

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ СИЛАМИ

В. И. Хоничев, В. И. Яковлев
(Новосибирск)

Известны работы [1—4], демонстрирующие принципиальную возможность создания магнитогидродинамических движителей для морских судов. В них показано, что вследствие малой проводимости морской воды и ограниченности применяемых магнитных полей эффективность этих движителей невысока. Однако успехи, достигнутые в последние годы в создании сверхпроводящих материалов, позволяют надеяться на повышение допустимых напряженностей в магнитных системах, а следовательно, и КПД рассматриваемых МГД-движителей. Вследствие этого интерес представляет исследование особенностей обтекания тел, в окрестности которых имеются электромагнитные объемные силы (от источника, находящегося внутри обтекаемого тела).

1. Данная работа посвящена исследованию движения простейшей модели твердого тела (пластины конечной ширины) в проводящей вязкой жидкости. В результате численного решения уравнений Навье — Стокса совместно с уравнением движения твердого тела определены скорость поступательного движения пластины относительно неподвижной па бесконечности жидкости, а также картина обтекания пластины; пластина приводится в движение магнитным полем в виде бегущей волны, создаваемым поверхностными токами, распределенными по ширине пластины. Наличие вихревых объемных сил в жидкости вокруг пластины, приводимой в движение рассматриваемым электромагнитным способом, делает картину обтекания отличной от «классической».

В связи с использованием численного метода решения уравнений Навье — Стокса исследуемое течение ограничено значениями числа Рейнольдса порядка 10^3 .

Итак, рассматривается плоская пластина шириной $2a$ по оси x , бесконечно протяженная по оси z , находящаяся в безграничной проводящей вязкой жидкости. Вдоль оси z по пластине течет поверхностный ток

$$(1.1) \quad i_z(x_1, t) = i_0(x_1) e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} (|x_1| \leq a)$$

в виде бегущей волны с переменной по x амплитудой. Рассматривается случай $i_0(x_1) = I_0 \cos(\pi x_1/2a)$. Необходимо найти распределения электрического и магнитного полей, объемных сил $\mathbf{f} = (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ в проводящей жидкости, силу, действующую на пластину с током (1.1) со стороны магнитного поля токов, индуцированных в жидкости. На этой основе необходимо определить скорость v_0 , приобретаемую пластиной, а также поле скоростей течения жидкости относительно пластины.

2. Электрическое и магнитное поля находятся в предположении, что влиянием течения жидкости на электромагнитные процессы можно пренебречь. Для этого достаточно выполнения условия малости магнитного числа Рейнольдса

$$(2.1) \quad \text{Re}_m = 4\pi\sigma v_0 2a/c^2 \ll 1.$$

Так как число Re_m связано с гидродинамическим числом Рейнольдса Re соотношением $\text{Re}_m = (v/v_m)\text{Re}$, где $v, v_m = c^2/4\pi\sigma$ — соответственно кинематическая и магнитная вязкости, то для морской воды с $\sigma = 5 \cdot 10^{10} \text{ cgs}$, $v = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ имеем $v/v_m \approx 10^{-11}$, т. е. $\text{Re}_m \approx 10^{-11} \text{ Re}$. Следо-

вательно, при рассматриваемых в работе значениях $Re \sim 10^3$ условие (2.1) выполняется с большой точностью.

При условии (2.1) вектор-потенциал $A_1(x_1, y_1, t) = A_1(x_1, y_1)e^{-i\omega t}e_{z_1}$ описывающий электромагнитное поле, определяется следующими безразмерными уравнением и граничными условиями:

$$(2.2) \quad \Delta A(x, y) + (2i/\delta^2) A(x, y) = 0;$$

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} -\cos \pi x \cdot e^{ik_0 x} & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2; \end{cases}$$

$$(2.4) \quad A|_{y=\infty} = 0.$$

Рассматриваемая физическая система симметрична относительно плоскости $y = 0$, поэтому в качестве области определения функции $A(x, y)$ взята полуплоскость $y > 0$. Безразмерные величины в (2.2)–(2.4) имеют вид

$$(2.5) \quad x = x_1/2a, \quad y = y_1/2a, \quad A = A_1/2aH_0, \quad H_0 = 2\pi I_0/c,$$

т. е. в качестве масштабов длины, напряженности магнитного поля и вектора-потенциала приняты $2a$, H_0 , $2aH_0$, а безразмерная величина скин-слоя δ и волновое число k_0 равны

$$(2.6) \quad \delta = \frac{1}{2a} \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad k_0 = k_1 2a.$$

Волновое число k_0 определяет число n полуволн тока, укладываемых на ширине пластины. Действительно, $k_0 = (2\pi/\lambda)2a = n\pi$, где $n = 2a/\lambda/2$. Используя преобразование Фурье по переменной x , решение задачи (2.2)–(2.4) приведем к виду

$$(2.7) \quad A(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} J(k) \frac{e^{-\sqrt{k^2 - 2i/\delta^2} y}}{\sqrt{k^2 - 2i/\delta^2}} e^{ikx} dk, \quad J(k) = \frac{\cos \frac{k - k_0}{2}}{(k - k_0)^2 - \pi^2},$$

где под $\sqrt{k^2 - 2i/\delta^2}$ подразумевается комплексное число с положительной вещественной частью, т. е.

$$(2.8) \quad \sqrt{k^2 - 2i/\delta^2} = r(k) - is(k), \quad r(k) > 0.$$

3. Воспользуемся решением (2.7) для вычисления ротора объемных сил $\mathbf{f} = (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = (\sigma/c)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, а также силы, действующей на пластину.

Известно (см., например, [5]), что в переменном электромагнитном поле объемные силы имеют как стационарную, так и осциллирующую (с частотой 2ω) составляющие. То же относится к суммарной силе F_x , действующей на пластину. В данной работе исследуется установившееся движение, возникающее под действием стационарной части сил, поэтому ниже приводятся выражения только для стационарных составляющих. Так как

$$\langle \mathbf{f} \rangle = (\sigma/2c) \text{Real} (E H_x^* e_y - E H_y^* e_x),$$

$$\text{где } E = i(\omega/c) A_1; \quad H_x = \frac{\partial A_1}{\partial y_1}; \quad H_y = -\frac{\partial A_1}{\partial x_1},$$

искомая величина равна

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \langle \mathbf{f} \rangle &= (\sigma\omega/2c^2)(I_0/c)^2 \text{Rot } f, \\ (3.1) \quad \text{Rot } f &= 8\pi^2 \text{Real} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} kJ(k) e^{-r(k)y} \frac{e^{i[s(k)y+kx]}}{r(k) - is(k)} dk \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} J(k) e^{-r(k)y} e^{i[s(k)y+kx]} dk \right\}. \end{aligned}$$

Здесь через $\text{Rot } f$ обозначен безразмерный ротор объемных сил.

Вычислим проекцию на ось x суммарной силы F , действующей на пластину с током со стороны магнитного поля токов в проводящей жидкости (отнесенную к единице длины пластины по оси z).

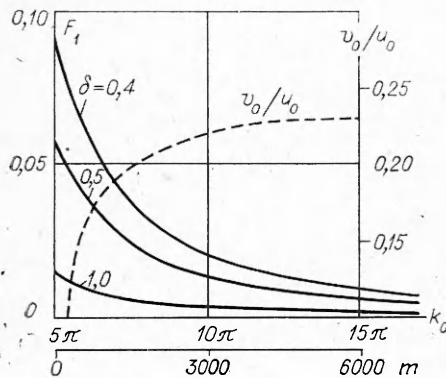
Усредненная по времени (за период $2\pi/\omega$) величина определяется в виде

$$\langle F_x \rangle = -(1/c) \int_{-a}^a \langle i_z(x_1, t) H_y(x_1, 0, t) \rangle dx_1.$$

Подставляя решение (2.7), получаем

$$(3.2) \quad \langle F_x \rangle = -a(I_0/c)^2 F_1, \quad F_1 = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ks(k)}{r^2(k) + s^2(k)} |J(k)|^2 dk,$$

где $r(k)$, $s(k)$ определены согласно (2.8). Результаты вычислений представлены на фиг. 1, где безразмерная сила F_1 приведена в зависимости от k_0 при различных значениях δ .



Ф и г. 1

4. Под действием приложенной силы $\langle \vec{F}_x \rangle$ пластина приобретает поступательную скорость в сторону отрицательных значений x . Пренебрегая влиянием переменной составляющей объемных сил в жидкости на стационарную часть течения (что справедливо при $\delta^2 \text{Re}_m \ll 1$), исследуем установившееся движение пластины относительно жидкости, неподвижной на бесконечности. Фактическое рассмотрение ведется в системе координат, связанной с пластиной; исследуется картина обтекания

пластины жидкостью, имеющей на бесконечности поступательную скорость v_0 , направленную по оси x . Величина v_0 является искомой величиной.

Определяющими уравнениями являются уравнения гидродинамики с объемными силами

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (\nabla \nabla) \Omega &= \text{Rot } f e_z + (1/\text{Re}^*) \Delta \Omega, \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathbf{e}_y, \quad \Delta \Psi = -\Omega, \end{aligned}$$

а также уравнение движения пластины, сводящееся в случае стационарного движения к соотношению $\langle F_x \rangle + T_x = 0$, где T_x — сила сопротивления, действующая на пластинку вследствие вязкости. В безразмерном виде это уравнение приобретает вид

$$(4.2) \quad -F_1 + (1/\pi\delta^2)(1/\text{Re}^*)T = 0, \quad T = - \int_{-1/2}^{1/2} \Omega(x, 0) dx.$$

Безразмерные скорость v , завихренность Ω и функция тока Ψ в уравнениях (4.1), (4.2) введены с использованием масштабов

$$(4.3) \quad u_0 = (I_0/c)(\delta\sqrt{4\pi\rho})^{-1}, \quad \Omega_0 = u_0/2a, \quad \Psi_0 = 2au_0$$

(ρ — плотность жидкости).

Следует обратить внимание, что принятый масштаб скорости u_0 (4.3) не совпадает со скоростью v_0 движения пластины. Число Рейнольдса, входящее в уравнения (4.1), (4.2), определено по скорости u_0 и обозначено через Re^*

$$(4.4) \quad \text{Re}^* = u_0 2a/\nu.$$

Оно отличается от «истинного» числа Рейнольдса, определяемого по скорости движения пластины,

$$(4.5) \quad \text{Re} = v_0 2a/\nu = (v_0/u_0) \text{Re}^*.$$

Отношение v_0/u_0 находится в процессе решения. Представляя искомую функцию в виде суммы

$$(4.6) \quad \Psi(x, y) = (v_0/u_0)y + \psi(x, y),$$

окончательные уравнения запишем в виде

$$(4.7) \quad \left(\frac{v_0}{u_0} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}^*} \Delta \Omega = \text{Rot } f;$$

$$(4.8) \quad \Delta \psi = -\Omega;$$

$$(4.9) \quad F_1 + (1/\pi\delta^2 \text{Re}^*) \int_{-1/2}^{1/2} \Omega_0(x) dx = 0, \quad \Omega_0(x) = \Omega(x, y)|_{y=0}.$$

Граничные условия для уравнений (4.7), (4.8) имеют вид на границе $y = 0$

$$(4.10) \quad \psi = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad \Omega = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1/2, \\ \Omega_0(x) & \text{при } |x| \leq 1/2 \end{cases}$$

на бесконечности

$$\Omega \rightarrow 0, \quad \partial \psi / \partial y \rightarrow 0.$$

Входящая в (4.9), (4.10) функция $\Omega_0(x)$ неизвестна, она определяется в процессе решения из условия прилипания, вследствие чего на поверхности пластины, согласно (4.6), должно удовлетворяться условие

$$\partial \psi / \partial y|_{y=0} = -v_0/u_0 \quad (|x| \leq 1/2).$$

Правая часть уравнения (4.7) определена в (3.1).

Численное решение задачи строилось на основе конечно-разностной схемы Джакупова [6] с небольшими изменениями, вызванными наличием дополнительного уравнения (4.9) и дополнительной неизвестной v_0/u_0 .

Использованная расчетная область представляет собой прямоугольник, образованный прямыми $y = 0$, $y = 0,295$, $x = -0,7375$, $x = 1,2375$. Сетка была выбрана с пространственными шагами $\delta x = 0,025$, $\delta y = 0,005$, следовательно, общее число ячеек составляет 4661; шаг δy взят малым вследствие больших градиентов искомых величин по оси y .

Граничные условия в разностном исполнении для границы $y = 0$ выглядят следующим образом:

$$\psi_{i,0} = 0, \\ \Omega_{i,0} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1/2, \\ -\frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2\delta y^2} - \frac{3v_0}{u_0} \frac{1}{\delta} & \text{при } |x| \leq 1/2 \end{cases}$$

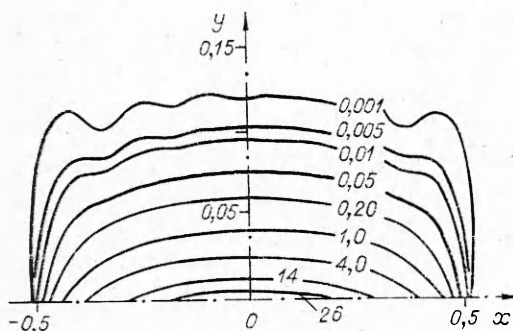
(относительно последнего выражения для завихренности см., например, [7]). На левой ($x = -0,7375$), верхней ($y = 0,295$) и правой ($x = 1,2375$) границах использованы следующие соотношения:

$$\Omega_{0,j} = 0, \psi_{0,j} = \psi_{1,j}, \Omega_{i,N} = 0, \psi_{i,N} = \psi_{i,N-1}, \\ \Omega_{I,j} = \Omega_{I-1,j} - \Omega_{I-2,j}, \psi_{I,j} = 2\psi_{I-1,j} - \psi_{I-2,j},$$

причем при рассматриваемых δx , δy и размерах расчетной области $N = 59$, $I = 79$. Разностная аппроксимация уравнения (4.2) имеет вид

$$\left(\frac{v_0}{u_0}\right)^{(m+1)} = \frac{1}{3} \pi \delta^2 \text{Re}^* F_1 \delta y - \frac{1}{6} \frac{\delta x}{\delta y} \sum_{i=I_1}^{I_2} [8\psi_{i,1}^{(m+1)} - \psi_{i,2}^{(m+1)}],$$

где I_1, I_2 — начальная и конечная точки разностной сетки на пластине; m — номер итераций. Отладка схемы проведена на модельной задаче [8].



Ф и г. 2

5. Конкретный расчет течения проводился для электромагнитного поля, характеризуемого параметрами $k_0 = 14,2\pi$, $\delta = 0,4$, при которых безразмерная сила F_1 равна $0,0100$, а ротор объемных сил Лоренца имеет распределение, показанное на фиг. 2 (здесь приведены изолинии $\text{Rot} f$ с указанием их соответствующих значений). Видно, что электромагнитные источники завихренности быстро ослабевают с удалением от пластины; это обстоятельство

учитывалось при выборе использованной расчетной области с границами, проходящими достаточно близко к пластине. Ошибки, возникающие вследствие замены условий на бесконечности краевыми условиями на границах конечной счетной области, исследовались с помощью варьирования размеров расчетной области, после чего и была выбрана указанная в работе расчетная область. Кроме того, для числа Рейнольдса $\text{Re} = 230,94$ проведен расчет обтекания пластины без электромагнитных полей (в дальнейшем для краткости называется классической пластиной), полученный расчетный коэффициент сопротивления пластины c_f сравнивался с известным коэффициентом [9]

$$(5.1) \quad c_f^0 = 1,328/\sqrt{\text{Re}} + 4,12/\text{Re},$$

подтвержденным экспериментально [10]. Выяснилось, что разница между ними менее 4%: $c_f = 0,1014$, $c_f^0 = 0,1052$. Этот факт говорит в пользу того, что неточности расчета параметров течения у передней и задней кромок пластины, появляющиеся вследствие использования схемы с фикси-

рованной сеткой, также не оказывают заметного влияния на все течение в целом.

Расчет скорости движения пластины и картины обтекания проведен для значений $Re^* = 10^3$ и $3 \cdot 10^3$. Им соответствуют (по результатам расчетов) фактические числа Рейнольдса $Re = 230,94$ и $Re = 1180,60$. (Числа Re , Re^* определены в (4.4), (4.5).)

Результаты расчетов представлены в виде графиков. Штриховая кривая на фиг. 1 иллюстрирует процесс приближения величины v_0/u_0 к своему точному значению в зависимости от числа итераций m . Максимальное число итераций равнялось 6000; с таким количеством итераций рассчитаны все описываемые здесь примеры. Величина v_0/u_0 при этом равна 0,23094 при $Re^* = 10^3$ и 0,39353 при $Re^* = 3 \cdot 10^3$, откуда, согласно (4.5), следует $Re = 230,94$ и $1180,60$.

Расчеты показали, что качественно картины обтекания классической пластины и пластины, приводимой в движение электромагнитными силами, совпадают. Связано это с малостью параметра магнитогидродинамического взаимодействия при движении пластины с $Re \sim 10^3$. Наглядное представление о полях скоростей можно получить из фиг. 3, где приведены профили скорости поперек пластины в сечениях $x = \text{const}$ для $Re = 230,94$ (сплошные линии при наличии электромагнитного поля, штриховые — для классической пластины). Отличие имеется в величине градиента скорости вблизи пластины; градиент скорости в случае пластины с электромагнитным полем больше, чем для классической пластины. Об этом можно судить по фиг. 4, 5, где представлены изолинии завихренности Ω при $Re = 230,94$ для пластины с электромагнитным полем (фиг. 4) и для классической пластины (фиг. 5). Видно, что различие в распределении Ω в этих двух случаях имеет место в непосредственной окрестности пластины и обусловлено влиянием ротора объемных сил в этом районе. Отсюда понятно, что коэффициент сопротивления c_3 пластины с электромагнитным полем выше, чем коэффициент сопротивления c_3^0 классической пластины. Сравним эти величины при $Re = 230,94$; c_3 находится из соотношения

$$\langle F_x \rangle = 2c_3 (\rho v_0^2 / 2) 2a = c_3 \rho (v_0 / u_0)^2 u_0^2 2a,$$

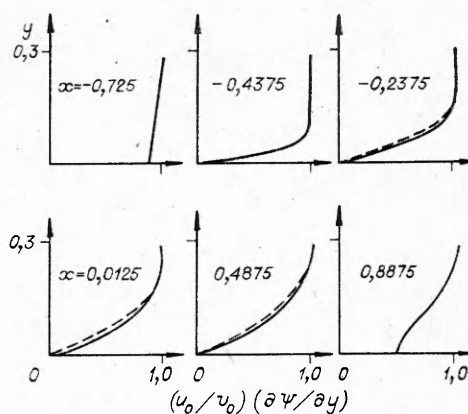
где $\langle F_x \rangle$ и u_0 определены в (3.2), (4.3). Отсюда

$$c_3 = 2\pi \delta^2 \frac{F_1}{(v_0 / u_0)^2},$$

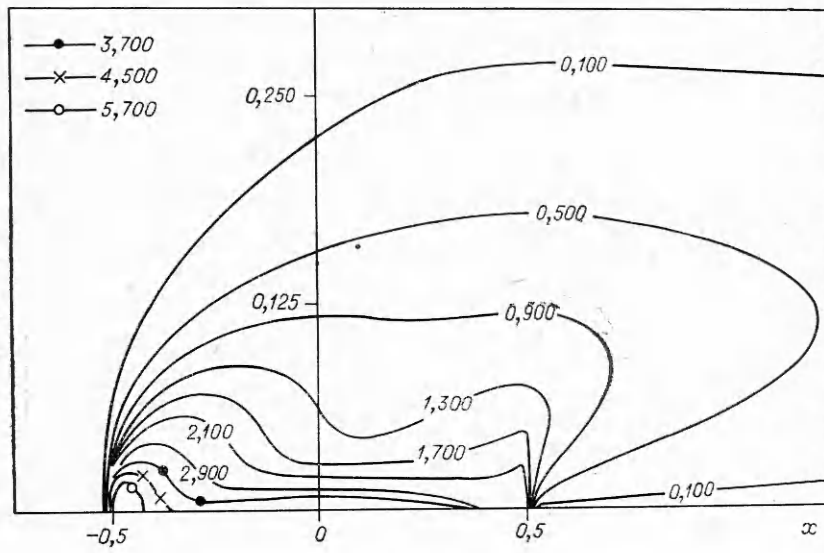
и при названных выше значениях параметров ($\delta = 0,4$, $F_1 = 0,0100$, $v_0 / u_0 = 0,23094$), $c_3 = 0,188$; c_3^0 определяется по формуле (5.1) и имеет значение 0,105.

Таким образом, коэффициент сопротивления пластины, приводимой в движение рассматриваемым вариантом электромагнитного поля, в 1,8 раза выше, чем коэффициент сопротивления классической пластины.

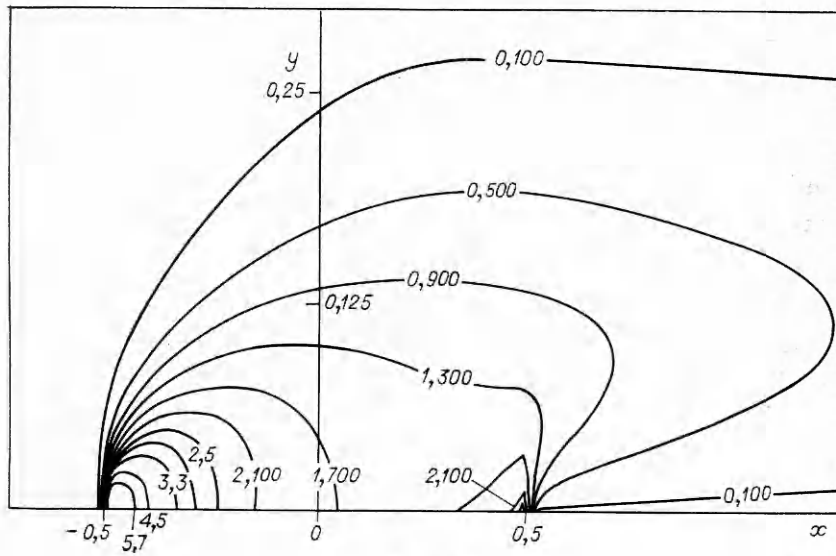
Из результатов, относящихся к $Re = 1180,60$, приведем изолинии $\Omega = \text{const}$ (фиг. 6, здесь и на фиг. 2—5 расчетная область в направлении



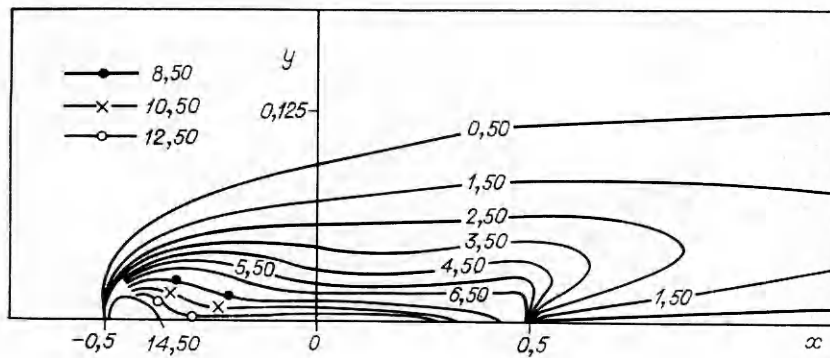
Фиг. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

y растягнута в 4 раза). Видно, что последние более вытянуты в направлении основного потока и прижаты к пластине (из-за конвективного переноса вихря), чем соответствующие линии при $Re = 230,94$ (фиг. 4).

Приведем в заключение некоторые размерные величины, соответствующие рассматриваемому движению пластины с $Re^* = 3 \cdot 10^3$ в электролите с $\sigma = 10^{12}$ 1/с. Пусть $2a = 10^2$ см. Тогда из (2.6) при $\delta = 0,4$ следует $\omega = 9 \cdot 10^4$ 1/с, из (4.4) и $v_0/u_0 = 0,39$ следует $v_0 = 1,2 \cdot 10^{-1}$ см/с; из (4.3), (2.5) определяется амплитуда максимальной напряженности магнитного поля $H_0 = 2\pi I_0/c \simeq 2,7$ Гс.

Поступила 30 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирко И. М. Жидкий металл в магнитном поле. М.—Л., Энергия, 1964.
2. Phillips O. M. The prospects for magnetohydrodynamic ship propulsion.— J. ship research, 1962, vol. 5, N 4.
3. Васильев Л. Г., Хожанов А. И. Магнитная гидродинамика в судовой технике. Л., Судостроение, 1967.
4. Меркулов В. И. Движение сферы в проводящей жидкости под действием скрещенных электрического и магнитного полей.— Магнитн. гидродинамика, 1973, № 1.
5. Sneyd A. Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, p. 4.
6. Джакупов К. Б. О некоторых разностных схемах для уравнений Навье — Стокса.— ЧММСС, 1971, т. 2, № 1.
7. Кускова Т. В. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 7. М., изд. Моск. ун-та, 1967.
8. Меркулов В. И., Панчук В. И., Ткаченко В. Ф. Решение уравнений движения электропроводящей жидкости в продольном бегущем магнитном поле.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, Наука, 1969.
9. Цянь Сюэ-сэнь. Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го.— В кн.: Проблемы механики. М., ИЛ, 1959.
10. Janour Z. Resistance of a plate in a parallel flow at low Reynolds number. NASA TM N 1316, 1951.

УДК 532.526.2.53

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ

В. И. Вишняков, А. П. Шахорин
(Москва)

Рассмотрена задача о нестационарном обтекании плоской проницаемой пластины неньютоновской жидкостью со степенным реологическим законом. В отличие от [1], где рассмотрена аналогичная постановка задачи для псевдопластической жидкости, в данной работе приведено решение для случая дилатантной жидкости.

Для неньютоновских жидкостей со степенным реологическим законом связь между напряжением сдвига τ и градиентом скорости $\partial u/\partial z$ в случае плоских движений имеет вид [2]

$$\tau = k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (n > 0),$$

где k и n — реологические константы среды; причем случай $n = 1$ соот-