j} - \dot{p}_k + p^{V*}_k = 0, \qquad q_{n,n} + \dot{T} + p^V = 0. \tag{27}$$

Здесь $P^V_i = p^{V*}_i + p^V N_i/(iv)$; $p^{V*}_i = P^V_j \delta^*_{ji}$ — объемная плотность внешних сил; $p^V = P^V_i N_i/(iv)$ — плотность распределенных по объему источников (стоков) тепловых мощностей.

Частным случаем уравнений движения (27) являются уравнения движения классической механики сплошной среды при условии, что $\sigma^*_{ij} = C_{ijmn} r_{m,n}$, $p_k = \rho \dot{r}_k$.

Другим частным случаем уравнений движения в (27) являются различные обобщения уравнений Навье — Стокса для идеальной несжимаемой жидкости. Действительно, в первом уравнении (27) достаточно учесть, что $\sigma^*_{ij} = p\delta^*_{ij}/3$, $p_k = p_k(r_i, \dot{r}_i, \ldots)$, где $p = \sigma^*_{ij}\delta^*_{ij}$ — давление в среде; $p_i = -\sigma_{mn}\delta^*_{mi}N_n/(iv)$ — 3D-импульс. При различных зависимостях 3D-импульса от 3D-вектора перемещений получаем различные модели уравнений Навье — Стокса. Частным случаем второго уравнения (27), которое представляет собой уравнение теплового баланса, является уравнение классической теплопроводности, если положить $q_n = -(k/c)T_{,n}/(iv)$, где k — теплопроводность; c — удельная теплоемкость среды.

Заметим, что, используя различные варианты нелинейного уравнения закона Гука для импульса и нелинейного уравнения закона Гука для теплового потока, можно построить теории связанных процессов термогидромеханики и теплообмена. Некоторые варианты этих теорий приведены ниже.

3.2. *Модель гидродинамики Дарси.* Наиболее простой моделью гидродинамики является физически линейная модель Дарси [9]. Введем канал диссипации, порождаемой вектором перемещений и вектором скоростей, и покажем, что он определяет гидродинамику Дарси:

$$\delta \bar{U}_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_V \frac{\eta}{h_m^2} \, (r_i \, \delta \dot{r}_i - \dot{r}_i \, \delta r_i) \, dV \, dt. \tag{28}$$

Здесь физические постоянные модели η, h_m^2 — динамическая вязкость жидкости и коэффициент проницаемости Дарси соответственно.

Модель гидродинамики Дарси определяется вариационным уравнением Седова

$$\delta L + \delta \bar{U}_1 = 0,$$

где δL — вариация динамического лагранжиана, являющегося функционалом и содержащего интегрируемую форму; $\delta \bar{U}_1$ — линейная неинтегрируемая вариационная форма (в отличие от первого слагаемого не равная вариации некоторого функционала). Здесь и далее в моделях, рассматриваемых без учета эффектов связанности термомеханических процессов, будем считать, что динамический лагранжиан обратимой части вариационной формы выбран в наиболее простой форме и обеспечивает наличие в уравнениях движения слагаемого с градиентом давления (идеальная жидкость) и силой инерции:

$$L = A - \frac{1}{2} \int_0^t \int_V (K r_{i,i} r_{j,j} - \rho \dot{r}_i \dot{r}_i) \, dV \, dt \tag{29}$$

(K — адиабатический модуль объемного сжатия).

Записывая вариационное уравнение в виде условия $\delta L + \delta \bar{U}_1 = 0$, учитывая (28), (29) и проводя интегрирование по частям, получаем вариационное уравнение для модели Дарси

$$\int_0^t \int_V \Big(-\frac{\eta}{h_m^2} \, \dot{r}_i - \rho \ddot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*} \Big) \, \delta r_i \, dV \, dt + \int_0^t \int_F (p_i^{F*} - p n_i) \, \delta r_i \, dF \, dt + {} \\ + \int_V \Big(\rho \dot{r}_i + \frac{1}{2} \, \frac{\eta}{h_m^2} \, r_i \Big) \, \delta r_i \, dV \Big|_0^t = 0. \tag{30}$$

Уравнения движения в (30) запишем в виде

$$\eta \dot{r}_i = K^D [p_{,i} + (p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i)], \tag{31}$$

где $K^D = h_m^2$ — коэффициент проницаемости Дарси. Три уравнения движения (31) являются уравнениями гидродинамики Дарси.

3.3. *Модель гидродинамики Навье — Стокса.* Для модели Навье — Стокса рассмотрим тот же динамический лагранжиан (29), но выберем другой канал диссипации:

$$\delta\bar{U}_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_V \eta(r_{i,j}\,\delta\dot{r}_{i,j} - \dot{r}_{i,j}\,\delta r_{i,j})\,dV\,dt. \tag{32}$$

Покажем, что использование канала диссипации (32) позволяет построить вариационную модель гидродинамики Навье — Стокса на основе принципа стационарности линейной формы $\delta L + \delta\bar{U}_2 = 0$. Раскрывая вариацию лагранжиана (29) неинтегрируемой вариационной формы в (32) и интегрируя по частям, получаем вариационную модель линейной гидродинамики Навье — Стокса для несжимаемой жидкости

$$\int\limits_0^t\int\limits_V (\eta\,\Delta\dot{r}_i - \rho\ddot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*})\,\delta r_i\,dV\,dt + \int\limits_0^t\int\limits_F (p_i^{F*} - pn_i - \eta\dot{r}_{i,j}n_j)\,\delta r_i\,dF\,dt +$$
$$+ \Big[\int\limits_V \Big(\rho\dot{r}_i - \frac{1}{2}\,\eta\Delta r_i\Big)\,\delta r_i\,dV + \int\limits_F \frac{1}{2}\,\eta r_{i,j}n_j\,\delta r_i\,dF\Big]\Big|_0^t = 0. \tag{33}$$

Заметим, что модель нетрудно обобщить на случай сжимаемой жидкости, вводя более широкий канал диссипации:

$$\delta\bar{U}_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_V \big[\eta(r_{i,j}\,\delta\dot{r}_{i,j} - \dot{r}_{i,j}\,\delta r_{i,j}) + \xi(r_{k,k}\,\delta\dot{r}_{i,i} - \dot{r}_{k,k}\,\delta r_{i,i})\big]\,dV\,dt \tag{34}$$

(ξ — объемная вязкость жидкости). В этом случае из условий стационарности линейной формы с каналами диссипации (34) следуют уравнения линейной гидродинамики Навье — Стокса для сжимаемой жидкости

$$\eta\,\Delta\dot{r}_i + \xi\dot{r}_{kk,i} + p_{,i} + (p_i^{V*} - \rho\ddot{r}_i) = 0. \tag{35}$$

В случае если необходим учет конвективных членов в уравнении Навье — Стокса, следует учесть нелинейную зависимость тензора четвертого ранга в нелинейном законе Гука (23). Можно показать, что среди базисных тензоров шестого ранга C^1_{ijklmn} ($C^1_{ijklmn} = C^1_{ijmnkl}$) существует базисный тензор $\delta^*_{jm}N_n\delta^*_{ik}N_l$, который определяет классический конвективный член. В этом случае соответствующий 4D-тензор напряжений принимает вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}R_{m,n} + \rho\dot{r}_i\dot{r}_j + \ldots .$$

В уравнении движения слагаемое $\rho\dot{r}_i\dot{r}_j$ является дивергентным выражением, соответствующим конвективному члену:

$$\sigma_{ij,j} = C_{ijmn}R_{m,nj} + \rho(\dot{r}_{i,j}\dot{r}_j + \dot{r}_i\dot{r}_{j,j}) + \ldots .$$

В результате нелинейные уравнения Навье — Стокса принимают вид

$$\eta\,\Delta\dot{r}_i + \xi\dot{r}_{m,mi} + p_{,i} - \rho\ddot{r}_i - \rho(\dot{r}_{i,j}\dot{r}_j + \dot{r}_i\dot{r}_{j,j}) + \ldots = 0.$$

Для несжимаемых сред $\dot{r}_i\dot{r}_{j,j} = 0$.

3.4. *Модель гидродинамики Бринкмана.* С учетом обоих рассмотренных выше каналов диссипации (28) и (34) запишем вариационное уравнение модели

$$\delta L + \delta\bar{U}_1 + \delta\bar{U}_2 = 0. \tag{36}$$

Используя процедуру интегрирования по частям, получаем вариационное уравнение обобщенной модели

$$\int_t \int_V \Big(\eta\, \Delta\dot r_i + \xi \dot r_{k,ki} - \frac{\eta}{h_m^2}\,\dot r_i - \rho \ddot r_i + p_{,i} + p_i^{V*}\Big)\,\delta r_i\, dV\, dt + \\ + \int_t \int_F (p_i^{F*} - pn_i - (\eta \dot r_{i,j} + \xi \dot r_{k,k}\delta_{ij})n_j)\,\delta r_i\, dF\, dt + \\ + \Big\{ \int_V \Big[\rho \dot r_i - \frac{1}{2}\,(\eta \Delta r_i + \xi r_{k,ki}) + \frac{\eta}{h_m^2}\, r_i\Big]\,\delta r_i\, dV + \int_F \frac{1}{2}\,(\eta r_{i,j} + \xi r_{k,k}\delta_{ij})n_j\,\delta r_i\, dF\Big\}\Big|_0^t = 0. \quad (37)$$

Уравнениями Эйлера функционала (37) являются уравнения движения жидкости в следующем виде:

$$\eta\, \Delta\dot r_i + \xi \dot r_{k,ki} - \frac{\eta}{h_m^2}\,\dot r_i - \rho \ddot r_i + p_{,i} + p_i^{V*} = 0. \quad (38)$$

Очевидно, что если $h_m \to \infty$, то уравнение (38) переходит в уравнение линейной гидродинамики Навье — Стокса. При $\eta = \xi = 0$ из уравнения (38) следует уравнение модели Дарси.

Как известно, уравнения гидродинамики Дарси определяют постоянный по поперечным координатам профиль скоростей в капилляре, а уравнения Навье — Стокса — параболический профиль скоростей, известный как закон Пуазейля. В обоих случаях невозможно объяснить наличие пограничного слоя, возникающего вблизи стенок капилляра. Обнаружить существование и определить толщину пограничного слоя можно только в рамках гидродинамики Бринкмана (38). При этом уравнения для скорости имеют вид неоднородных уравнений Гельмгольца, описывающих пограничный слой с характерной толщиной, равной h_m. Тогда в определении коэффициента проницаемости K^D параметр h_m имеет смысл толщины “длинного” пограничного слоя, характерного для данной жидкости.

3.5. *Градиентные модели линейной гидродинамики.* Использование вариационных моделей позволяет строить также более общие модели механики сред и гидродинамики, например градиентные модели, описывающие масштабные эффекты. Модель Бринкмана является градиентной моделью, которая строится с использованием каналов (28), (34) с характеристиками, имеющими разные размерности. Эту модель можно обобщить, если модифицировать интегрируемую часть лагранжиана, введя дополнительное слагаемое в выражение для градиентной плотности деформации, и изменить выражение для плотности кинетической энергии, добавив слагаемое, учитывающее инерцию скоростей дисторсий:

$$L = A + K - U, \qquad U = \frac{1}{2}\int_0^t \int_V (K r_{i,i} r_{j,j} + K l_1^2 r_{i,ik} r_{j,jk} + K l_2^2\, \Delta r_i\, \Delta r_i)\, dV\, dt, \\ K = \frac{1}{2}\int_0^t \int_V (\rho \dot r_i \dot r_i + \xi \dot r_{i,i} \dot r_{j,j} + \eta \dot r_{i,j} \dot r_{i,j})\, dV\, dt. \quad (39)$$

Используя для расширенного лагранжиана (39) вариационное уравнение Седова, получаем вариационную градиентную модель Бринкмана, математическая формулировка которой включает модифицированные уравнения движения

$$\eta \dot r_{i,jj} + \xi \dot r_{j,ji} - (\eta/h^2)\dot r + p_{,i} + P_V - (l_1^2 + l_2^2)\Delta p_{,i} - \rho \ddot r_i + \xi \ddot r_{k,ki} + \eta \Delta \ddot r_i = 0, \quad (40)$$

три краевых альтернативных условия на поверхности, ограничивающей среду:

$$\int_0^t \int_F \{p_i^{F*} - pn_i - K r_{k,k} n_i - K l_1^2[(r_{m,mk} n_k)_{,i} + (r_{m,mk} n_k n_l)_{,l} n_i + r_{j,jkk} n_i] - \\ - K l_2^2[(r_{i,kk} n_j)_{,j} + (r_{i,kk} n_j n_l)_{,l} n_j + r_{i,kkj} n_j] + \\ + [\xi \ddot r_{k,k}\delta_{ij} + \eta \ddot r_{i,j} - (\eta \dot r_{i,j} + \xi \dot r_{k,k}\delta_{ij})] n_j\}\,\delta r_i\, dF\, dt = 0, \quad (41)$$

три моментных градиентных альтернативных граничных условия на поверхности среды

$$\int_0^t \int_F [l_1^2(p_{,k}n_k n_i) + Kl_2^2 r_{i,kk}]\,(\delta r_{i,q}n_q)\,dF\,dt = 0 \qquad (42)$$

и три альтернативных начально-краевых условия

$$\Big[\int_V \{\rho\dot r - (\xi\dot r_{k,ki} + \eta\dot r_{i,jj}) - [(\eta/h^2)r_i - \eta r_{i,jj} - \xi r_{j,ji}]\}\,\delta r_i\,dV\Big]\Big|_0^t +$$

$$+\Big[\int_F [\xi\dot r_{k,k}n_i + \eta\dot r_{i,j}n_j - (\eta r_{i,j}n_j + \xi r_{j,j}n_i)]\,dF\,\delta r_i\Big]\Big|_0^t = 0. \qquad (43)$$

Заметим, что из обобщенного принципа Седова следует замкнутая математическая постановка задачи (40)–(43), при этом вместо начальных условий формулируются два альтернативных временных краевых условия (43).

Нетрудно построить градиентную вариационную модель более высокого порядка, в которой градиентная составляющая определяется диссипативной частью вариационной формы. Действительно, рассмотрим частную градиентную модель с интегрируемой формой простого вида (29). В качестве неинтегрируемой формы рассмотрим форму, порождаемую четырьмя каналами диссипации:

$$\delta\bar U = \frac12\int_0^t\int_V [(\eta/h^2)(r_i\,\delta\dot r_i - \dot r_i\,\delta r_i) + \eta(r_{i,j}\,\delta\dot r_{i,j} - \dot r_{i,j}\,\delta r_{i,j}) +$$

$$+\,\xi(r_{k,k}\,\delta\dot r_{i,i} - \dot r_{k,k}\,\delta r_{i,i}) + \eta h_g^2(r_{i,j}\,\delta\Delta\dot r_{i,j} - \Delta\dot r_{i,j}\,\delta r_{i,j})]\,dV\,dt. \qquad (44)$$

В результате из условия стационарности неинтегрируемой вариационной формы следует вариационная градиентная линейная модель Навье — Стокса, в которой система линейных уравнений Навье — Стокса расширена до системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$-\eta h_g^2\,\Delta\Delta\dot r_i + \eta\,\Delta\dot r_i - (\eta/h^2)\dot r_i + p_{,i} + p_i^{V*} - \rho\ddot r_i = 0.$$

Очевидно, что неинтегрируемая форма (44) не является достаточно общей, однако используемые в ней каналы позволяют получить некоторые качественные результаты, в частности объяснить существование дополнительного масштабного эффекта типа “короткого” градиентного пограничного слоя с характерной длиной h_g.

4. Общий алгоритм построения вариационных моделей необратимых связанных процессов гидродинамики и теплопереноса. Сформулируем общий алгоритм построения вариационных моделей необратимых связанных процессов гидродинамики и теплопереноса. Для этого, учитывая приведенные выше примеры, следует указать общую структуру каналов диссипации в 4D-пространстве и использовать какую-либо вариационную модель обратимых связанных термодинамических процессов для 4D-континуума. Например, можно использовать одну из обратимых моделей расширенной термодинамики, предложенных в работе [24] (см. также [15]). Достаточно полной представляется вариационная модель обратимой термодинамики пространственно-временного континуума с плотностью потенциальной энергии вида $2U^V = C_{ijnm}R_{i,j}R_{n,m} + 2C_{ijk}R_{i,j}R_k + C_{ij}R_iR_j$ [24]. Эта модель является согласованной с известными соотношениями термомеханики включая классический закон Дюамеля — Неймана $p = K_T(r_{m,m} - \alpha T)$ (α — коэффициент температурного расширения; K_T — изотермический модуль изменения объема), позволяет получить обобщенный закон для теплового потока типа закона Максвелла — Каттанео

$q_k + \tau\dot{q}_k = -k_V(K/K_T)T_{,k} - k_V p_{,k}(K - K_T)/K_T(K_T\alpha)$ и построить связанную краевую задачу динамической термоупругости для обобщенного уравнения движения среды

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \mu\,\Delta\boldsymbol{r} + (K_T\alpha)\,\mathrm{grad}\,T - \rho\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{P} = 0$$

и гиперболического уравнения теплопроводности вида

$$k_V\,\Delta T - \tau\ddot{T} - (k_V/l_T^2)T + k_V A\,\Delta r_{m,m} - A[\tau^{-1} + (k_V/l_T^2)]r_{m,m} = \psi + \tau\dot{\psi}.$$

Здесь $\lambda_T = \lambda - (K - K_T)$; λ, μ — коэффициенты Ламе; ρ — плотность; $\boldsymbol{P}$ — вектор плотности заданных объемных сил; K — адиабатический объемный модуль; k_V, τ — теплопроводность и время релаксации соответственно; $A = (K - K_T)/(K_T\alpha)$; ψ — плотность источников тепла, распределенных в объеме тела.

Рассмотрим каналы диссипации, построенные с использованием аргументов R_m, $R_{i,j}$, определяемых обобщенным вектором перемещений и обобщенным тензором дисторсий (17), где тензор диссипативных модулей упругости третьего ранга E_{ijm} может быть представлен в виде разложения по базисным тензорам:

$$E_{ijm} = g_1\delta^*_{ij}N_m + g_2\delta^*_{jm}N_i + g_3\delta^*_{mi}N_j + g_4N_iN_jN_m. \tag{45}$$

С учетом (45) в рассматриваемом случае число каналов диссипации равно четырем:

$$(E^1_{imn} - E^2_{mni})(R_{m,n}\,\delta R_i - R_i\,\delta R_{m,n}) = g_1(\dot{r}_i\,\delta r_i - r_i\,\delta\dot{r}_i)/(iv) + \\ + g_2(r_{m,m}\,\delta R - R\,\delta r_{m,m})(iv) + g_3(R_{,i}\,\delta r_i - r\,\delta R_{,i})(iv). \tag{46}$$

Первый канал в (46) определяет диссипативные эффекты гидродинамики (модель Дарси), следующие два канала диссипации в (46) моделируют связанные термомеханические диссипативные эффекты, так как термодинамическая переменная R определяет вклад процессов теплопереноса в уравнения движения среды (при вариации вектора пространственных перемещений r_i). В то же время вследствие наличия в уравнении теплопереноса (при вариации R) слагаемых, содержащих тензор дисторсии, задача становится связанной. Заметим, что в общем случае переменная R связана с температурой T через линейный оператор (в частности, $T \sim \dot{R}$), а градиент R определяет обобщенный тепловой поток) (см., например, [24]). Последний канал диссипации в (46) моделирует немеханические диссипативные процессы в уравнении теплопереноса.

Рассмотрим следующий тип каналов диссипации (17), которые строятся с использованием обобщенных дисторсий:

$$\delta\bar{U}_2 = \int\limits_V E_{ijmn}(R_{i,j}\,\delta R_{m,n} - R_{m,n}\,\delta R_{i,j})\,dV = \int\limits_V (E_{mnij} - E_{ijmn})R_{m,n}\,\delta R_{i,j}\,dV. \tag{47}$$

Используем разложение тензоров E_{ijmn} по базисным тензорам, несимметричным по первой и второй парам индексов:

$$E_{mnij} - E_{ijmn} = E_1(\delta^*_{ij}N_mN_n - \delta^*_{mn}N_iN_j) + E_2(\delta^*_{in}N_jN_m - \delta^*_{jm}N_iN_n). \tag{48}$$

В результате с учетом (48) из (47) получаем

$$(E_{mnij} - E_{ijmn})R_{m,n} = 2E_1(\dot{R}\,\delta r_{k,k} - r_{k,k}\,\delta\dot{R}) + 2E_2(R_{,i}\,\delta\dot{r}_i - \dot{r}_i\,\delta R_{,i}). \tag{49}$$

Таким образом, число каналов диссипации второго типа равно двум. Каналы диссипации (49) являются новыми и определяют диссипативные эффекты связанности в уравнениях теплопереноса и гидродинамики.

Следуя (17), рассмотрим тип каналов диссипации $(E^1_{imnl} - E^3_{mnli})(R_{m,nl}\,\delta R_i - R_i\,\delta R_{m,nl})$. Используя разложения тензоров модулей $E^1_{imnl} - E^3_{mnli}$ по базисным тензорам, можно показать, что каналы диссипации этого типа определяют семь каналов диссипации, записанных с точностью до постоянных диссипативных модулей e_i:

$$(E^1_{imnl} - E^3_{mnli})(R_{m,nl}\,\delta R_i - R_i\,\delta R_{m,nl}) = e_1(\Delta r_i\,\delta r_i - r_i\,\delta\Delta r_i) + e_2(r_{j,ji}\,\delta r_i - r_i\,\delta r_{j,ji}) + \\ + e_3(\ddot{r}_i\,\delta r_i - r_i\,\delta\ddot{r}_i) + e_4(\dot{R}_{,i}\,\delta r_i - r_i\,\delta\dot{R}_{,i}) + e_5(\dot{r}_{i,i}\,\delta R - R\,\delta\dot{r}_{i,i}) + \\ + e_6(\Delta R\,\delta R - R\,\delta\Delta R) + e_7(\ddot{R}\,\delta R - R\,\delta\ddot{R}). \quad (50)$$

Первые три канала в (50) определяют диссипативные процессы в уравнениях движения, последние два — диссипативные процессы в уравнениях теплообмена, а остальные два — связанные диссипативные процессы. Аналогично можно показать, что еще один тип каналов диссипации в (17) $(E^2_{ijmnl} - E^3_{mnijk})(R_{m,nl}\,\delta R_{i,j} - R_{i,j}\,\delta R_{m,nl})$ дает дополнительно 18 каналов диссипации, семь из которых определяют диссипативные процессы в уравнениях движения, три — в уравнениях теплообмена, а остальные восемь — связанные диссипативные процессы. Следует отметить, что среди этих каналов диссипации имеются каналы $\eta(\dot{r}_{j,i}\,\delta r_{i,j} - r_{i,j}\,\delta\dot{r}_{j,i})$, $\xi(\dot{r}_{j,j}\,\delta r_{i,i} - r_{i,i}\,\delta\dot{r}_{j,j})$, определяющие линейные модели гидродинамики Дарси и Бринкмана.

Последний тип каналов диссипации в (17) определяет градиентные эффекты более высокого порядка и в данной работе не рассматривается.

Заключение. Построенный в работе алгоритм позволяет учесть градиентные эффекты за счет введения масштабных характерных параметров в градиентную часть интегрируемой и неинтегрируемой составляющих вариационной формы. Сложность модели зависит от аргументов функционала в неинтегрируемой вариационной форме и от структуры выражений для модулей упругости. Модель, в которой используется пространственно-временной континуум, обеспечивает наиболее полный учет эффектов связанности и является термодинамически согласованной.

Предлагаемый подход позволяет построить связанные вариационные модели диссипативных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Матвеенко В. Н., Кирсанов Е. А.** Вязкость и структура дисперсных систем // Вестн. Моск. ун-та. 2011. Сер. 2. Химия. Т. 66, № 4. С. 243–276.
2. **Ковтун Ал. А.** Об уравнениях модели Био и их модификациях // Вопр. геофизики. 2011. Вып. 44, № 4. С. 3–25.
3. **Biot M. A.** Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. P. 1482–1498.
4. **Kaya T., Goldak J.** Numerical analysis of heat and mass transfer in the capillary structure of a loop heat pipe // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2006. V. 49. P. 3211–3220.
5. **Sonar R., Hardman S., Pell J., et al.** Transient thermal and hydrodynamic model of flat heat pipe for the cooling of electronics components // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 6006–6017.
6. **Storring S.** Design and manufacturing of loop heat pipes for electronics cooling: Diss. Ottawa: Carleton Univ., 2006.
7. **Аннин Б. Д., Коробейников С. Н.** Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 21–34.
8. **Babin B. R., Peterson G. P., Wu D.** Steady-state modeling and testing of micro heat pipe // J. Heat Transfer. 1990. V. 112. P. 595–601.

9. **Darcy H.** Les fontaines publiques de la ville de Dijon. P.: V. Dalmont, 1856.
10. **Lefevre F., Lallemand M.** Coupled thermal and hydrodynamic models of flat micro heat pipes for the cooling of multiple electronic components // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2006. V. 49. P. 1375–1383.
11. **Sieder B., Sartre V., Lefevre F.** Literature review: Steady-state modelling of loop heat pipe // Appl. Thermal Engng. 2015. V. 75. P. 709–723.
12. **Pukhnachev V. V.** Viscous flows in domains with a multiply connected boundary // New directions in mathematical fluid mechanics. Basel: Birkhauser Verlag, 2010. P. 333–348.
13. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
14. **Belov P. A., Lurie S. A.** On variation models of the irreversible processes in mechanics of solids and generalized hydrodynamics Lobachevskii // J. Math. 2019. V. 40, N 7. P. 896–910.
15. **Belov P. A., Altenbach H., Lurie S. A., et al.** Generalized Brinkman-type fluid model and coupled heat conductivity problem // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 8. P. 1786–1799.
16. **Joseph D. D., Preziosi L.** Heat waves // Rev. Modern Phys. 1989. V. 61. P. 41–73.
17. **Lepri S., Livi R., Politi A.** Thermal conduction in classical low-dimensional lattices // Phys. Rep. 2003. V. 377. P. 1–80.
18. **Dhar A.** Heat transport in low-dimensional systems // Adv. Phys. 2008. V. 57. 457.
19. **Moran Wang, Bin-Yang Cao, Zeng-Yuan Guo.** General heat conduction equations based on the thermomass theory // Frontiers Heat Mass Transfer. 2010. V. 1. 013004.
20. **Соболев С. Л.** Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5–29.
21. **Sobolev S. L.** Rapid phase transformation under local non-equilibrium diffusion conditions // Materials Sci. Technol. 2015. V. 31, N 13. P. 1607–1617.
22. **Lurie S., Belov P.** From generalized theories of media with fields of defects to closed variational models of the coupled gradient thermoelasticity and thermal conductivity // Adv. Structured Materials. 2019. V. 120. P. 135–154.
23. **Lurie S. A., Belov P. A.** Theory of space-time dissipative elasticity and scale effects // NanoMMTA. 2013. V. 2. P. 166–178.
24. **Lurie S. A., Belov P. A.** On the nature of the relaxation time, the Maxwell — Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity // Continuum Mech. Thermodynamics. 2020. V. 32. P. 709–728.
25. **Белов П. А., Горшков А. Г., Лурье С. А.** Вариационная модель неголономных 4D-сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. Т. 6. С. 29–46.
26. **Белов П. А., Лурье С. А.** Идеальная несимметричная 4D-среда как модель обратимой динамической термоупругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. Т. 52. С. 243–276.
27. **Седов Л. И.** Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 5, № 125. С. 121–180.
28. **Ланцош К.** Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 13/VIII 2021 г.,
после доработки — 13/VIII 2021 г.
Принята к публикации 30/VIII 2021 г.