

УДК 532.6

DOI: 10.15372/PMTF202315342

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

А. В. Бойко*, Н. В. Демиденко*,**

* Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
Новосибирск, Россия

E-mails: boiko@itam.nsc.ru, n.demidenko@g.nsu.ru

Проведено сравнение аппроксимаций профилей продольной и поперечной компонент скорости пограничного слоя, полученных при расчете обтекания потоком стреловидного крыла и тела вращения на основе полных уравнений Навье — Стокса, профилями пограничного слоя из автомодельного однопараметрического семейства профилей Фокнера — Скэн — Кука и двухпараметрического семейства профилей, предложенного Гастером. Показано существенное преимущество использования аппроксимации расчетных профилей вблизи трехмерного отрыва профилями из двухпараметрического семейства.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, автомодельные решения, метод наименьших квадратов, ANSYS Fluent, LOTRAN, стреловидное крыло, тело вращения

Введение. Существующие газодинамические пакеты программ для расчета нестационарных течений, такие как широко используемый пакет ANSYS Fluent, не позволяют точно рассчитать ламинарно-турбулентный переход в ламинарном сдвиговом течении, что обусловлено невозможностью достаточно точно воспроизвести эволюцию возмущений, встречающихся в аэродинамических приложениях [1]. Как правило, при анализе нарастания малых возмущений такого типа используется теория гидродинамической устойчивости, применимость которой во многом зависит от точности используемых профилей продольной и поперечной компонент скорости в пограничном слое. Это вызвано тем, что данные профили и их первые производные входят в линеаризованные уравнения Навье — Стокса в качестве параметров (см., например, [2]).

В Институте теоретической и прикладной механики (ИТПМ) СО РАН были выполнены расчеты обтекания несжимаемым вязким потоком газа при различных скоростях стреловидного крыла [3] и тела вращения [4], расположенных при различных углах атаки в виртуальной рабочей части аэродинамической трубы. Эти расчеты проводились в пакете ANSYS Fluent для последующего анализа особенностей ламинарно-турбулентного обтекания в пакете программ LOTRAN [5], поэтому большинство пограничных слоев были ламинарными. При этом в пакете LOTRAN при вычислении характеристик устойчивости

Работа выполнена в рамках государственного задания Института теоретической и прикладной механики СО РАН.

пограничного слоя на поверхности обтекаемого потоком тела используется предварительное сглаживание профилей скорости, основанное на применении сглаживающих сплайнов. На практике от выбора параметра гладкости существенно зависит точность получаемого результата, поэтому необходимо предварительное тестирование с помощью синтетических данных. В данной работе для увеличения точности аппроксимации предлагается использовать физически обоснованные профили из двухпараметрического семейства профилей, описанного в [6] и представляющего собой расширенное классическое семейство автомодельных профилей пограничного слоя на стреловидном клине Фокнера — Скэн — Кука.

1. Модельные профили скорости в пограничном слое. Автомодельные решения уравнений двумерного пограничного слоя можно получить при исследовании течений вблизи симметричного клина с углом раствора $\pi\beta$. Введем систему координат, в которой ось x направлена вдоль поверхности клина перпендикулярно передней кромке, ось y — по нормали к поверхности, начало координат расположено на передней кромке. Можно показать [7], что уравнения пограничного слоя имеют автомодельные решения, если скорость потенциального течения пропорциональна степени m расстояния от передней кромки до точки наблюдения: $U_e(x) = u_0 x^m$ (u_0 — произвольная константа; m — вещественное число). Потенциальное течение с таким распределением скоростей реализуется при симметричном обтекании клина, причем $\beta = 2m/(m+1)$. Преобразования подобия для y представляются в виде

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{\nu x}},$$

что позволяет свести уравнения пограничного слоя к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по η) с граничными условиями

$$\eta = 0: \quad f = f' = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1.$$

При этом выражение для продольной компоненты скорости имеет вид

$$\bar{u} = U_e f'(\eta).$$

Параметр β можно интерпретировать как безразмерный градиент давления по продольной координате x : при $\beta > 0$ давление падает (течение ускоряется), при $\beta < 0$ давление возрастает (течение замедляется).

Уравнение Фокнера — Скэн является нелинейным, поэтому теорема единственности решения для него отсутствует. В работе [8] исследовано семейство профилей с монотонно увеличивающейся скоростью по мере удаления от стенки, причем в ускоренных течениях ($m > 0$, $\beta > 0$) f' не имеет точки перегиба, а в замедленных течениях ($m < 0$, $\beta < 0$) такая точка на профиле f' присутствует. Отрыв пограничного слоя происходит при $\beta \approx -0,199$. В данной работе рассматривается только это семейство профилей, соответствующее течению в безотрывном пограничном слое ($\beta \in [-0,199; 1,000]$), несмотря на то что в некоторых диапазонах β существуют другие семейства, в которых скорость немонотонно увеличивается по мере удаления от стенки [9, 10].

Существует большое разнообразие трехмерных течений типа течений в пограничном слое. Типичные пограничные слои, встречающиеся в аэродинамических приложениях, — это слои, образующиеся при обтекании стреловидных крыльев и тел вращения под различными углами атаки. Если продольная скорость потенциального течения зависит от координаты x , но не зависит от z (z — координата, направленная вдоль передней кромки), а скорость поперечного потенциального течения постоянная:

$$U_e = U_e(x), \quad W_e = \text{const},$$

то имеет место частный случай, например при косом обтекании клина. Автомодельные уравнения пограничного слоя для этого случая были впервые описаны в работе [11]: продольная и направленная по нормали к стенке компоненты скорости определяются уравнением Фокнера — Скэн, а поперечная компонента скорости $\bar{w} = W_e g(\eta)$ — из решения линейного дифференциального уравнения

$$g'' + f g' = 0$$

с граничными условиями

$$\eta = 0: \quad g = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad g = 1.$$

Так как это уравнение линейное, каждому решению уравнения Фокнера — Скэн соответствует только одно его решение.

Скорость U_e может меняться не только по степенному закону. В работе [6] для аппроксимации профилей продольной и поперечной компонент скорости предложено использовать модифицированные (двухпараметрические) уравнения, учитывающие изменение градиента давления вдоль потока. В этом случае система уравнений для продольной компоненты скорости имеет вид

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = (2 - \beta)(f' F' - f'' F); \quad (1)$$

$$F''' + 2\beta f' F' + f'' F + f F'' = -\gamma(1 - f'^2), \quad (2)$$

где $F = x \partial f / \partial x$; $\gamma = d\beta/dx$. Граничные условия записываются следующим образом:

$$\eta = 0: \quad f = f' = F = F' = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f' = 1, \quad F' = 0.$$

Таким образом, имеется два параметра β и γ , причем уравнение (1) нелинейное, а уравнение (2) линейное. Параметр γ можно интерпретировать как безразмерную скорость изменения градиента давления по продольной координате x .

Профили поперечной скорости описываются системой линейных относительно g и G уравнений

$$\begin{aligned} g'' + f g' &= -(2 - \beta)(g' F - G f'), \\ G'' + f G' + F g' &= 0 \end{aligned}$$

($G = x \partial g / \partial x$) с граничными условиями

$$\eta = 0: \quad g = G = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad g = 1, \quad G = 0.$$

Как правило, для сравнения различных профилей скорости в трехмерных течениях выбирается система координат, ориентированная вдоль линии тока невязкого потока (см., например, [12]). В данной системе координат поперечная скорость за пределами пограничного слоя обращается в нуль. В этом случае, обозначая скорости вдоль и перпендикулярно невязкой линии тока через u и w , а угол поворота — через Θ , формулы преобразования нормированных скоростей при переходе в новую систему координат можно записать в виде

$$u = f' \cos^2 \Theta + g \sin^2 \Theta, \quad w = (g - f') \cos \Theta \sin \Theta.$$

2. Сравнение расчетных и модельных профилей скорости. Данные об обтекании потоком несжимаемой среды стреловидного крыла и эллипсоида, расположенных в рабочей части аэродинамической трубы при различных углах атаки, получены с помощью пакета ANSYS Fluent в результате численного решения уравнений Навье — Стокса (см. [3, 4]). В пакете LOTRAN вдоль выбранной линии тока для невязкого течения (на краю пограничного слоя) сначала строятся нормали к обтекаемой поверхности, затем данные об основном течении интерполируются в узлы сетки на этих нормалях, сгущающейся вблизи

поверхности (число узлов $N = 70$). Ниже построенные вдоль нормалей профили скорости называются расчетными. Сглаживание расчетных профилей не проводилось.

Системы автомодельных уравнений Фокнера — Скэн — Кука и уравнения для двухпараметрического семейства профилей Гастера решались в среде MATLAB. Использовалась функция MATLAB `bvp4c`, которая позволяет находить с заданной точностью численные решения краевых задач для систем (в том числе нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение определялось в области автомодельной координаты $y \in [0; y_{\max}]$, где $y_{\max} = 10$. Величина $y_{\max}$ выбрана методом проб таким образом, чтобы она превышала толщину рассматриваемых пограничных слоев. Шаг интегрирования выбирался автоматически. Полученные данные интерполировались на сетку, используемую в пакете LOTRAN для расчетных профилей. Полученные профили скорости ниже называются модельными.

Для сравнения аппроксимаций расчетных профилей скорости модельными профилями из одно- и двухпараметрических семейств использовался метод наименьших квадратов. Предварительно расчетные профили скорости нормировались на локальную скорость вне пограничного слоя, а координата вдоль нормали к стенке — на толщину вытеснения. На толщину вытеснения нормировались также координаты, используемые для расчетов модельных профилей скорости. В качестве искомых параметров были выбраны β , γ и Θ . Метод наименьших квадратов реализован с помощью функции MATLAB `lsqnonlin`. Все расчеты выполнялись со стандартными настройками `lsqnonlin`. Для ближайшей к передней кромке нормали диапазоны поиска искомых параметров выбирались достаточно широкими, а в качестве начальных выбирались значения из середины диапазонов. Для ускорения поиска в следующих сечениях ниже по потоку найденные на предыдущем шаге параметры использовались в качестве начальных, а диапазоны поиска сужались. Тесты показали, что при адекватном выборе диапазонов (не очень узких) результаты не меняются.

2.1. *Течение в пограничном слое на стреловидном крыле.* В [3] рассматривалось обтекание потоком модели стреловидного крыла СК-45 с углом стреловидности 45° , установленной в виртуальной рабочей части аэродинамической трубы Т-324 ИТПМ СО РАН. Крыло СК-45 имеет ламинаризованный профиль НАСА 67 1–215 с модифицированной нижней поверхностью [3]. Расчеты сопровождали лабораторный эксперимент, проведенный при тех же условиях. Полученные в расчетах и эксперименте результаты хорошо согласуются [13]. В данной работе приводятся результаты расчетов для профилей скорости вдоль отрезка линии тока, проходящей приблизительно в середине верхней поверхности крыла, при угле атаки $\alpha = -5^\circ$ и скорости набегающего потока $U_\infty = 27$ м/с. Угол атаки выбирался таким образом, чтобы на исследуемой поверхности крыла реализовывалась неустойчивость пограничного слоя по отношению к не очень большим вихрям поперечного течения. В этом случае загромождение виртуальной рабочей части аэродинамической трубы увеличивалось незначительно. Проекция отрезка линии тока на поверхность крыла и нормали к поверхности показаны на рис. 1 в системе координат, связанной с крылом. (Данные получены с помощью пакета LOTRAN.) Отрезок линии тока выбирался таким образом, чтобы он находился преимущественно в области сформированного ламинарного безотрывного пограничного слоя.

На рис. 2 показано изменение вдоль линии тока коэффициента давления

$$c_p = \frac{p_w - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2 / 2}$$

(p_w , p_∞ — статическое давление на стенке и на входе в расчетную область соответственно; ρ_∞ — плотность воздуха). Для рассматриваемого несжимаемого течения коэффициент давления, взятый с обратным знаком, пропорционален квадрату скорости невязкого потока

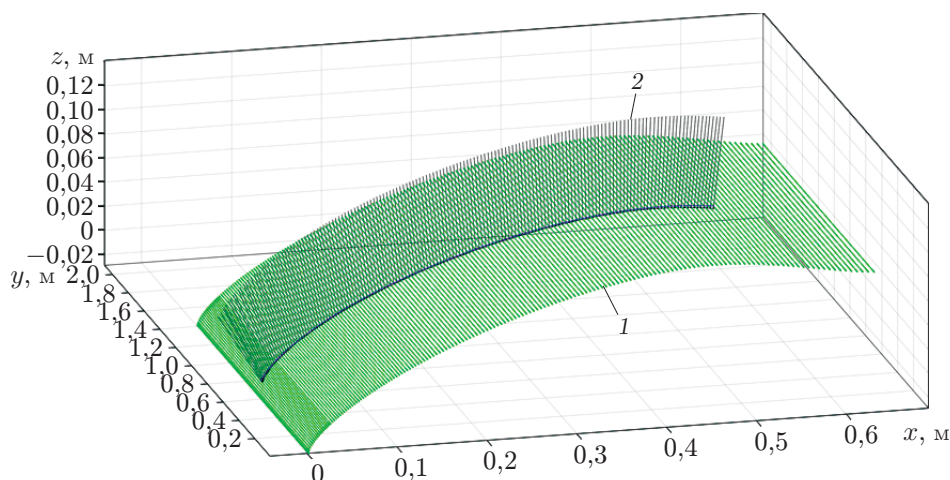


Рис. 1. Проекция выбранной линии тока на поверхность крыла (1) и нормали к поверхности (2) при $U_\infty = 27$ м/с, $\alpha = -5^\circ$

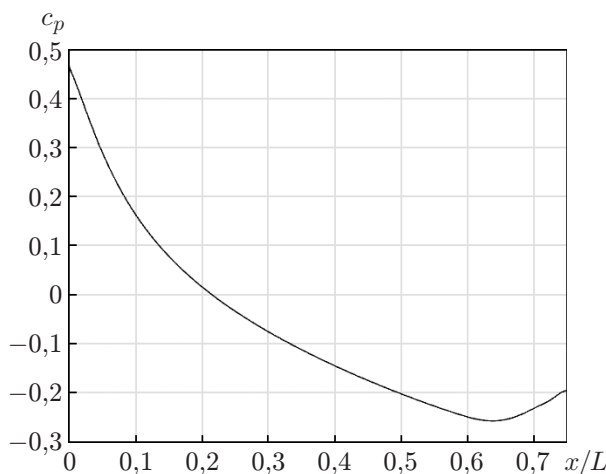


Рис. 2. Распределение коэффициента давления вдоль выбранной линии тока невязкого течения вблизи стреловидного крыла

вблизи стенки (на краю пограничного слоя). Таким образом, при $x/L \leq 0,65$ течение ускоряется, а затем начинает тормозиться.

На рис. 3 показаны распределения продольной и поперечной компонент скорости вдоль выбранной линии тока. Координата x/L соответствует нормированной на $L = 1$ м длине дуги, отсчитываемой в направлении вниз по потоку от начала отрезка линии тока. При $x/L \leq 0,6$ профили скорости имеют вид, характерный для ускоренного течения в области отрицательного градиента давления на стреловидном крыле и стреловидном клине [11]: профили продольной компоненты являются наполненными, профили поперечной компоненты имеют один экстремум, находящийся внутри пограничного слоя и обусловленный наличием поперечного градиента давления. Ниже по потоку, в области, где продольный градиент давления меняет знак, на профилях продольной компоненты скорости образуется характерный изгиб. На профилях поперечной компоненты скорости появляются два экстремума, что вызвано изменением направления поперечного градиента давления относительно выбранной линии тока. Следует отметить, что такие профили характерны для течений на других стреловидных крыльях в других диапазонах скоростей; например, их наличие отмечалось в работе [14].

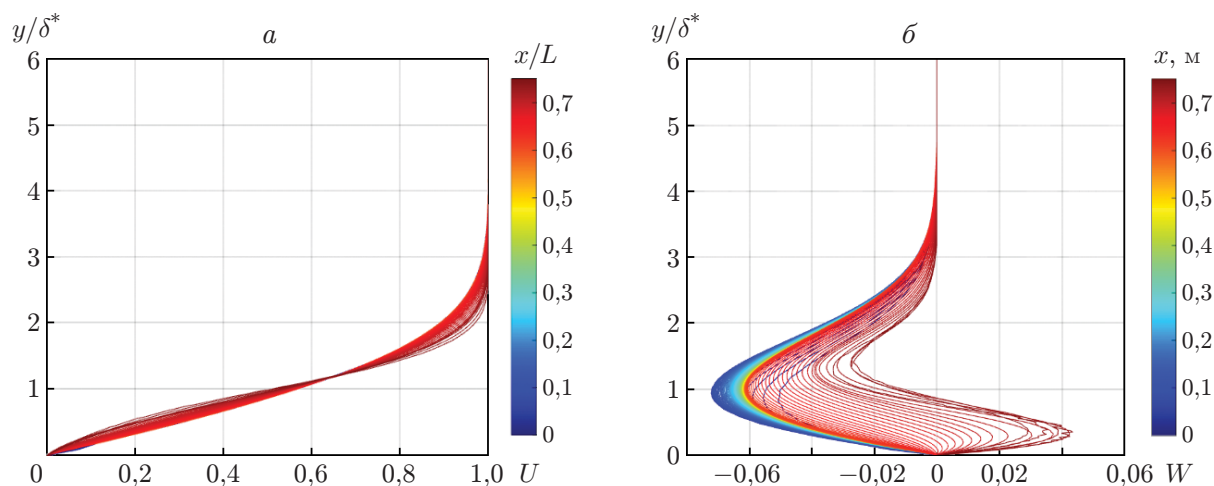


Рис. 3. Профили продольной (а) и поперечной (б) компонент скорости вдоль линии тока при различных значениях координаты x для стреловидного крыла

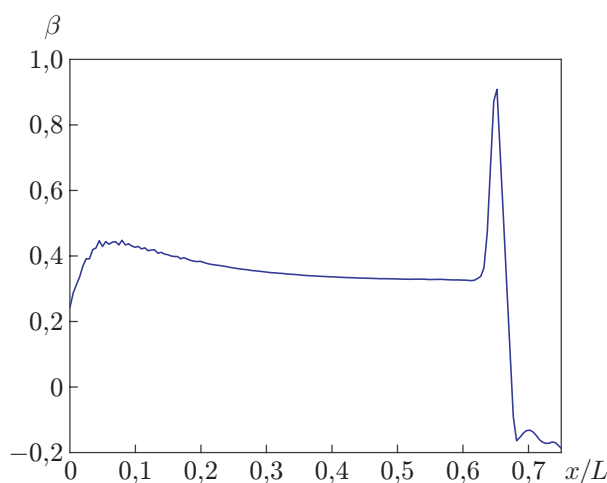


Рис. 4. Распределение вдоль линии тока параметра аппроксимации β , полученного методом наименьших квадратов для профилей скорости, рассчитанных с помощью уравнений Фокнера — Скэн — Кука, в случае стреловидного крыла

На рис. 4 представлено распределение величины β вдоль линии тока, полученное методом наименьших квадратов. На большем участке рассматриваемого течения параметр β положительный, т. е. течение ускоренное, что согласуется с характером изменения коэффициента давления на рис. 2. Вместе с тем при $x/L \geq 0,6$ результаты аппроксимации являются неудовлетворительными, так как в области торможения потока градиент давления β должен уменьшаться, а не увеличиваться. Этот результат подтверждается путем непосредственного сравнения расчетных и модельных профилей в выбранных сечениях $x/L = 0,4; 0,7$ на рис. 5. Видно, что уравнение Кука не воспроизводит характерную S-образную форму профиля поперечной компоненты скорости при $x/L \approx 0,7$. В то же время в середине рассматриваемого отрезка линии тока ($x/L \approx 0,4$) обе компоненты скорости воспроизводятся с высокой точностью.

На рис. 6 представлены распределения вдоль линии тока величин β и γ , полученных методом наименьших квадратов для двухпараметрических модельных профилей Гастера.

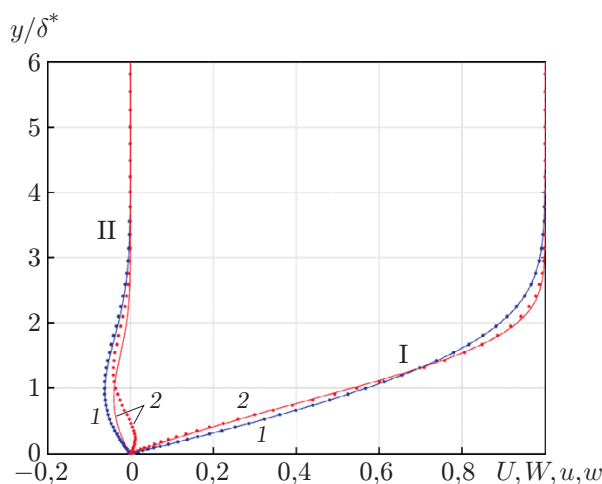


Рис. 5

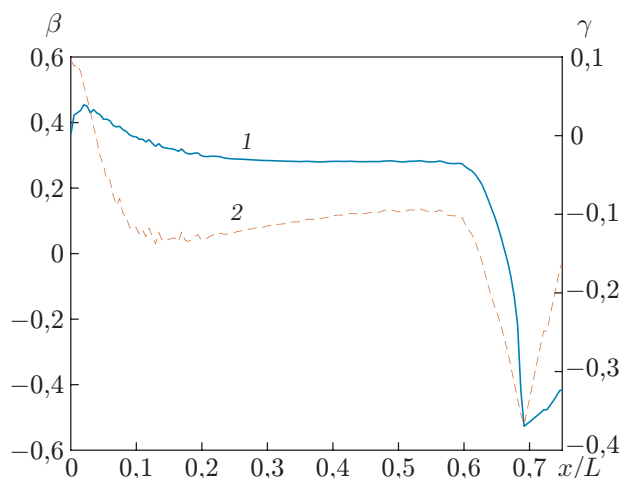


Рис. 6

Рис. 5. Расчетные U, W (точки) и модельные u, w (линии) профили Фокнера — Скэн — Кука продольной U, u (I) и поперечной W, w (II) компонент скорости для стреловидного крыла:
1 — $x/L = 0,4$, 2 — $x/L = 0,7$

Рис. 6. Распределения вдоль линии тока параметров аппроксимации β (1) и γ (2), полученных методом наименьших квадратов для профилей скорости, рассчитанных с помощью уравнений Гастера, в случае стреловидного крыла

При $0,6 \leq x/L \leq 0,7$ наблюдается качественно правильное поведение параметра β : он монотонно уменьшается и становится отрицательным, что свидетельствует о появлении точки перегиба на профиле продольной компоненты скорости. Тем не менее ниже по потоку значение параметра β начинает увеличиваться (оставаясь отрицательным), что не согласуется с монотонным возрастанием коэффициента давления в этой области.

На рис. 7 показаны нормы невязки, полученные как квадратный корень из суммы квадратов разностей продольной и поперечной скоростей расчетного и модельного профилей

$$\|R\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (U_i - u_i)^2 + (W_i - w_i)^2},$$

вычисленных в узлах расчетной сетки. Видно, что невязка существенно возрастает на концах рассматриваемого отрезка линии тока для обоих семейств модельных профилей, однако для профилей Гастера при $x/L < 0,7$ она на 1–2 порядка меньше, чем для профилей Фокнера — Скэн — Кука.

Расчетные и модельные профили, полученные с помощью уравнений Гастера, в выбранных сечениях $x/L \approx 0,40; 0,70; 0,75$ представлены на рис. 8. Видно, что уравнение Гастера адекватно описывает как профиль с одним экстремумом при $x/L \approx 0,4$, так и характерную S-образную форму профиля поперечной компоненты скорости при $x/L \approx 0,7$. При $x/L \approx 0,75$ достичь удовлетворительного соответствия расчетных и модельных профилей не удастся.

2.2. Течение в пограничном слое тела вращения. В работе [4] рассмотрен процесс обтекания эллипсоида вращения длиной $L = 2,4$ м (соотношение осей 6 : 1) ламинарным несжимаемым потоком при $U_\infty = 45$ м/с, $\alpha = 10^\circ$. В этом случае линии тока невяз-

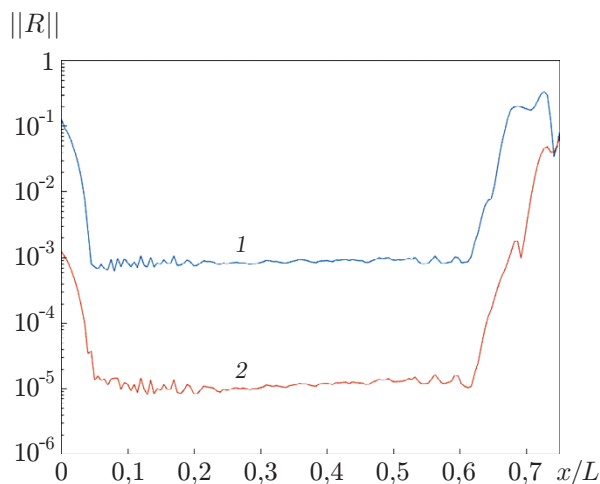


Рис. 7

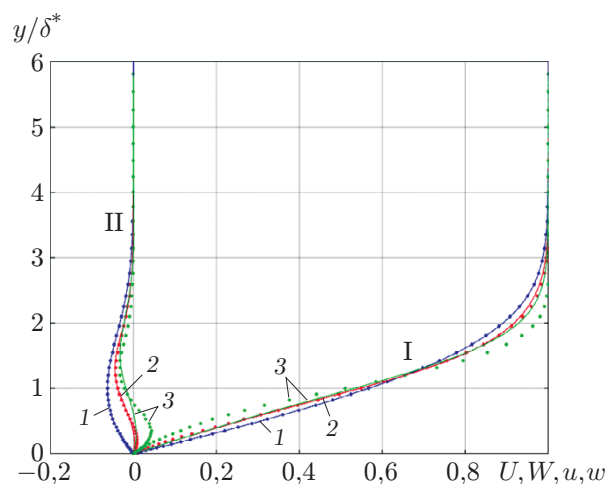


Рис. 8

Рис. 7. Норма невязки при аппроксимации методом наименьших квадратов профилей скорости, полученных с использованием пакета ANSYS Fluent, профилями типа профилей Фокнера — Скэн — Кука (1) и Гастера (2) в случае стреловидного крыла

Рис. 8. Расчетные U, W (точки) и модельные u, w (линии) профили Гастера продольной U, u (I) и поперечной W, w (II) компонент скорости в различных сечениях для стреловидного крыла:

1 — $x/L = 0,40$, 2 — $x/L = 0,70$, 3 — $x/L = 0,75$

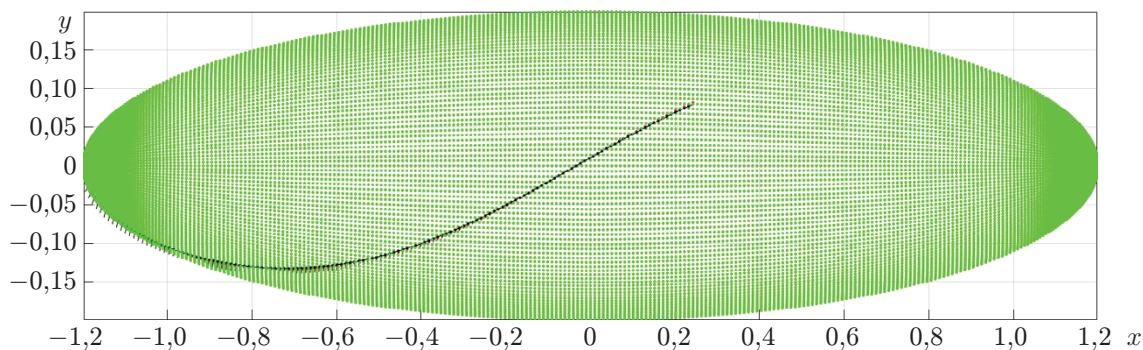


Рис. 9. Проекция выбранной линии тока на боковую поверхность эллипсоида при $U_\infty = 45$ м/с, $\alpha = 10^\circ$

кого течения со стороны боковой поверхности эллипсоида сильно искривлены и имеют выраженную S-образную форму. Форма отрезка выбранной линии тока, близкая к форме максимально искривленной линии тока, показана на рис. 9. (Данные получены с помощью пакета LOTRAN.) Предполагается, что профили скорости вдоль таких линий тока наиболее существенно отличаются от автомодельных, что максимально усложняет их аппроксимацию.

Распределение коэффициента давления вдоль линии тока (рис. 10) показывает, что при $x/L \leq 0,55$ течение ускоренное, а затем начинает тормозиться. Распределения величин β и γ , полученных методом наименьших квадратов, согласуются с соответствующими распределениями в случае стреловидного крыла (рис. 11). В частности, параметр β

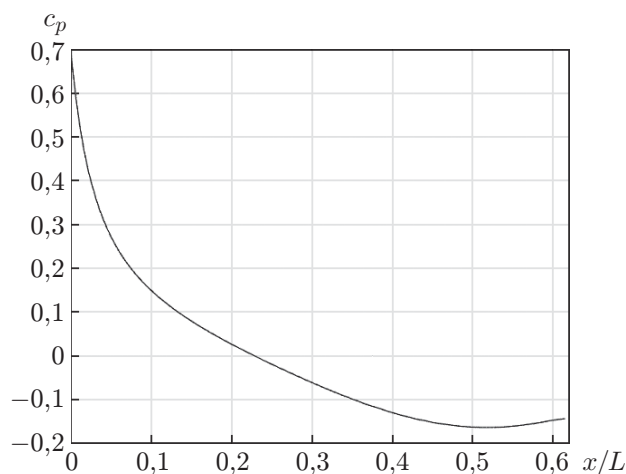


Рис. 10

Рис. 10. Распределение коэффициента давления вдоль выбранной линии тока невязкого течения вблизи эллипсоида

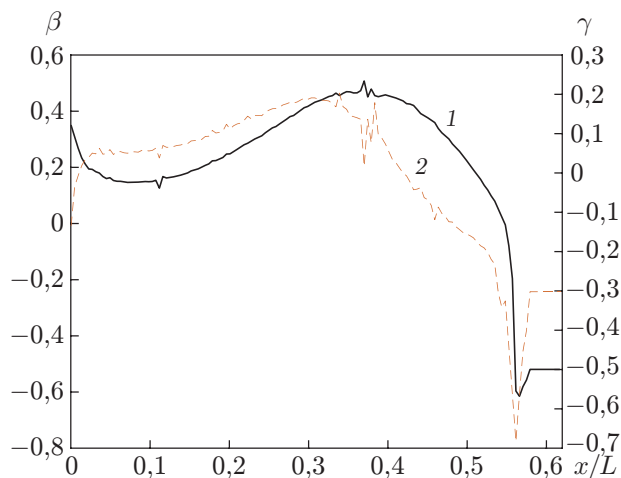


Рис. 11

Рис. 11. Распределения вдоль линии тока параметров аппроксимации β (1) и γ (2), полученных методом наименьших квадратов для профилей Гастера, в случае эллипсоида

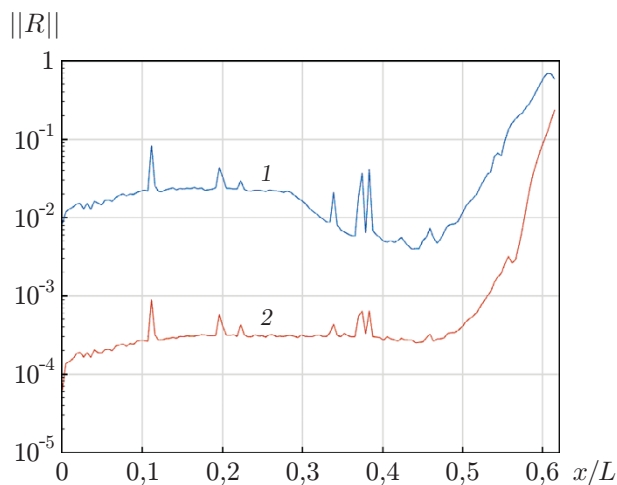


Рис. 12

Рис. 12. Норма невязки при аппроксимации методом наименьших квадратов расчетных профилей скорости модельными профилями типа профилей Фокнера — Скэн — Кука (1) и Гастера (2) в случае эллипсоида

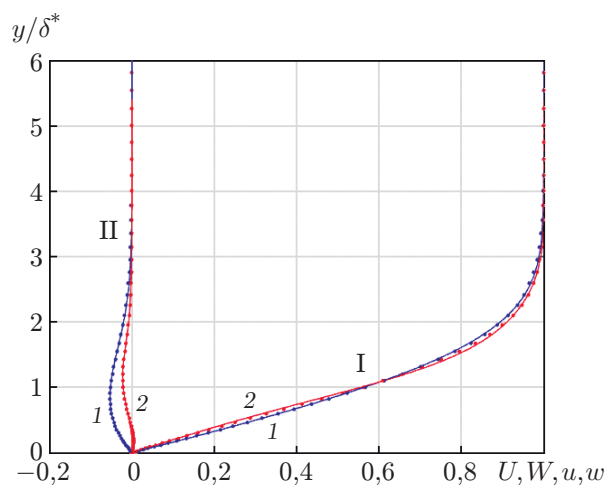


Рис. 13

Рис. 13. Расчетные U, W (точки) и модельные u, w (линии) профили продольной U, u (I) и поперечной W, w (II) компонент скорости в различных сечениях для эллипсоида:

1 — $x/L = 0,30$, 2 — $x/L = 0,57$

уменьшается и становится отрицательным при $x/L \approx 0,55$, что согласуется с характером изменения коэффициента давления и свидетельствует о появлении точки перегиба на профиле продольной компоненты скорости ниже по потоку. Невязка существенно возрастает в нижней части потока, однако для профилей Гастера при $x/L < 0,57$ она на 1–2 порядка меньше, чем для профилей Фокнера — Скэн — Кука (рис. 12). Сравнение расчетных и модельных профилей, полученных с помощью уравнений Гастера, в выбранных сечениях $x/L = 0,30; 0,57$ также показывает, что уравнение Гастера адекватно описывает как профиль с одним экстремумом при $x/L = 0,3$, так и характерную S-образную форму профиля поперечной компоненты скорости при $x/L = 0,57$ (рис. 13). При $x/L > 0,57$ достичь удовлетворительного соответствия расчетных и модельных профилей не удастся.

3. Обсуждение результатов. При анализе полученных результатов возникает существенный вопрос о причинах роста невязки на границах рассматриваемого интервала в случае стреловидного крыла и в конце рассматриваемой области в случае эллипсоида. Несмотря на то что ответить на этот вопрос в рамках данной работы не представляется возможным, так как для этого требуется более детальный анализ расчетных данных ANSYS Fluent, следует использовать критерии, в соответствии с которыми пакет LOTRAN ограничивает построение выбранных линий тока такими отрезками [5].

В рассматриваемых случаях отрезок ограничивался вблизи передней кромки или носика модели в соответствии с минимальным числом Рейнольдса $Re_{\delta^*} = 80$, вычисленным по толщине вытеснения δ^* , для того чтобы исследовать сформированный пограничный слой. Это значение Re_{δ^*} является грубой оценкой границы области применимости теории пограничного слоя, для которой одним из основных предположений является малость компоненты скорости по нормали к стенке (обратно пропорциональной Re_{δ^*} [15]) по сравнению с компонентой скорости вдоль стенки.

В нижней части потока указанная граница определялась по некоторым эмпирическим правилам, согласно которым течение находится очень близко к состоянию отрыва потока или уже является отрывным. Это связано с тем, что определить положение границы области трехмерного отрыва потока на выделенной линии тока без использования дополнительной информации невозможно, так как производная скорости на стенке в трехмерном случае, в отличие от двумерного случая, может не обращаться в нуль (см., например, [16]). Возможно, резкое изменение параметров модельных профилей Гастера при $x/L \approx 0,7$ для стреловидного крыла и при $x/L \approx 0,57$ для эллипсоида может свидетельствовать о начале отрыва потока и, таким образом, служить одним из критериев отрыва трехмерного течения для рассмотренных классов течений.

Закключение. В работе проведено исследование возможности аппроксимации профилей, получаемых при расчете с использованием полных уравнений Навье — Стокса процесса обтекания несжимаемым потоком стреловидного крыла и эллипсоида под ненулевыми углами атаки, профилями продольной и поперечной координат скорости, полученными путем решения однопараметрических автомодельных уравнений Фокнера — Скэн — Кука и модельных двухпараметрических уравнений Гастера. Показано, что профили Гастера имеют существенные преимущества: в области развитого трехмерного пограничного слоя отклонение этих профилей от расчетных на 1–2 порядка меньше отклонения профилей Фокнера — Скэн — Кука; в предотрывной области с положительным градиентом давления указанные профили адекватно описывают S-образные профили поперечной скорости течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко А. В., Кириловский С. В., Маслов А. А., Поплавская Т. В. Инженерное моделирование ламинарно-турбулентного перехода: достижения и проблемы (обзор) // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 5. С. 30–49.
2. Бойко А. В., Демьянко К. В., Нечепуренко Ю. М. Асимптотические граничные условия для расчета положения ламинарно-турбулентного перехода // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 2. С. 191–207.
3. Бойко А. В., Кириловский С. В., Поплавская Т. В. Расчетные сетки для инженерного моделирования ламинарно-турбулентного обтекания // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 6. С. 91–95.
4. Бойко А. В., Демьянко К. В., Кириловский С. В. и др. Об определении пороговых N -факторов положения ламинарно-турбулентного перехода в дозвуковом пограничном слое вытянутого сфероида // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 6. С. 3–7.
5. Boiko A. V., Demyanko K. V., Kirilovskiy S. V., et al. Modeling of transonic transitional three-dimensional flows for aerodynamic applications // AIAA J. 2021. V. 59, N 9. P. 3598–3610.
6. Gaster M. A two-parameter family of laminar boundary layer profiles on swept wings. Seattle, 2008. (Paper / AIAA; N 2008-4335).
7. Falkner V. M., Skan S. W. Solutions of the boundary-layer equations // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1931. V. 12, N 80. P. 865–896.
8. Hartree D. R. On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1937. V. 33, N 2. P. 223–239.
9. Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954. V. 50, N 3. P. 454–465.
10. Libby P. A., Liu T. M. Further solutions of the Falkner — Skan equation // AIAA J. 1967. V. 5, N 5. P. 1040–1042.
11. Cooke J. C. The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1950. V. 46, N 4. P. 645–648.
12. Гапонов С. А., Смородский Б. В. Линейная устойчивость трехмерных пограничных слоев // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 3–14.
13. Иванов А. В., Мищенко Д. А., Бойко А. В. Методика количественного описания положения ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле при повышенной степени турбулентности набегающего потока // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 2. С. 109–116.
14. Mack L. M. On the stability of the boundary layer on a transonic swept wing. Pasadena, 1979. (Paper / AIAA; N 79-0264).
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
16. Surana A., Grunberg O., Haller G. Exact theory of three-dimensional flow separation. Pt 1. Steady separation // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 57–103.

*Поступила в редакцию 23/VI 2023 г.,
после доработки — 23/VI 2023 г.
Принята к публикации 26/VI 2023 г.*