

УДК 532.59

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДЛИННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПОЛОГИМИ ДНОМ И КРЫШКОЙ

Г. А. Хабахпашев

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: theory@itp.nsc.ru

Аналитически и численно исследована динамика трехмерных возмущений границы раздела двух слоев жидкости различной плотности. Выведено эволюционное интегродифференциальное уравнение, учитывающее длинноволновые вклады инерций слоев и поверхностного натяжения, малую, но конечную амплитуду возмущений границы раздела двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей, слабые наклоны крышки и дна, а также нестационарные силы трения на всех границах. Получены численные решения данного модельного уравнения для нескольких (наиболее характерных) нелинейных задач трансформации плоских и пространственных волн.

Ключевые слова: вязкая жидкость, границы раздела, длинные волны, нелинейные возмущения.

Введение. Несмотря на длительную историю изучения волн конечной амплитуды, до сих пор практически все строгие теоретические результаты получены в предположении идеальности жидкости (см. монографии [1–6] и указанную там литературу). Поэтому при исследовании эволюции даже плоских слабонелинейных уединенных возмущений границы раздела двух слоев вязкой среды, находящейся между горизонтальными дном и крышкой, используются приближенные модели (см, например, работы [7–9]).

Так, в работе [7] предприняты две попытки учесть диссипацию внутренних волн с помощью подходов, разработанных для неглубокой однородной жидкости со свободной поверхностью [10, 11]. Первая из них заключалась в применении энергетических соотношений и использовании выражения для трения, осредненного на длине волны. Это позволило найти формулу для затухания уединенных возмущений. Во втором подходе с помощью стандартного разложения по малому параметру и преобразования Фурье для отклонения свободной границы выведено уравнение типа уравнения Кортевега — де Вриза с диссипативным интегральным членом, которое дает возможность вычислить трансформацию волн по мере их распространения. Кроме того, в обоих случаях допускалось, что трение в верхнем и нижнем слоях у границы раздела равно трению о крышку и дно соответственно. Однако сопоставление результатов расчетов по модели [7] с экспериментальными данными [12] показало их значительное различие.

В работе [8], вообще-то, была исследована диссипация уединенных возмущений в двухслойной жидкости со свободной поверхностью, но решение удалось легко подправить для задачи с твердой крышкой [12]. В отличие от первого метода работы [7] в [9] точнее учтена диссипация у границы раздела. Тем не менее сравнение с опытом [12] подтвердило вывод о том, что использование энергетических соотношений и трения, осредненного на длине волны, не позволяет достичь удовлетворительного согласия теории с экспериментом [9].

Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается и при наличии свободной поверхности [13].

В работе [9] получено эволюционное уравнение типа уравнения Буссинеска с дополнительным членом, содержащим свертку, и была продемонстрирована способность этой модели адекватно описывать трансформацию профиля экспериментально наблюдаемых волн. Целью данной работы является обобщение последней модели на случай существенно трехмерных возмущений в двухслойной среде с пологими дном и крышкой.

Постановка задачи и упрощение исходных уравнений. Исходные уравнения неразрывности и уравнения Стокса для несжимаемой жидкости можно записать в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l + \frac{\partial w_l}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla \mathbf{u}_l + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = \nu_l \left(\nabla^2 \mathbf{u}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \mathbf{u}_l \cdot \nabla w_l + w_l \frac{\partial w_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = \nu_l \left(\nabla^2 w_l + \frac{\partial^2 w_l}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

Здесь \mathbf{u} — горизонтальная составляющая вектора скорости жидкости; w — его вертикальная компонента; оператор ∇ определен в горизонтальной плоскости; z — вертикальная координата; t — время; ρ — плотность жидкости; p — давление в слое; ν — кинематическая вязкость жидкости; g — ускорение свободного падения; индекс l равен единице для верхнего слоя и двум для нижнего.

Введем следующие предположения: стационарные составляющие течений несмешивающихся жидкостей равны нулю; “длина волны” λ существенно больше, а амплитуда возмущения η_a значительно меньше равновесных глубин слоев h_l ($h_l/\lambda \sim \varepsilon^{1/2}$ и $\eta_a/h_l \sim \varepsilon$, где ε — малый параметр); капиллярные эффекты невелики (модифицированное число Бонда $Bo = (\rho_2 - \rho_1) g h_1 h_2 / \sigma > 1$, где σ — поверхностное натяжение); неподвижные твердые крышка и дно являются слабонаклонными ($|\nabla h_l| \sim \varepsilon^{3/2}$); появляющиеся пограничные слои остаются тонкими, т. е. время прорастания пограничных слоев на всю толщину жидкости много больше характерного времени прохождения волны через какую-либо точку исследуемой области t_w (числа гидродинамической гомохронности $Ho_{\nu l} = \nu_l t_w / h_l^2 \sim \varepsilon^2$). Следовательно, возникающее течение будет потенциальным ($\partial \mathbf{u}_l / \partial z = \nabla w_l$) всюду за исключением узких приграничных областей. Нелинейные слагаемые в уравнениях (3) можно опустить — как члены неучитываемого порядка малости ($\mathbf{u}_l \cdot \nabla w_l / g \sim \varepsilon^2$ и $w_l^2 / u_l^2 \sim \varepsilon$). Кроме того, ввиду сделанных предположений можно пренебречь первыми слагаемыми в правых частях уравнений (2) и всеми правыми частями в уравнениях (3). Таким образом, диссипация незначительна при рассмотрении вертикальных компонент уравнений баланса импульса. В результате имеем упрощенную систему уравнений движения

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u_l^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} = \nu_l \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0. \quad (5)$$

Примем обычные краевые условия — прилипания жидкости на крышке и дне; непрерывности всех составляющих векторов скоростей жидкостей и касательных напряжений на границе раздела; кинематические условия и условие капиллярного скачка давления на этой поверхности:

$$\mathbf{u}_l = w_l = 0 \quad \text{при} \quad z = -(-1)^l h_l,$$

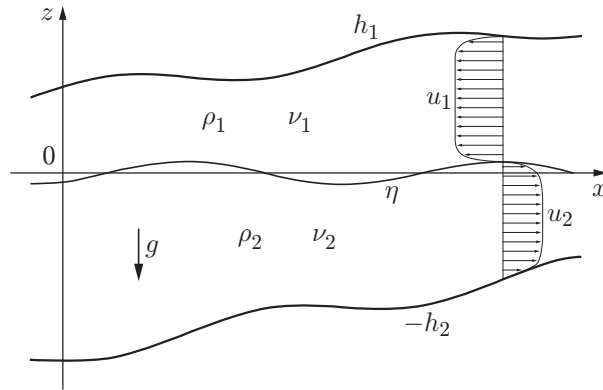


Рис. 1. Схема волнового процесса в неглубокой двухслойной жидкости с полыми твердыми дном и крышкой

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_i, \quad w_1 = w_2 = w_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \eta,$$

$$\nu_1 \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = \nu_2 \rho_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} = \boldsymbol{\tau}_i, \quad p_{1i} = p_{2i} + \sigma \nabla^2 \eta \quad \text{при } z = \eta(t, x, y).$$

Здесь η — возмущение границы раздела; $\boldsymbol{\tau}_i$ — трение на ней; p_{li} — значения давлений у этой поверхности. На рис. 1 приведена схема исследуемого волнового процесса.

Интегрируя уравнения (5) по координате z от z до η и используя динамическое граничное условие на свободной поверхности, находим профили давлений в каждой жидкости:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int_z^\eta \frac{\partial w_l}{\partial t} dz.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4), перепишем последние в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \nabla \left(g\eta + \frac{u_l^2}{2} + \frac{p_{li}}{\rho_l} + \int_z^0 \frac{\partial w_l}{\partial t} dz \right) + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} = \nu_l \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Верхний предел интеграла заменен, поскольку в рассматриваемом приближении (длинные волны небольшой амплитуды) мы пренебрегаем величинами третьего и более высоких порядков малости. Кроме того, в жидкости с тонкими пограничными слоями можно использовать простые профили нормальных составляющих скоростей жидкостей

$$w_1 = \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w_2 = \left(1 + \frac{z}{h_2}\right) \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Опущенные поправки снова характеризуются следующими (неучитываемыми) порядками малости. Теперь подставим эти формулы в уравнения горизонтального движения (6):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \nabla \left[g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} + \frac{u_l^2}{2} - z \left(1 + (-1)^l \frac{z}{2h_l}\right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} = \nu_l \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Далее проинтегрируем уравнения (1) и (7) по z от $-h_2$ до η при $l = 2$ и от η до h_1 при $l = 1$ и введем осредненные по глубинам слоев значения скоростей жидкостей $\langle \mathbf{u}_l \rangle$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(-1)^l h_l + \eta] \langle \mathbf{u}_l \rangle = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial([h_l + (-1)^l \eta] \langle \mathbf{u}_l \rangle)}{\partial t} + [h_l + (-1)^l \eta] \nabla \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} \right) +$$

$$+ h_l \nabla \left(\langle u_l \rangle^2 + (-1)^l \frac{h_l}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = \frac{(-1)^l}{\rho_l} (\tau_i - \pi_l), \quad (9)$$

где $\pi_l = \nu_l \rho_l \partial \mathbf{u}_l / \partial z$ при $z = -(-1)^l h_l$, а также использованы интегрирование по частям, условия прилипания жидкостей на обеих твердых границах и уравнения неразрывности:

$$\int_{\eta}^{h_1} w_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i - \int_{\eta}^{h_1} \mathbf{u}_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i + \int_{\eta}^{h_1} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{h_1}{2} \nabla \langle u_1^2 \rangle,$$

$$\int_{-h_2}^{\eta} w_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial z} dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i - \int_{-h_2}^{\eta} \mathbf{u}_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i + \int_{-h_2}^{\eta} \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{u}_2 dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathbf{u}_i + \frac{h_2}{2} \nabla \langle u_2^2 \rangle.$$

Для нахождения величин $\nu_l \rho_l \partial \mathbf{u}_l / \partial z$ около всех границ необходимо сначала решить задачу в первом приближении, т. е. учитывая лишь члены первого порядка малости.

Определение трения о крышку, дно и между слоями жидкостей. Поскольку не только амплитуда длинных волн и поверхностное натяжение невелики, но мала и вязкость, в системе уравнений (8), (9) можно пренебречь нелинейными, инерционными, капиллярными и диссипативными слагаемыми. Тогда линеаризованные законы сохранения массы и горизонтального количества движения для каждого слоя запишутся в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (-1)^l h_l \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_l \rangle = 0; \quad (10)$$

$$h_l \frac{\partial \langle \mathbf{u}_l \rangle}{\partial t} + h_l \nabla \left(g\eta + \frac{p_i}{\rho_l} \right) = 0. \quad (11)$$

Поправки, характеризующиеся неучитываемыми порядками малости, опять опущены, и потому $p_{1i} = p_{2i} = p_i$. Для исключения скоростей жидкостей продифференцируем уравнения (10) по времени, а к уравнениям (11) применим скалярно оператор ∇ , умноженный на $(-1)^l$, и вычтем вторые уравнения из первых. В результате получим:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \left(gh_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i \right) = 0.$$

Лапласиан возмущения давления на границе раздела находим из условия тождественности этих двух уравнений (при $l = 1$ и 2), описывающих один и тот же волновой процесс:

$$\nabla^2 p_i = -\rho_1 \rho_2 g H \nabla^2 \eta / \chi, \quad H = h_1 + h_2, \quad \chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1.$$

Отсюда получаем формулу для градиента давления на поверхности раздела:

$$\nabla p_i = -\rho_1 \rho_2 g H \nabla \eta / \chi. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования положим равной нулю, так как согласно сделанному предположению жидкости покоятся в отсутствие возмущений.

Таким образом, линеаризованные уравнения движения (7) для очень длинных волн на границе раздела слоев (в пренебрежении поверхностным натяжением) имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + g \left(1 - \frac{\rho_1 \rho_2 H}{\rho_l \chi} \right) \nabla \eta = \nu_l \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2}.$$

Перепишем данные уравнения в форме, более удобной для дальнейшего изложения:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_l} \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} = (-1)^l \frac{c_0^2}{\nu_l h_l} \nabla \eta, \quad c_0^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1) h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}. \quad (13)$$

Ищем решения этих дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

$$u_{lj}(t, x, y, z) = v_{lj}(t, z) f_{lj}(x, y), \quad j = x, y.$$

Теперь применим к уравнениям (13) стандартное преобразование Лапласа по времени:

$$\frac{\partial^2 V_{lj}}{\partial z^2} - \frac{s}{\nu_l} V_{lj} = \frac{G_{lj}}{\nu_l f_{lj}} - \frac{v_{lj,0}}{\nu_l} \equiv N_{lj}(s), \quad (14)$$

где функции $V_{lj}(s, z)$ и $G_{lj}(s, x, y)$ — изображения $v_{lj}(t, z)$ и $(-1)^l (c_0^2/h_l) \partial \eta / \partial j$ соответственно. Правые части уравнений (14) — функции только переменной s , так как левые их части не зависят от горизонтальных координат x и y , а скорости жидкостей в каждом из слоев в начальный момент времени ($t = 0$) не зависят от вертикальной координаты z . Допущения о малой толщине пограничных слоев дают возможность поставить, не снижая точности, условие отсутствия касательных напряжений на больших расстояниях от рассматриваемых поверхностей, т. е. при $z = -\infty$ (для крышки), или при $z = +\infty$ (для дна), или при $z = \pm\infty$ одновременно для поверхности раздела (пограничные слои практически “бесконечно” глубоко утоплены в жидкости).

Замены $V'_{lj} = V_{lj} + N_{lj} \nu_l / s$ позволяют переписать уравнения (14) в форме однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Тогда можно легко определить интересующие нас решения, удовлетворяющие краевым условиям $V_{lj} = 0$ при $z = -(-1)^l h_l(x, y)$ и $\partial V_{lj} / \partial z = 0$ при $z = (-1)^l \infty$:

$$V_{lj}(s, z) = N_{lj}(s) \frac{\nu_l}{s} \left[\exp \left(-\sqrt{\frac{s}{\nu_l}} [(-1)^l z + h_l] \right) - 1 \right].$$

Отсюда имеем следующие соотношения для производных изображений V_{lj} у крышки и дна:

$$\left. \frac{\partial V_{lj}}{\partial z} \right|_{z=-(-1)^l h_l} = -(-1)^l N_{lj}(s) \sqrt{\frac{\nu_l}{s}}.$$

Применив к данным формулам обратное преобразование Лапласа, получаем в пространстве оригиналов выражения для касательных составляющих тензора вязких напряжений:

$$\pi_{l,jz} = \rho_l \sqrt{\frac{\nu_l}{\pi}} \left((-1)^l \frac{u_{lj,0}}{\sqrt{t}} - \frac{c_0^2}{h_l} \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial j} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \right). \quad (15)$$

Аналогично совместное решение уравнений (14) с четырьмя краевыми условиями ($\partial V_{lj} / \partial z = 0$ при $z = -(-1)^l \infty$, $V_{1j} = V_{2j}$ и $\nu_1 \rho_1 \partial V_{1j} / \partial z = \nu_2 \rho_2 \partial V_{2j} / \partial z$ при $z = 0$) дает следующие профили для изображений V_{lj} вблизи границы раздела:

$$V_{1j} = \sqrt{\nu_2 \rho_2} \frac{\nu_1 N_{1j} - \nu_2 N_{2j}}{s(\sqrt{\nu_1 \rho_1} + \sqrt{\nu_2 \rho_2})} \exp \left(-\sqrt{\frac{s}{\nu_1}} z \right) - \frac{\nu_1}{s} N_{1j},$$

$$V_{2j} = \sqrt{\nu_1 \rho_1} \frac{\nu_2 N_{2j} - \nu_1 N_{1j}}{s(\sqrt{\nu_1 \rho_1} + \sqrt{\nu_2 \rho_2})} \exp \left(\sqrt{\frac{s}{\nu_2}} z \right) - \frac{\nu_2}{s} N_{2j}.$$

Из этих зависимостей с помощью обратного преобразования Лапласа находим выражения для горизонтальных компонент скорости и касательных трений на границе раздела:

$$u_{ij} = \frac{c_0^2}{\psi_1 + \psi_2} \left(\frac{\psi_1}{h_1} - \frac{\psi_2}{h_2} \right) \int_0^t \frac{\partial \eta(t', x, y)}{\partial j} dt' + \frac{\psi_1 u_{1j,0}(x, y) + \psi_2 u_{2j,0}(x, y)}{\psi_1 + \psi_2}; \quad (16)$$

$$\tau_{i,jz} = \nu_l \rho_l \frac{\partial u_{lj}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\psi}{\sqrt{\pi t}} (u_{1j,0} - u_{2j,0}) + \frac{\psi}{\sqrt{\pi}} \frac{c_0^2 H}{h_1 h_2} \int_0^t \frac{\partial \eta(t', x, y)}{\partial j} \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}. \quad (17)$$

Здесь $\psi_l = \sqrt{\nu_l} \rho_l$ и введен диссипативный коэффициент $\psi = \psi_1 \psi_2 / (\psi_1 + \psi_2)$. Отметим, что в формулах (15)–(17) время $t > 0$, а неинтегральные члены сказываются лишь в области, возмущенной в начальный момент времени ($t = 0$). Для всего остального пространства члены, содержащие $u_{lj,0}(x, y)$, фактически выпадают (равны нулю).

Эволюционное уравнение для волн и анализ его частных решений. Подставим зависимости (15) и (17) в уравнения (9). Тогда уравнения баланса горизонтальных составляющих количества движения для каждого слоя жидкости запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial([h_l + (-1)^l \eta] \langle \mathbf{u}_l \rangle)}{\partial t} + [h_l + (-1)^l \eta] \nabla \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} \right) + h_l \nabla \left(\langle u_l \rangle^2 + (-1)^l \frac{h_l}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = \\ & = \frac{(-1)^l}{\sqrt{\pi} \rho_l} \left[\frac{\psi}{\sqrt{t}} (\mathbf{u}_{1,0} - \mathbf{u}_{2,0}) - \frac{(-1)^l \psi_l}{\sqrt{t}} \mathbf{u}_{l,0} + c_0^2 \left(\frac{\psi H}{h_1 h_2} + \frac{\psi_l}{h_l} \right) \int_0^t \nabla \eta \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Для исключения осредненных скоростей жидкостей из линейных членов снова продифференцируем уравнения (8) по времени, а к уравнениям (18) применим скалярно оператор ∇ и вычтем вторые, умноженные на $(-1)^l$, из первых. В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \left(gh_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_{li} \right) - \frac{h_l^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \nabla h_l \cdot \nabla \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} \right) - \\ & - \nabla \cdot \left[\eta \nabla \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} \right) \right] - (-1)^l h_l \nabla^2 \langle u_l^2 \rangle + \sqrt{\frac{\nu_l}{\pi}} \frac{c_0^2}{h_l} \left(1 + \frac{\psi h_l H}{\psi_l h_1 h_2} \right) \int_0^t \frac{\nabla^2 \eta dt'}{\sqrt{t-t'}} = \\ & = \sqrt{\frac{\nu_l}{\pi t}} \nabla \cdot \left(\frac{\psi}{\psi_l} (\mathbf{u}_{2,0} - \mathbf{u}_{1,0}) + (-1)^l \mathbf{u}_{l,0} \right). \end{aligned}$$

Теперь скорости жидкостей содержатся лишь в членах второго порядка малости. Кроме того, будем рассматривать только такие процессы, когда нелинейные волны бегут лишь в определенном направлении. Тогда можно заменить в правых частях этих уравнений $(-1)^l h_l (\nabla \cdot \mathbf{u}_{l,0})$ на $(\mathbf{c}_0 \cdot \nabla \eta_0)$, а в пятых членах $\langle u_l^2 \rangle$ на $c_0^2 \eta^2 / h_l^2$. Наконец в членах второго порядка малости можно заменить градиенты давлений на границе раздела слоев жидкости, используя формулы (12). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \left(gh_l \nabla^2 \eta + \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_{li} \right) - (-1)^l \frac{3}{2} \frac{c_0^2}{h_l} \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_l^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{h_l} (\nabla h_l \cdot \nabla \eta) = \\ & = \sqrt{\frac{\nu_l}{\pi}} \frac{1}{h_l} \left(1 + \frac{\psi h_l H}{\psi_l h_1 h_2} \right) \left(\frac{\mathbf{c}_0}{\sqrt{t}} \cdot \nabla \eta_0 - c_0^2 \int_0^t \frac{\nabla^2 \eta dt'}{\sqrt{t-t'}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы свести систему этих двух уравнений к одному (исключив давления на границе раздела и из линейных членов, т. е. и из членов первого порядка малости), умножим (19) при $l = 1$ на h_2/ρ_2 , а при $l = 2$ — на h_1/ρ_1 и сложим. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_1h_2}{\chi} \nabla^2 \eta - \frac{3}{2} \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{h_1 h_2 \chi} c_0^2 \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{3} \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\chi} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \\ + \frac{\sigma h_1 h_2}{\chi} \nabla^4 \eta - \frac{\rho_1 h_2 c_0^2}{h_1 \chi} \nabla \eta \cdot \nabla h_1 - \frac{\rho_2 h_1 c_0^2}{h_2 \chi} \nabla \eta \cdot \nabla h_2 = \\ = \frac{\psi H^2 + \psi_1 h_2^2 + \psi_2 h_1^2}{\sqrt{\pi} h_1 h_2 \chi} \left(\frac{\mathbf{c}_0}{\sqrt{t}} \cdot \nabla \eta_0 - c_0^2 \int_0^t \frac{\nabla^2 \eta dt'}{\sqrt{t-t'}} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

где $\eta_0(x, y)$ — начальное отклонение свободной поверхности. Таким образом, в уравнении (20) коэффициенты при всех членах определяются только геометрическими (h_1, h_2) и физическими ($g, \sigma, \rho_1, \rho_2, \nu_1, \nu_2$) параметрами задачи.

В рамках сделанных выше предположений (низкочастотность возмущений, их амплитуда невелика и они распространяются лишь в одном направлении, слабый наклон твердых границ и малая толщина пограничных слоев) в членах второго порядка малости можно заменить $\partial^2/\partial t^2$ на $c_0^2 \nabla^2$, и наоборот. Тогда уравнение (20) запишется в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - C_n \nabla^2 \eta^2 - C_d \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C_{b1} \nabla \eta \cdot \nabla h_1 - C_{b2} \nabla \eta \cdot \nabla h_2 = \\ = \frac{C_f}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mathbf{c}_0}{\sqrt{t}} \cdot \nabla \eta_0 - c_0^2 \int_0^t \frac{\nabla^2 \eta dt'}{\sqrt{t-t'}} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Эволюционные уравнения (20) и (21) учитывают слабую нелинейность возмущений, длинноволновые вклады инерций слоев жидкости и поверхностного натяжения, пологий наклон крышки и дна, а также нестационарные силы трения на всех границах данной системы.

Подчеркнем, что уравнения (20) и (21) пригодны для описания трансформации существенно трехмерных возмущений, движущихся в произвольном горизонтальном направлении (под любым углом к оси Ox). При этом линейные волны могут одновременно бежать и в противоположные стороны.

Хорошо известно (см., например, монографию [2]), что при численных расчетах различные эффекты перехода к конечным разностям и округления вводят малые высокочастотные осцилляции даже в том случае, когда изучаемая аналитическая задача удовлетворяет условию длинноволновости. Вследствие этого численные решения, найденные с помощью уравнения (21), могут оказаться неустойчивыми при $C_d < 0$ (короткие волны будут усиливаться). В такой ситуации следует возвратиться к прежнему виду дисперсионного члена, т. е. к уравнению (20).

Проанализируем частные и предельные случаи. Рассмотрим сначала идеальную жидкость. При этом уравнения (20) и (21) кардинально упрощаются. И дело не только в том, что они становятся дифференциальными. Важно, что исчезает не просто интеграл, а свертка, вычисление которой требует знания предыстории процесса во всем исследуемом канале, т. е. огромной памяти и высокой скорости компьютера. Пусть $\eta(t, x, y) = \eta(t, x)$ и $dh_l/dx = 0$, тогда (21) согласуется с модифицированным уравнением Буссинеска [9], а для возмущений, распространяющихся в направлении роста координаты x , получаем обычное эволюционное уравнение типа уравнения Кортевега — де Вриза. Данные уравнения подобны выведенному в работе [13]. Поэтому сделанный там дисперсионный анализ применим

и к изучаемой системе. Кроме того, легко получить, что установившимися плоскими периодическими решениями уравнения (21) с $\nu_l = 0$ и $dh_l/dx = 0$ являются кноидальные волны:

$$\eta = \eta_a \operatorname{cn}^2 [(x - U_{cn}t)/L_{cn}].$$

Здесь $U_{cn} = c_0 \sqrt{1 + \eta_a^*(2 - 1/m^2)}$; $\eta_a^* = 2\eta_a C_n / (3c_0^2)$; $L_{cn} = m U_{cn} \sqrt{6C_d / (\eta_a C_n)}$. Параметр m (модуль эллиптической функции Якоби) определяет уровень нелинейности возмущения (см., например, монографию [2]). Так, при $m \rightarrow 0$ получаем гармоническую волну, а при $m \rightarrow 1$ длина возмущений стремится к бесконечности и имеем уединенные решения (см. [9]):

$$\eta = \eta_a / \operatorname{ch}^2 [(x - Ut)/L], \quad (22)$$

где $U = c_0 \sqrt{1 + \eta_a^*}$; $L = L_0 = 2\sqrt{C_d(1 + 1/\eta_a^*)}$. Если $\partial^2 \eta / \partial y^2 \sim \varepsilon \partial^2 \eta / \partial x^2$ и $\nabla h_l = 0$, то уравнение (21) упрощается настолько, что может быть сведено к также хорошо известному выражению типа уравнения Кадомцева — Петвиашвили [14]. Таким образом, (21) является обобщением квазиплоского эволюционного уравнения на случай существенно трехмерных возмущений даже при $\nu_l = 0$ и $\nabla h_l = 0$.

В работе [15] двумерное уравнение типа (21) с $\nu_l = 0$ и $\nabla h_l = 0$ применялось для изучения поперечной и продольной неустойчивости уединенных волн в однородных средах с положительной дисперсией (т. е. в нашей ситуации, когда $C_d < 0$). В частности, исследованы пространственные солитоны и уединенные возмущения с периодически модулированным фронтом.

Что касается наклонов крышки и дна, то их учет с помощью лишь двух членов, входящих в уравнение (21) и учитывающих негоризонтальность границ, оказывается достаточным, чтобы получить закон Грина, т. е. при уменьшении глубины жидкости амплитуда плоской линейной волны обратно пропорциональна корням четвертой степени из глубины слоя.

Теперь примем во внимание вязкость жидкостей. Дисперсионный анализ и этого случая аналогичен тому, который проведен в работе [13]. Вычисление свертки, входящей в уравнение (21), требует знания всей предыстории процесса. Но значения $\partial \eta / \partial j$, соответствующие моменту времени $t' \ll t$, суммируются с меньшим “весом”, чем величины $\partial \eta / \partial j$ при $t' \approx t$. Поэтому при распространении даже плоских уединенных возмущений трения о крышку и дно (последние могут быть горизонтальными) сменяют свой знак [13]. Данный эффект обусловлен тем, что на заднем фронте волны продольные компоненты градиентов давлений действуют против возмущений скоростей жидкостей. Следовательно, возможно наблюдение отрывов тонких пристенных слоев и возникновения зон возвратных течений [13]. К сожалению, автору неизвестны результаты экспериментального изучения этого явления.

Численные решения модельного эволюционного уравнения. С учетом того, что (21) подобно уравнению для волн на свободной поверхности однородной жидкости, расчеты были выполнены с помощью неявной трехслойной конечно-разностной схемы, приведенной в работе [16]. Эта схема имеет второй порядок аппроксимации по всем трем переменным и обладает очень хорошей устойчивостью.

Ниже рассмотрены задачи, для которых в качестве начального возмущения (на первом и втором слоях по времени) использовалась плоская установившаяся уединенная волна (22). Следовательно, задание частной производной по времени в начальный момент осуществляется очевидным образом. На боковых вертикальных стенках канала ставились условия отражения, заключающиеся в том, что производные от величины η по нормальям к стенкам занулялись. Для этого в проведенных расчетах значения искомой функции η в краевых узлах приравнивались к ее значениям в ближайшем внутреннем узле.

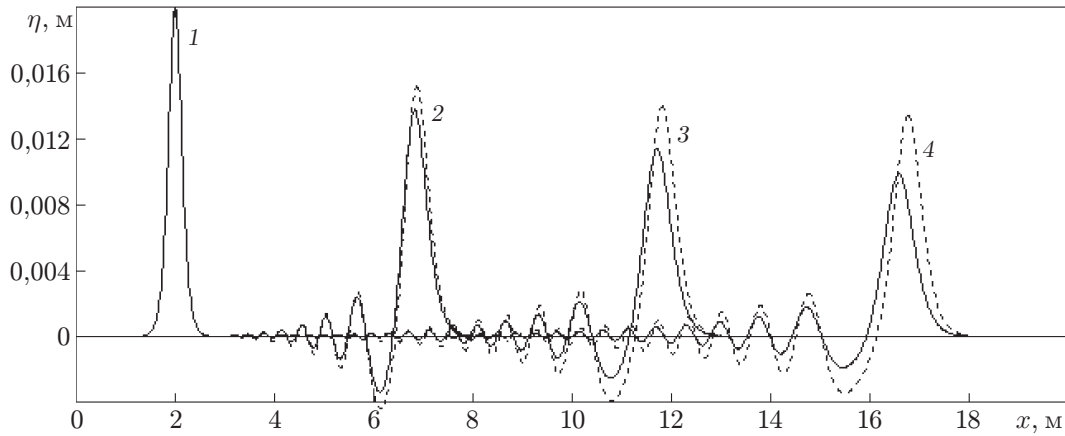


Рис. 2. Трансформация умеренно длинной нелинейной уединенной волны в канале с горизонтальными крышкой и дном:
 t , с: 1 — 0, 2 — 15, 3 — 30, 4 — 45

Данная разностная схема тестировалась на аналитическом решении уравнения (21) с $\nu_l = 0$ и $\nabla h_l = 0$ в виде плоского уединенного возмущения (22). Было подтверждено, что вычисления не только устойчивы, но и сходятся не менее чем со вторым порядком по обоим переменным (как по пространственной координате, так и по времени). На рис. 2–5 показаны результаты расчетов для системы двух жидкостей керосин — вода (плотности $\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$, кинематические вязкости $\nu_1 = 1,62 \text{ мм}^2/\text{с}$ и $\nu_2 = 1,08 \text{ мм}^2/\text{с}$, поверхностное натяжение $\sigma = 34 \text{ мН/м}$).

Если исходная волна является умеренно длинной (зависимость (22) с $L = L_0/2$), то более пологим становится передний фронт возмущения, за которым возникают осцилляции с медленно уменьшающейся амплитудой (рис. 2). Можно сказать, что начальная волна распадается на один солитон и волновой пакет (см., например, [1]). В этой ситуации учет нестационарных сил трения на всех границах системы (сплошные кривые) приводит лишь к затуханию возмущений (штриховые линии соответствуют идеальным жидкостям). При этом невозмущенные значения глубин слоев $h_1 = 12 \text{ см}$ и $h_2 = 8 \text{ см}$, шаг по координате $\Delta x = 2 \text{ см}$ и шаг по времени $\Delta t = 0,125 \text{ с}$.

Если же исходная волна очень длинная (зависимость (22) при $L = 4L_0$), то, конечно, возмущение вначале трансформируется в “треугольное” с крутым передним и растянутым задним фронтами, а затем из него должна была бы выделяться цепочка уединенных волн уменьшающейся амплитуды (см. рис. 3). Однако наличие вязкости препятствует этому процессу. Здесь снова $h_1 = 12 \text{ см}$, $h_2 = 8 \text{ см}$, но $\Delta x = 8 \text{ см}$ и $\Delta t = 0,25 \text{ с}$; обозначения линий те же, что на рис. 2.

Теперь рассмотрим эволюцию длинного уединенного возмущения в канале с наклонным участком крышки. На рис. 4 представлены результаты расчетов для случая, когда на начальном участке протяженностью 8 м глубина верхней жидкости постоянна, а на участке 8–16 м она линейно уменьшается на 25 % (с 12 до 9 см). При этом исходная волна описывается профилем (22) с $L = L_0$, $\Delta x = 4 \text{ см}$, $\Delta t = 0,125 \text{ с}$. По сравнению с ситуацией, когда крышка была горизонтальной, за основным возмущением появился небольшой дисперсионный “хвост” в виде волнового пакета (штриховые линии). Учет нестационарных сил трения на всех границах системы (сплошные кривые) еще раньше приводит как к затуханию основной волны, так и к возникновению диссипативного “хвоста”. В результате не только происходит гашение осцилляций, но и отсутствуют отрицательные значения для возмущения границы раздела.

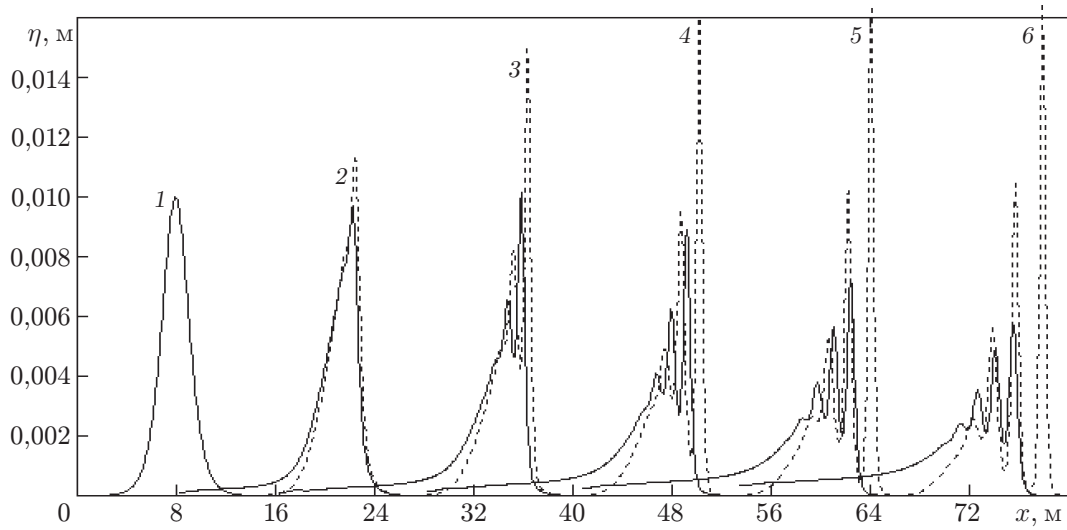


Рис. 3. Распространение очень длинного уединенного возмущения в системе с горизонтальными крышкой и дном:
 t , с: 1 — 0, 2 — 40, 3 — 80, 4 — 120, 5 — 160, 6 — 200

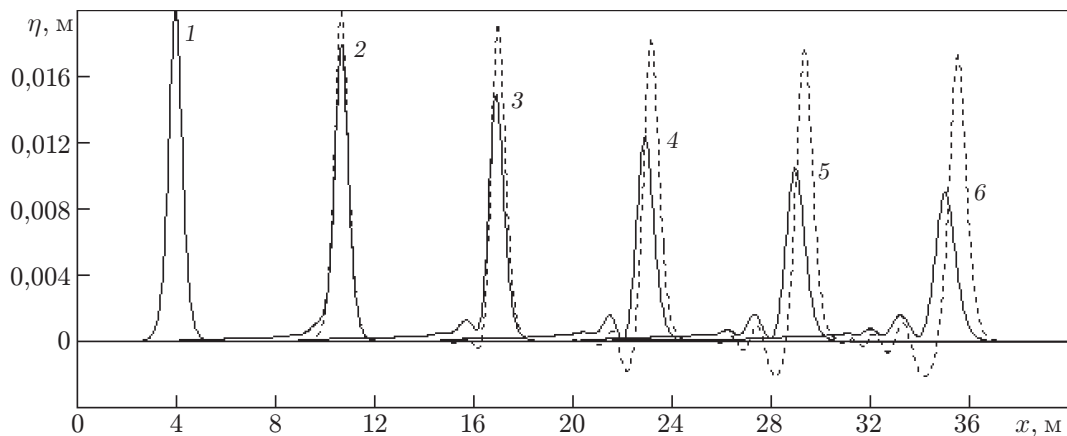


Рис. 4. Эволюция нелинейного уединенного возмущения при незначительном снижении крышки и горизонтальном дне:
 t , с: 1 — 0, 2 — 20, 3 — 40, 4 — 60, 5 — 80, 6 — 100

На рис. 5 представлены результаты расчетов для случая, когда на участке с 8 до 16 м глубина верхнего слоя линейно уменьшается на 50 % (с 12 до 6 см). При этом исходная волна также описывалась профилем (22) с $L = L_0$, $\Delta x = 4$ см, $\Delta t = 0,125$ с. Хорошо видно не только очевидное убывание скорости распространения возмущения, но и кардинальное изменение его формы. Как и в случае, представленном на рис. 3, наблюдается возникновение волнового пакета и выполаживание переднего фронта возмущения. По мере снижения крышки коэффициент при нелинейном члене в уравнении (21) меняет знак, что и вызывает именно такое разрушение исходной волны. Влияние вязкости жидкостей в этой ситуации более наглядно.

Уравнение (21) позволило вычислить и трансформацию первоначально плоской нелинейной уединенной волны (22) в канале с трехмерным препятствием. На рис. 6 показаны возмущения границы раздела в случае, когда дно горизонтально, а на крышке имеется

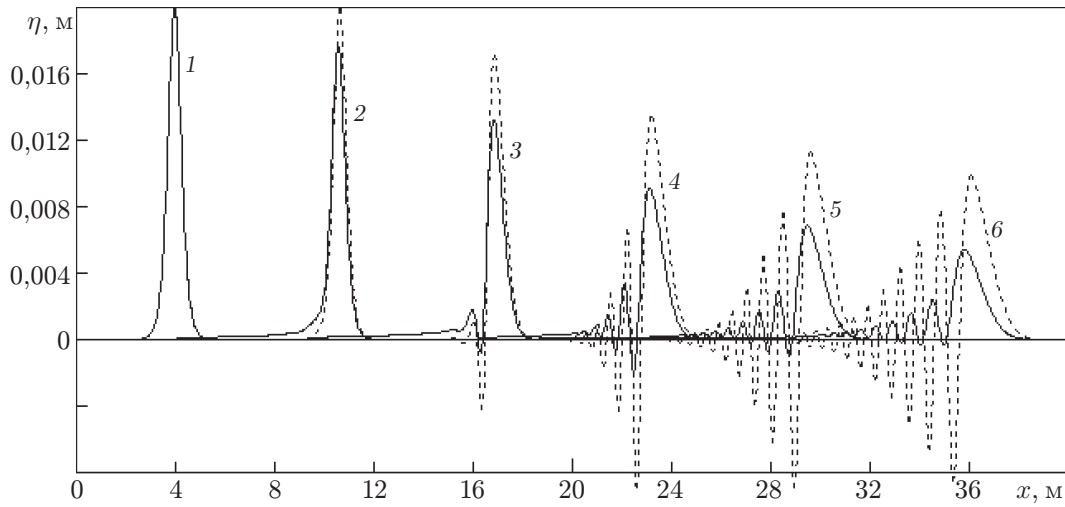


Рис. 5. Трансформация нелинейной уединенной волны при существенном снижении крышки и горизонтальном дне:
 t, с: 1 — 0, 2 — 20, 3 — 42, 4 — 60, 5 — 90, 6 — 114

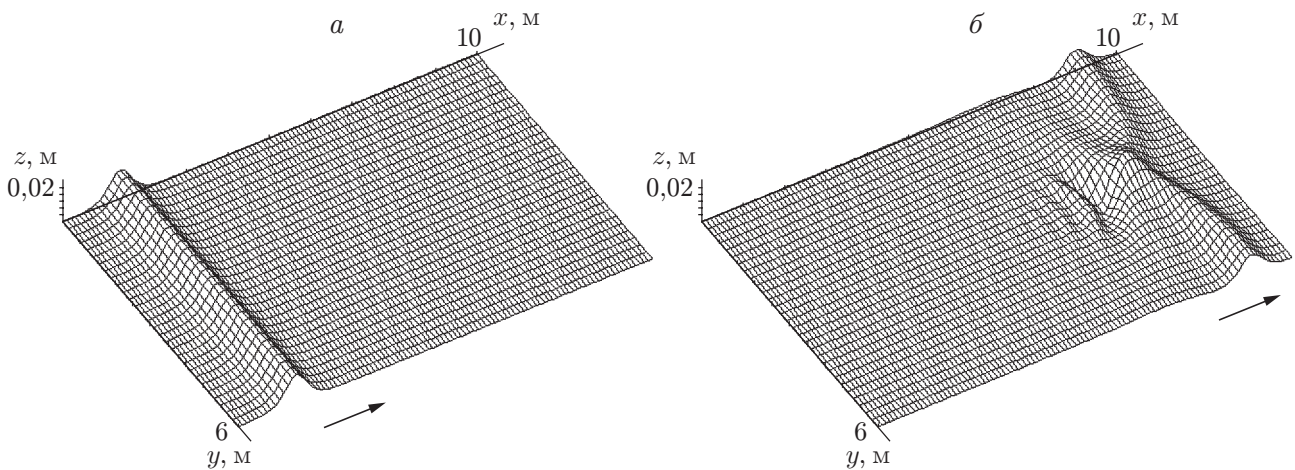


Рис. 6. Распространение плоской нелинейной уединенной волны в канале с трехмерным выступом на его крышке:
 a — t = 0, б — t = 23 с

почти плавный выступ, расположенный параллельно волновому вектору:

$$\begin{aligned}
 & h_1 \{ 1 - 0,5 \exp [-4(x_r - x)^2] \exp [-(y_r - y)^2] \} && \text{при } x \leq x_r, \\
 & h_1 \{ 1 - 0,5 \exp [-(y_r - y)^2] \} && \text{при } x > x_r.
 \end{aligned}$$

Здесь x_r и y_r — характерные координаты препятствия. В данной ситуации $x_r = 4$ м, $y_r = 3$ м. Остальные параметры жидкостей были точно такими же, как и для вышеупомянутых расчетов (см. рис. 2–5). Наблюдается некоторое отставание возмущения и слабые волны типа корабельных. Однако на рис. 6 можно увидеть не просто увеличение амплитуды возмущения под выступом и образование дисперсионного “хвоста”, а развал уединенной волны в этой области канала, хотя, конечно, затухание, вызванное диссипацией, заметно сгладило процесс.

Обсуждение результатов расчетов. Эволюция длинных уединенных возмущений в стратифицированных жидкостях с горизонтальным дном, аналогичная исследованной выше, была обнаружена многими авторами. Это осуществлено как с помощью уравнения Кортевега — де Вриза (см., например, монографии [1, 4]), так и в различных опытах (см. работы [4, 7, 17]).

Результаты расчетов по распространению уединенной внутренней волны в двухслойной жидкости под крышкой при плавном подъеме дна представлены в [18]. Динамика возмущения, показанная на рис. 5, хорошо с ними согласуется. В работе [19] экспериментальное исследование трансформации уединенной внутренней волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью выполнено в лотке с участком линейного уменьшения глубины нижней жидкости. Качественно картина та же, что и на рис. 5, а количественное сравнение сделать невозможно из-за того, что в этой работе мареограммы на иллюстрациях слишком мелкие.

Аналогичная ситуация имела место при натуральных наблюдениях и в модельных вычислениях для нелинейных периодических волн [20]. В работе [21] коэффициент при нелинейном члене в уравнении Кортевега — де Вриза также изменял свой знак. Но это объяснялось не подъемом дна бассейна, а горизонтальной неоднородностью глубин слоев жидкостей, т. е. местоположением границы раздела.

Что касается эволюции существенно трехмерных возмущений, моделируемой с помощью уравнения (21), то она подобна той, которая рассмотрена в работе [16] для достаточно длинных волн малой, но конечной амплитуды в однородном слое вязкой жидкости над полого изменяющимся дном с поправкой на возможность “перевернутых” возмущений при соответствующих параметрах двухслойной системы и неровностях крышки.

Выводы. Получено эволюционное уравнение для пространственных волн на границе раздела двух вязких жидкостей, которое учитывает слабую нелинейность возмущений, длинноволновые вклады инерций слоев и поверхностного натяжения, пологие наклоны крышки и дна, а также нестационарные силы трения на всех границах системы. Найденные численные решения модельного уравнения для плоских волн хорошо согласуются с результатами других авторов. Продемонстрировано, каким может быть вклад диссипации в динамику двумерных уединенных возмущений малой, но конечной амплитуды. Рассчитана трансформация первоначально плоской нелинейной волны в трехмерное возмущение при наличии плавного выступа на крышке. Таким образом, предложенное уравнение позволяет значительно упростить исследование волновых процессов в каналах сложной конфигурации и для пространственных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
5. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
6. **Ильичев А. Т.** Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003.
7. **Кооп С. Г., Бутлер Г.** An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 225–251.
8. **Leone С., Segur Н., Hammack J. L.** Viscous decay of long internal solitary waves // Phys. Fluids. 1982. V. 25, N 6. P. 942–944.

9. **Хабахпашев Г. А.** Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 6. С. 118–123.
10. **Keulegan G. H.** Gradiual damping of solitary waves // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1948. V. 40, N 6. P. 487–498.
11. **Kakutani T., Matsuuchi K.** Effect of viscosity on long gravity waves // J. Phys. Soc. Jap. 1975. V. 39, N 1. P. 237–246.
12. **Гаврилов Н. В.** Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1988. Т. 29, № 4. С. 51–55.
13. **Хабахпашев Г. А.** Моделирование распространения внутренних волн в двухслойном океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 1. С. 72–82.
14. **Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.** Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 753–756.
15. **Пелиновский Д. Е., Степанянц Ю. А.** Неустойчивость уединенных волн в средах с положительной дисперсией в рамках двумерных уравнений Буссинеска // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1994. Т. 106, № 1. С. 192–206.
16. **Литвиненко А. А., Хабахпашев Г. А.** Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 3. С. 95–105.
17. **Segur H., Hammack J. L.** Solitary models of long internal waves // J. Fluid Mech. 1982. V. 118. P. 285–304.
18. **Helfrich K. R., Melville W. K., Miles J. W.** On interfacial solitary waves over slowly varying topography // J. Fluid Mech. 1984. V. 149. P. 305–317.
19. **Maurer J., Hutter K., Diebels S.** Viscous effect in internal waves of two-layered fluid with variable depth // Europ. J. Mech. B/Fluids. 1996. V. 15, N 4. P. 445–470.
20. **Holloway P. E., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B.** A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf // J. Phys. Oceanogr. 1997. V. 27, N 6. P. 871–896.
21. **Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Гримшоу Р.** Трансформация солитона в точке нулевой нелинейности // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65, № 1. С. 113–117.

Поступила в редакцию 14/1 2005 г.
