

23. Герцберг Г. Вращательные и колебательные спектры многоатомных молекул. М.: ИЛ, 1949.
24. Benedict W. S., Pollac M. A., Tomplinson W. J. The water vapor laser. — IEEE J. Quant. Electron., 1969, QE-5, p. 108.

УДК 533.521

О ТЕПЛОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

Г. М. Махвиладзе, И. К. Селезнева

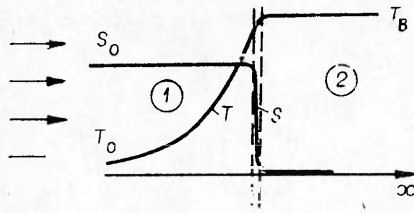
(Москва)

Явление непрерывного оптического разряда (НОР) заключается в стационарном поддержании разряда сфокусированным лучом лазера непрерывного действия допробойной мощности. Экспериментальные исследования НОРа, последовавшие после его получения [1], показывают, что при некоторых условиях режим стационарного «горения» разряда не осуществляется: происходит или срыв «горения» или периодические колебания передней кромки плазмы с частотой порядка 10—15 Гц, которые, по-видимому, сопровождаются распространением следующих друг за другом фронтов поглощения от точки поджигания навстречу лучу. Такие явления, которые можно трактовать как проявление неустойчивости соответствующих стационарных режимов разряда, будь то статический разряд или волна разряда, распространяющаяся с постоянной скоростью, наблюдаются вблизи верхнего предела существования НОРа по давлению [2].

В связи с этим и рядом других явлений представляет интерес исследование устойчивости различных стационарных режимов оптического разряда. Вообще вопрос об устойчивости того или иного режима разряда возникает сразу после того, как построено соответствующее стационарное решение. При построении этих решений весьма плодотворной оказалась идея об аналогии волны горения — фронта пламени — и волны разряда [3], стационарного горения на поверхности сферического газового объема и НОРа в сфокусированном луче [4], что позволило использовать хорошо развитые методы теории горения в физике разрядов. Следует ожидать, что такими же плодотворными окажутся методы исследования устойчивости пламен и при решении проблемы устойчивости разрядов различных типов *. В частности, применяемые в данной работе методы восходят к работе [5] по исследованию диффузионно-тепловой устойчивости фронтов химического превращения.

На ряд качественных эффектов, которые должны влиять на устойчивость разряда, указано в монографии [3]. В работе [4] дано доказательство одномерной устойчивости стационарного оптического разряда сферической формы. Попытка анализа устойчивости НОРа к одномерным возмущениям предпринята также в работах [6, 7], однако результаты этого исследования, в частности вывод о существовании предела устойчивого НОРа при достаточно высокой температуре окружающей среды, представляются сомнительными вследствие непоследовательного применения метода малых возмущений.

* Эти методы позволили получить эффективное решение задачи об устойчивости высокочастотных разрядов в условиях сильного скин-эффекта (Мышенков В. И. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 5, с. 1794).



Ниже исследуется вопрос о линейной устойчивости одномерной волны оптического разряда, распространяющейся навстречу лазерному лучу. Принимается одномерная модель стационарной волны разряда [3], которая применима при малом изменении светового потока за время перемещения волной

расстояния порядка ее ширины и в предположении об одномерности течения газа в канале светового луча.

Рассматривается случай «сильного» поглощения потока электромагнитной энергии, когда длина поглощения излучения намного меньше радиуса канала. Если к тому же реализуются условия, при которых потери энергии за счет излучения и вследствие теплоотдачи через границы канала малы по сравнению с тепловыделением, то возникает задача о распространении волны оптического разряда «без потерь» [3]. Стационарные характеристики такой волны получены в [8]. Перейдем к анализу ее устойчивости.

1. Выберем связанную с распространяющейся невозмущенной волной систему координат, в которой газ движется в сторону положительных x (см. фигуру). В силу резкой бальмановской зависимости коэффициента поглощения от температуры [3] протяженность зоны тепловыделения, в которой полностью поглощается падающий поток электромагнитной энергии мощности S_0 , мала по сравнению с шириной зоны подогрева. Будем рассматривать ее как поверхность, отделяющую область 1, в которой $S = S_0$, от области горячего газа 2 с $S = 0$, которая полностью экранируется зоной поглощения (величины, относящиеся к каждой из этих областей, отмечаются далее индексами 1 и 2 соответственно).

Анализ тепловой устойчивости проведем сначала без учета влияния гидродинамики на разрядный фронт и в предположении постоянной плотности газа, что значительно упрощает исследование, поскольку при этом не рассматривается возмущенное движение газа. В следующем разделе будет показано, что эти предположения не меняют полученный ниже результат от устойчивости волны разряда к одномерным возмущениям.

Стационарное распределение температуры в волне разряда вне зоны поглощения

$$(1.1) \quad T_1^0(x) = T_0 + (T_B - T_0) \exp(x/l) \quad (l = \lambda/\rho_0 u_0 c_p), \quad T_2^0 = T_B$$

удовлетворяет одному и тому же уравнению теплопроводности $lT_i^{0''} = T_i^{0'}$ ($i = 1, 2$; штрих означает дифференцирование по x) и граничным условиям $T_1^0(-\infty) = T_0$, $T_1^0(0) = T_2^0(0) = T_B$, $T_2^0(\infty) = 0$. Здесь T_0 — начальная температура газа; T_B — температура в зоне поглощения; λ и c_p — теплопроводность и теплоемкость при постоянном давлении, которые считаются постоянными, нулем сверху здесь и ниже обозначаются стационарные величины. Стационарная скорость волны u_0 и T_B определяются из следующих соотношений, выражающих закон сохранения энергии и баланс энергии в зоне поглощения:

$$(1.2) \quad S_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} S \mu(T) dx, \quad \lambda T_1^{0'} = S_0,$$

где μ — коэффициент поглощения лучистой энергии.

Используя метод малых возмущений, зададим возмущение поверхности фронта поглощения в виде

$$(1.3) \quad \xi = \varepsilon \exp \omega t$$

(ε — константа, ω — инкремент, t — время) и будем искать возмущенные поля температуры, удовлетворяющие нестационарным уравнениям теплопроводности

$$(1.4) \quad \rho_0 c_p \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} - \rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T_i}{\partial x},$$

в виде

$$(1.5) \quad T_i = T_i^0(x) + \delta T_i(x, t), \quad \delta T_i = f_i(x) \exp \omega t.$$

Подставляя (1.5) в линейаризованные уравнения (1.4) и решая их относительно f_i с учетом затухания возмущений при $x \rightarrow -\infty$ и их ограниченности при $x \rightarrow +\infty$, получим

$$(1.6) \quad f_1 = C_1 \exp(1 + \sqrt{1 + 4\Omega})x/2l, \quad f_2 = C_2 \exp(1 - \sqrt{1 + 4\Omega})x/2l \\ (\Omega = \omega l/u_0, \operatorname{Re} \sqrt{1 + 4\Omega} > 0).$$

Возмущенные решения слева и справа от фронта поглощения связаны между собой условиями непрерывности температуры $T(x)$ и сохранения потока энергии:

$$(1.7) \quad x = 0, \quad T_1^0 \xi + \delta T_1 = \delta T_2, \quad T_1^{0'} \xi + (\delta T_1)' = (\delta T_2)'$$

Эти граничные условия можно получить, интегрируя нестационарное уравнение теплопроводности

$$(1.8) \quad \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu S$$

с добавочным членом μS , представляющим тепловыделение вследствие поглощения потока электромагнитной энергии, по зоне поглощения, устремляя к нулю ее толщину и линейаризуя получившиеся соотношения с учетом того, что ξ и δT являются величинами первого порядка малости. При выводе второго граничного условия в (1.7) нужно учесть, что источник член в (1.8) в силу уравнения поглощения светового потока $S' = -\mu S$ равен $-S'$.

В линейном приближении изменение скорости распространения стационарной волны разряда, которую можно считать зависящей только от температуры в зоне поглощения, характеризуется коэффициентом

$$(1.9) \quad z = (T_B - T_0)d \ln u_0/dT_B,$$

явное выражение которого определяется конкретным видом зависимости $u_0(T_B)$ (для $u_0 \sim \exp(-I/2kT_B)$ имеем $z = I(T_B - T_0)/2kT_B^2$). Тогда линейаризованное (с учетом малости ξ) условие полного поглощения светового потока во фронте волны можно записать в виде

$$(1.10) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -z \frac{u_0}{T_B - T_0} \delta T_2(0).$$

Подставляя (1.3) и решения (1.5), (1.6) в соотношения (1.7) и (1.10), получим систему трех линейных уравнений относительно ε , C_1 и C_2 , условие разрешимости которой имеет вид

$$(1.11) \quad 2\Omega \sqrt{1 + 4\Omega} + z(\sqrt{1 + 4\Omega} - 1) = 0.$$

Можно убедиться, что это уравнение не имеет неустойчивых корней с $\operatorname{Re} \Omega > 0$, т. е. волна оптического разряда при всех z устойчива. Корень $\Omega = 0$ уравнения (1.11) отвечает возмущениям, возникающим при смещении по x первоначального стационарного возмущения температуры без изменения его формы. Существование таких возмущений следует из инвари-

антности используемого уравнения теплопроводности относительно смещения оси x . В работе [9], посвященной анализу одномерной устойчивости ламинарного пламени, было показано, что присутствие такого «трансляционного» возмущения не свидетельствует о неустойчивости стационарного решения.

Проведенное исследование в значительной мере аналогично анализу устойчивости фронта экзотермической химической реакции, распространяющегося в конденсированной среде [10]. Отличие, обусловленное специфической рассматриваемой системы, заключается только во втором граничном условии в (1.7).

2. Проведем более точный анализ устойчивости, учитывая зависимость плотности газа от температуры. При этом газ предполагается динамически несжимаемым, поскольку скорость распространения волны намного меньше скорости звука (число Маха намного меньше единицы). Перепад давления во фронте волны мал (порядка квадрата числа Маха), и давление можно считать постоянным. Тогда плотность газа определяется по известному распределению температуры (1.1) из уравнения состояния

$$(2.1) \quad \rho T = \text{const} = \rho_0 T_0, \quad \text{т. е.} \quad \rho_1^0 = \rho_0 T_0 / T_1^0, \quad \rho_2^0 = \rho_0 T_0 / T_2^0$$

(нулем внизу отмечаются величины при $x = -\infty$).

Стационарная скорость газа определяется из уравнения неразрывности

$$(2.2) \quad \rho^0 u^0 = \text{const} = \rho_0 u_0, \quad u_1^0 = \rho_0 u_0 / \rho_1^0, \quad u_2^0 = \rho_0 u_0 / \rho_2^0 = u_0 T_2^0 / T_0.$$

При анализе устойчивости следует иметь в виду, что возмущение температуры в соответствии с уравнением состояния (2.1) приводит к возмущению плотности $\delta \rho_i = -(\rho_0 T_0 / T_i^0) \delta T_i$ ($\delta \rho_i = \rho_i - \rho_i^0$). Поэтому линеаризованные уравнения теплопроводности и неразрывности принимают вид

$$(2.3) \quad \rho_i^0 c_p \frac{\partial \delta T_i}{\partial t} + \rho_0 u_0 c_p \frac{\partial \delta T_i}{\partial x} + c_p \frac{dT_i^0}{dx} \delta(\rho u)_i = \lambda \frac{\partial^2 \delta T_i}{\partial x^2},$$

$$-\frac{\rho_0 T_0}{T_i^0} \frac{\partial \delta T_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \delta(\rho u)_i = 0 \quad (\delta(\rho u)_i = \rho u - \rho_0 u_0).$$

Подставляя (1.5) и $\delta(\rho u)_i = \rho_0 u_0 \varphi_i(x) \exp \omega t$, получим

$$(2.4) \quad \frac{T_0}{T_i^0} \Omega \varphi_i + l \varphi_i' + l T_i^0 \varphi_i = l^2 \varphi_i'';$$

$$(2.5) \quad -\frac{T_0}{T_i^0} \Omega \varphi_i + l \varphi_i' = 0.$$

Найдем решение этой системы уравнений в области $x < \xi$ ($i = 1$). Умножая уравнение (2.5) на T_1^0 и складывая его с (2.4), получим интеграл системы

$$(2.6) \quad \varphi_1 = (l f_1' - f_1) / T_1^0$$

(константа интегрирования равна нулю, так как $f_1 = 0$, $f_1' = 0$, $\varphi_1 = 0$ при $x = -\infty$).

Подстановка φ_1 из (2.6) в (2.5) приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно f_1 с переменными коэффициентами:

$$(2.7) \quad f_1'' - a_1(x) f_1' + a_2(x) f_1 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{l} + \frac{T_1^0}{T_1^0}, \quad a_2 = \frac{1}{l^2} \frac{l T_1^0 - \Omega T_0}{T_1^0},$$

причем должно удовлетворяться граничное условие $f_1(-\infty) = 0$.

Проинтегрировать уравнение (2.7) не удастся. Однако можно воспользоваться тем, что для анализа устойчивости достаточно построить решение уравнения (2.7) с условием $f_1(-\infty) = 0$ в окрестности точки $x = 0$ с точностью до $O(x)$.

Поступим следующим образом. Найдем общее решение (2.7), считая a_1 и a_2 постоянными:

$$(2.8) \quad f_1 = C_1 y_1 + \tilde{C}_1 y_2, \quad y_i = \exp \beta_i(x),$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2} a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} a_1^2 - a_2}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{4} a_1^2 - a_2} > 0$$

(C_1 и \tilde{C}_1 — константы).

Если теперь учесть зависимость коэффициентов a_1 и a_2 от x , то (2.8) представляет собой приближенное решение, которое совпадает с истинным при $x \rightarrow -\infty$, поскольку (2.8) есть решение уравнения (2.7) с коэффициентами $a_1(-\infty)$ и $a_2(-\infty)$. В силу граничного условия $f_1(-\infty) = 0$ нужно положить $\tilde{C}_1 = 0$.

В области $x \rightarrow -0$ функция $f_1 = C_1 y_1$ с $\beta_1(x) = \beta_1(0)$ с высокой точностью описывает решение исходного уравнения (2.7) (ошибка, возникающая при подстановке приближенного решения y_1 в уравнение (2.7) не превышает величины порядка $\beta_1'(0) \approx \sqrt{T_0/T_B} \ll 1$ от величины главного члена) и в требуемом приближении имеет вид

$$(2.9) \quad f_1 = C_1 (1 + \beta_1(0)x), \quad \beta_1(0) = \frac{1}{l} \left[1 - \frac{T_0}{2T_B} + \frac{T_0}{2T_B} \sqrt{1 + 4 \frac{T_B}{T_0} \Omega} \right].$$

В других точках приближенное решение (2.8) может значительно отличаться от истинного, однако для наших целей существенно только то, что оно пригодно при малых и больших $|x|$.

В области $x > \xi$ решение для f_2 сразу находится из уравнения (2.4), поскольку $T_2^{0'} = 0$. С учетом ограниченности возмущений при $x = +\infty$ оно имеет вид

$$(2.10) \quad f_2 = C_2 \exp \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{T_0}{T_B} \Omega} \right) x/2l.$$

Подставляя решения (2.9), (2.10) и (1.3) в граничные условия на разрядном фронте (1.7) и видоизмененное с учетом зависимости плотности от температуры условие полного поглощения светового потока во фронте волны

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{u_0}{T_2} \left(1 + z \frac{T_B}{T_B - T_0} \right) \delta T_2(0),$$

получим условие разрешимости системы трех линейных уравнений относительно C_1 , C_2 и ε в виде

$$(2.11) \quad \Omega \left[\sqrt{1 + 4 \frac{T_B}{T_0} \Omega} + 1 + \frac{T_0}{T_B} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{T_B}{T_0} \Omega} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \left(\frac{T_B - T_0}{T_B} + z \right) \left(\sqrt{1 + 4 \frac{T_B}{T_0} \Omega} - 1 \right) = 0.$$

Это уравнение не имеет неустойчивых корней с $\operatorname{Re} \Omega > 0$ (как отмечалось выше, корень $\Omega = 0$ не является неустойчивым), т. е. подтверждается вывод п. 1 об устойчивости волны разряда, полученный при анализе возмущений только температурного поля. Учет расширения газа вслед-

ствие его нагревания за счет выделяющегося в зоне поглощения тепла не приводит к нарушению устойчивости.

Из уравнений (2.6), (2.5) при $i = 2$ можно найти возмущения массового потока газа в областях 1 и 2, которые связаны между собой условием непрерывности потока массы через фронт волны. Соответствующее уравнение содержит константы C_1 , C_2 и еще одну новую константу, равную возмущению скорости газа за фронтом волны при $x = \infty$. Для получения характеристического уравнения (2.11) оно не используется и поэтому здесь не приводится.

3. Одномерные возмущения фронта разрядной волны являются наиболее опасными с точки зрения возникновения неустойчивости. Действительно, при искривлении поверхности фронта поглощения, что соответствует пространственным (неодномерным) возмущениям, участки фронта, выпуклые в сторону направления движения волны, отдают тепла больше, чем плоские участки фронта. Поэтому скорость распространения разрядного фронта, сильно зависящая от температуры, на выпуклых участках меньше стационарной. На вогнутых участках температура газа, наоборот, выше, чем на выпуклых, поскольку газ нагревается дополнительно со стороны соседних выпуклых участков. Соответственно скорость распространения вогнутых участков больше стационарной. В целом из-за увеличения скорости на вогнутых участках и уменьшения ее на выпуклых разрядный фронт выравнивается. Таким образом, при искривлениях фронта возникает дополнительная стабилизация волны разряда. Можно провести математическое исследование устойчивости разрядного фронта по отношению к пространственным возмущениям в рамках модели, исследованной в п. 1. В этом случае возмущение поверхности фронта задается в виде (трехмерные возмущения могут быть сведены к двумерным)

$$\xi = \varepsilon \exp(\omega t + iky),$$

где y — координата, направленная вдоль фронта; k — волновое число возмущения. В левую часть уравнения теплопроводности (1.4) нужно добавить член $\lambda \partial^2 T / \partial y^2$ и решение этого уравнения искать в виде

$$\delta T_i = f_i(x) \exp(\omega t + iky).$$

Тогда в решениях (1.6) вместо Ω появится выражение $\Omega + K^2$ ($K = ik$). Граничные условия останутся без изменения. В результате в уравнение (1.11) вместо Ω войдет выражение $\Omega + K^2$ и декремент главного, медленнее всего затухающего решения будет равен

$$\Omega = -K^2,$$

что свидетельствует о некотором запасе устойчивости, обусловленном двумерностью возмущений, в соответствии с изложенным выше физическим механизмом.

Если волна распространяется в условиях, когда существенна фокусировка лазерного луча, на выпуклых участках искривленной поверхности фронта мощность светового потока и, следовательно, тепловыделение меньше, чем на вогнутых участках, что должно привести к дополнительной стабилизации фронта волны и к более быстрому его выравниванию.

Авторы искренне признательны Г. И. Козлову и В. И. Мышенкову за ценные обсуждения и замечания.

Поступила 17 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов Н. А., Зимаков В. П. и др. Непрерывно горящий оптический разряд. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 11, с. 447.
2. Козлов Г. И., Кузнецов В. А., Масюков В. А. Лучистые потери аргоновой плазмы и излучательная модель непрерывного оптического разряда. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, вып. 3.

3. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.
4. Селезнева И. К. Сферически-симметричный оптический разряд как аналог диффузионного горения в смеси горючих газов. — В сб.: Горение и взрыв. М.: Наука, 1971.
5. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. — ПМТФ, 1962, № 4.
6. Mucha Z., Peradzynski Z., Baranowski A. Instability of continuous optical discharge. — Bull. de l'academie polonaise des sciences, 1977, vol. 25, N 4.
7. Барановский А., Муха З., Перадзыньский З. Неустойчивость непрерывного оптического разряда в газах. — Успехи механики, 1978, т. 1, вып. 3/4.
8. Райзер Ю. П. Дозвуковое распространение световой искры и пороговые условия для поддержания плазмы излучением. — ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 2127.
9. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
10. Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В. О двумерной устойчивости горения конденсированных систем. — ПМТФ, 1971, № 5.

УДК 536.25

ТЕПЛООБМЕН ЦИЛИНДРА ПРИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В. Б. Репин

(Казань)

Известно, что воздействие звуковым полем интенсифицирует тепломассообменные процессы [1—3], что эффект интенсификации обусловлен наличием стационарных вторичных течений, образующихся вблизи твердой поверхности [4]. Однако имеющиеся теоретические рекомендации по этому вопросу ограничены случаем высокочастотных колебаний, в то время как ситуация, когда толщина слоя Стокса сравнима с размером тела или больше его, является не менее важной. Такая ситуация реализуется, например, в топочных устройствах, работающих в режиме высокочастотной неустойчивости и использующих распыленное жидкое или твердое топливо. Эти задачи важны, в частности, для термоанемометрии.

В работе на примере круглого цилиндра изучается вопрос о влиянии низкочастотных колебаний на локальные и интегральные характеристики процесса теплообмена. Условие низкочастотности означает, что размер слоя Стокса ($\delta_{ак} \sim (v/\omega)^{0,5}$) сравним с размером цилиндра или больше его.

Пусть круглый цилиндр радиуса a и бесконечной длины помещен в безграничную вязкую жидкость, которая на бесконечном удалении от цилиндра колеблется по гармоническому закону с циклической частотой ω . Температура поверхности цилиндра \tilde{T}_w и окружающей среды \tilde{T}_∞ считается постоянной, при этом разность температур ($\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty$) полагается настолько малой, что изменением физических свойств жидкости и естественной конвекцией можно пренебречь. Пренебрегая также диссипативными эффектами, запишем уравнение энергии в виде [3]:

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{1+r} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(r, \theta)} = \frac{H^2}{Pr} \nabla^2 T$$

с граничными условиями

$$(2) \quad T = 1 \text{ при } r = 0, \quad T = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Безразмерные величины в уравнениях (1), (2) определены следующим образом:

$$r = (\tilde{r} - a)/a, \quad \psi = \tilde{\psi}/Ba, \quad \tau = \tilde{\tau}\omega, \quad T = (\tilde{T} - \tilde{T}_\infty)/(\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty),$$