

УДК 539.3

СТАБИЛИЗАЦИЯ ТРЕЩИНЫ В ХРУПКОМ ТЕЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Д. Заикин

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
630008 Новосибирск
E-mail: az@cn.ru

Исследовано поведение трещины при наличии подкрепляющих элементов в случае одноосного растяжения. Подкрепляющие элементы (приклепанные ребра жесткости) моделировались сосредоточенными нагрузками. Учитывались лишь четыре ближайших к трещине элемента. Установлено, что применение подкрепляющих элементов позволяет стабилизировать трещину, избежать катастрофического увеличения ее длины. Получены соотношения, связывающие геометрические и силовые характеристики, при которых достигается стабилизация трещины. Дано объяснение механизма стабилизации.

Ключевые слова: трещина, коэффициент интенсивности напряжений, подкрепляющие элементы, стабилизация.

Катастрофическое развитие трещины, приводящее к разрушению конструкции, может быть предотвращено за счет применения ребер жесткости (накладных приклепанных элементов). В [1] подкрепление трещины, находящейся в поле одноосного растяжения, моделируется постоянными противоположно направленными сосредоточенными нагрузками. При этом учитываются лишь четыре ближайших к трещине заклепки, влияние удаленных полагается пренебрежимо малым. В результате расчетов установлено, что при некоторых сочетаниях геометрических параметров происходит стабилизация трещины, заключающаяся в переходе в подвижно-равновесное устойчивое состояние. Расчеты, основанные на модели разрушения Баренблатта, проводились в предположении, что имеет место плоская деформация, а материал пластины несжимаем.

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) при воздействии на трещину четырех симметрично расположенных сосредоточенных нагрузок получен в [2] с использованием преобразования Фурье и сингулярного интегрального уравнения типа Коши. Выражение для КИН, совпадающее в частных случаях двух нагрузок, расположенных на осях симметрии трещины, с известными решениями, полученными другими методами, приведено в работе [3].

Влияние подкрепляющих элементов на поведение трещины подробно исследовано в [4, 5] в постановке, аналогичной [1]. В качестве критерия разрушения использовался интегральный критерий Нейбера — Новожилова. Проведены многочисленные расчеты, подтверждающие возможность существования подвижно-равновесного устойчивого состояния трещины. В [4, 5] утверждается также, что полученное решение отличается от приведенного в [2, 3] решения, которое содержит разрывы второго рода, ставящие под сомнение его корректность. В данной работе установлена корректность решения [2] и на его основе определены основные закономерности режима стабилизации трещины.

Рассмотрим бесконечную пластину, ослабленную трещиной длиной $2L$ и находящуюся в состоянии одноосного растяжения. На бесконечности к пластине приложено напряже-

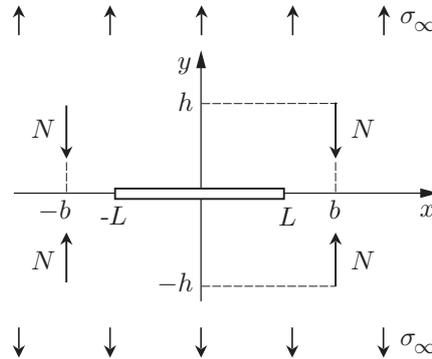


Рис. 1. Расположение подкрепляющих элементов относительно трещины

ние σ_∞ . Подкрепляющие элементы (заклепки ребер жесткости) моделируются четырьмя сосредоточенными нагрузками N , симметричными относительно трещины. Расположение трещины, сосредоточенных нагрузок и осей координат показано на рис. 1.

Вследствие одноосного растяжения выражение для КИН нормального отрыва имеет вид

$$K_I^0 = \sqrt{\pi L} \sigma_\infty. \quad (1)$$

Для четырех сосредоточенных нагрузок, моделирующих подкрепляющие элементы, выражение для КИН приведено в [2, 3]:

$$K_I^1(b, h) = -2N \sqrt{L/\pi} \operatorname{Re} [(L^2 - z^2)^{-1/2} - 2ihz(L^2 - z^2)^{-3/2}/(\varkappa + 1)] \quad (2)$$

($z = b + ih$). В случае плоской деформации $\varkappa = 3 - 4\nu$ (ν — коэффициент Пуассона), в случае плоского напряженного состояния $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Преобразуя выражение $L^2 - z^2 = L^2 + h^2 - b^2 - 2ibh = r e^{-i\theta}$, где

$$r^2 = (L^2 + h^2 - b^2)^2 + (2bh)^2, \quad \operatorname{tg} \theta = 2bh/(L^2 + h^2 - b^2), \quad (3)$$

находим

$$(L^2 - z^2)^{-k/2} = r^{-k/2} [\cos(k\theta/2) + i \sin(k\theta/2)], \quad (4)$$

$$2ihz(L^2 - z^2)^{-k/2} = 2hr^{-k/2} \{-h \cos(k\theta/2) - b \sin(k\theta/2) + i[b \cos(k\theta/2) - h \sin(k\theta/2)]\}.$$

Подставляя (4) в (2), получаем более удобное для расчетов выражение для КИН нормального отрыва

$$K_I^1(b, h) = -2N \sqrt{\frac{L}{\pi}} \left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{r}} + \frac{2h}{(\varkappa + 1)\sqrt{r^3}} [h \cos(3\theta/2) + b \sin(3\theta/2)] \right). \quad (5)$$

Функция $\operatorname{arctg}(y/x)$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{arctg}(y/x) = \operatorname{Arctg}(y/x) + m\pi, \quad m = \begin{cases} 1, & x < 0, y > 0, \\ 0, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$

где $-\pi/2 \leq \operatorname{Arctg}(y/x) \leq \pi/2$ — главное значение арктангенса. Поэтому при вычислении угла θ в выражении (3) следует учитывать, что при $L^2 + h^2 < b^2$ значение $m = 1$. Согласно [4, 5] именно на кривой $L^2 + h^2 = b^2$ происходит разрыв решения (2).

На рис. 2 представлены изолинии безразмерной функции $-K_I^1(b, h)\sqrt{L}/N$, вычисленные по (5) при $\varkappa = 2$. Построенное решение не имеет разрывов. Наиболее вероятно, что

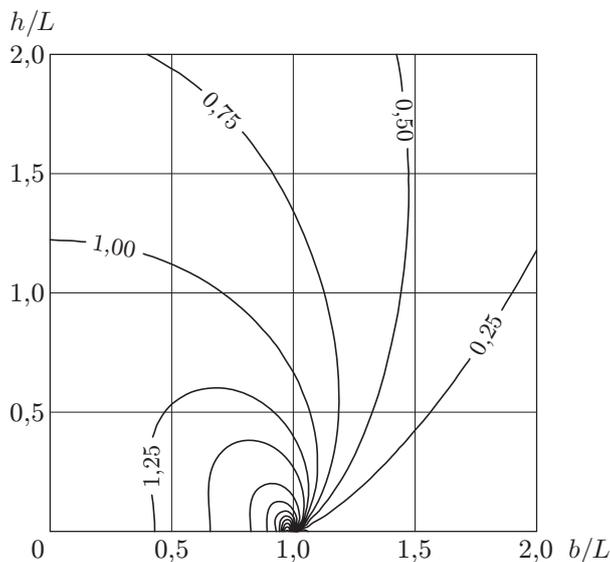


Рис. 2. Изолинии функции $-K_I^1(b, h)\sqrt{L}/N$

разрывы, о присутствии которых сказано в [4, 5], возникли вследствие некорректного вычисления функции $\text{arctg } \theta$. По характеру изолиний, приведенных на рис. 2, можно судить о влиянии расположения подкрепляющих элементов на величину КИН нормального отрыва. Отметим, что постановка задачи исключает размещение подкрепляющих элементов в вершине трещины. Компактность и простота решения (5) позволяют исследовать поведение трещины в зависимости от параметров подкрепляющих элементов. Из решения (5) следует, что уменьшение продольного расстояния между подкрепляющими элементами приводит к увеличению значения КИН нормального отрыва, а увеличение поперечного расстояния приводит к его уменьшению.

В силу того что в (1) и (2) знаки у коэффициентов интенсивности противоположны, совместное действие одноосного растяжения и подкрепляющих элементов может приводить к отрицательным значениям суммарного КИН. Такая задача, соответствующая сильным подкрепляющим элементам, реализуется при перекрытии берегов трещины (в данной работе не рассматривается).

В соответствии с критерием разрушения Ирвина трещина начинает расти при достижении КИН своего критического значения K_{Ic} , являющегося константой материала. В данном случае условие страгивания трещины записывается в виде

$$K_I^0 + K_I^1(b, h) \geq K_{Ic}. \tag{6}$$

С учетом (1) и (6) для трещины длиной $2L$ определим напряжение в случае одноосного растяжения, при котором начинается катастрофический рост:

$$\sigma_\infty(L) \geq (K_{Ic} - K_I^1(b, h))/\sqrt{\pi L}. \tag{7}$$

Помимо длины трещины можно определить характерный линейный размер задачи в виде $L_0 = (N/K_{Ic})^2$. Тогда наряду с функцией $\sigma_\infty(L)$ можно построить безразмерную функцию $\sigma_0(L/L_0) = \sigma_\infty(L)\sqrt{L_0}/K_{Ic}$.

На рис. 3 представлена зависимость $\sigma_0(L/L_0)$ при отсутствии подкрепляющих элементов (кривая 1). Из данной зависимости (фактически это классическая кривая Гриффитса) следует, что при достижении КИН своего критического значения K_{Ic} происходит катастрофическое увеличение длины трещины, т. е. разрушение тела. Наличие подкрепляющих элементов приводит к существенному изменению поведения трещины под нагрузкой

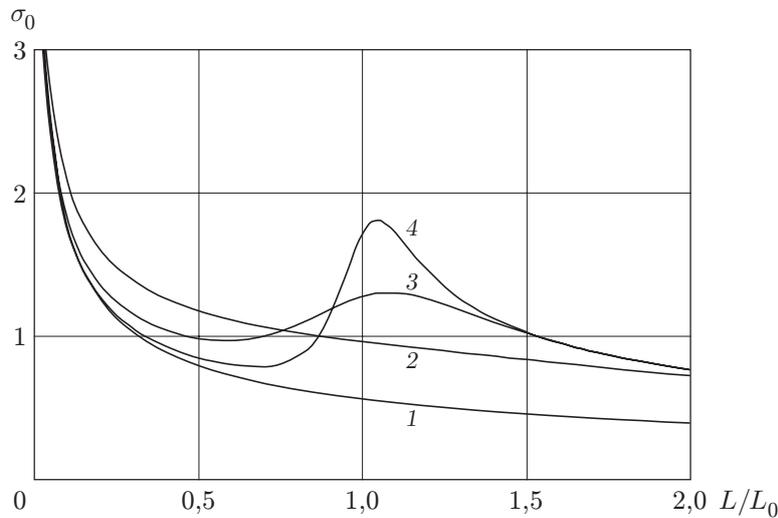


Рис. 3. Зависимость напряжения страгивания трещины от ее длины:
 1 — при отсутствии подкрепляющих элементов; 2–4 — при наличии подкрепляющих элементов в случае $b = L_0$ (2 — $h = 1,5L_0$; 3 — $h = 0,4L_0$; 4 — $h = 0,15L_0$)

(кривая 2). Возможны такие сочетания параметров, при которых развитие трещины происходит по другому сценарию (кривые 3, 4 на рис. 3). Наличие на кривых 3, 4 участка с положительной производной функции $\sigma_0(L/L_0)$ свидетельствует о возможности стабилизации трещины.

Поведение трещины в данном режиме описано в [1, 4, 5]. При достижении нагрузкой своего критического значения происходит скачкообразный переход (увеличение длины трещины) в другое устойчивое состояние, соответствующее участку с положительной производной. Дальнейший рост нагрузки приводит к устойчивому росту трещины до определенных размеров и последующему катастрофическому разрушению тела.

Участок на кривой Гриффитса, соответствующий устойчивому росту трещины, возможен при условии

$$\frac{d\sigma_\infty(L)}{dL} \geq 0. \quad (8)$$

С учетом (2) и (7) условие (8) принимает вид

$$H(b, h) \geq H_0, \quad (9)$$

где

$$4H_0 = \sqrt{\frac{\pi L}{L_0}}; \quad H(b, h) = -\frac{L^3}{\sqrt{r^5}} \left(\frac{6h}{\varkappa + 1} [h \cos(5\theta/2) + b \sin(5\theta/2)] + r \cos(3\theta/2) \right).$$

Функция $H(b, h)$ зависит от расположения подкрепляющих элементов, а правая часть неравенства (9) — от свойств материала и величины сосредоточенных нагрузок. Неравенство (9) позволяет определить положение подкрепляющих элементов, обеспечивающее устойчивый рост (стабилизацию) трещины.

На рис. 4 представлены изолинии функции $H(b, h)$ при $\varkappa = 2$. Замкнутые изолинии, имеющие вид лепестков, расположены под острым углом к направлению распространения трещины. По заданным значениям K_{Ic} и N можно определить изолинию, обладающую следующим свойством: подкрепляющие элементы, соответствующие точкам, расположенным внутри нее, гарантируют стабилизацию трещины. Нулевая изолиния отделяет область, вне которой ни при каких условиях стабилизация невозможна. На рис. 4 видно, что

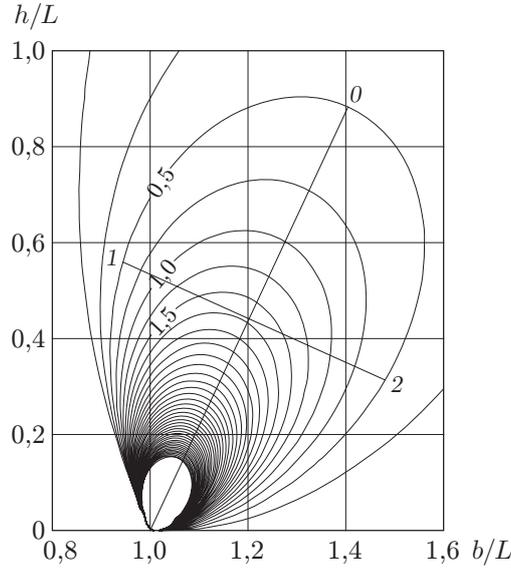


Рис. 4. Изолинии функции $H(b, h)$

при $b = 0$ с помощью двух подкрепляющих элементов, расположенных симметрично относительно трещины, достичь стабилизации трещины невозможно. Увеличение нагрузки N приводит к увеличению области, соответствующей параметрам расположения подкрепляющих элементов, обеспечивающего стабилизацию трещины.

Форма и положение изолиний функций $H(b, h)$ и $K_I^1(b, h)$ позволяют объяснить причины возникновения стабилизации при наличии подкрепляющих элементов. Пусть положение подкрепляющего элемента определяется координатами (b_s, h_s) . Для определенности будем полагать, что продольное расстояние между подкрепляющими элементами (в направлении расположения трещины) больше длины трещины: $b_s > L$. В тот момент, когда условие страгивания будет выполнено, трещина начнет расти. Однако при увеличении длины трещины изменяется положение подкрепляющих элементов относительно трещины. При этом уменьшаются относительные расстояния (по отношению к длине трещины) между подкрепляющими элементами как в направлении расположения трещины, так и перпендикулярно ему. Можно говорить не об увеличении длины трещины, а о переносе подкрепляющего элемента вдоль прямой $h = bh_s/b_s$ ближе к началу координат. Такой перенос приводит к увеличению КИН нормального отрыва, обусловленного наличием подкрепляющих элементов $K_I^1(b, h)$ (см. рис. 2), зависящему от их начального расположения. Несмотря на то что в соответствии с (1) K_I^0 также увеличивается, возможны такие значения (b_s, h_s) , при которых суммарное значение КИН нормального отрыва уменьшится. Условие страгивания не будет выполняться, наступит стабилизация трещины.

Исследуем основные характеристики изолиний $H(b, h)$. Сначала определим направление, вдоль которого вытянуты лепестки изолиний. Положим $z = L(1 + \rho e^{i\varphi})$. Тогда для заданного значения ρ_0 существует значение угла φ_0 , при котором функция $H(\rho, \varphi)$ максимальна. Условие $dH(\rho, \varphi)/d\varphi = 0$ однозначно определяет функцию $\varphi_0(\rho_0, \varkappa)$. Получить аналитическое выражение для функции $\varphi_0(\rho_0, \varkappa)$ не представляется возможным, однако можно исследовать поведение функции $H(\rho, \varphi)$ при $\rho \ll 1$ и $\rho \gg 1$.

В области малых значений $\rho \ll 1$ функцию $\varphi_0 = \varphi_0(\rho_0, \varkappa)$ можно определить, разлагая уравнение (9) в ряд. Если $\omega = \varphi/2$, то с учетом первых двух членов разложения получаем

$$H(\rho, \omega) = -\frac{3}{4\sqrt{2}(\varkappa + 1)\rho^{3/2}} \left(\sin 7\omega - \frac{2\varkappa + 5}{3} \sin 3\omega - \frac{\rho}{4} [\sin 5\omega - (2\varkappa + 1) \sin \omega] \right). \quad (10)$$

Приравняв производную от (10) по ω к нулю, получаем

$$28 \cos 7\omega - 4(2\kappa + 5) \cos 3\omega - 5\rho \cos 5\omega + \rho(2\kappa + 1) \cos \omega = 0. \quad (11)$$

При $\kappa = 1$, $\rho = 0$ решением полученного уравнения являются значения $\omega_1 = \pi n/5$ и $\omega_2 = \pi n$ ($n = 0, 1, \dots$). Представляет интерес корень $\omega_1 = \pi/5$. При произвольных параметрах κ и ρ уравнение (11) сводится к кубическому уравнению относительно $\cos^2 \omega$, решая которое из трех действительных корней нужно выбрать совпадающий с корнем ω_1 при $\kappa = 1$, $\rho = 0$.

Решение можно построить иначе. При $\rho < 1$ точное значение корня кубического уравнения отличается от значения ω_1 не более чем на 6° . Поэтому решение (11) можно представить в виде $\omega = \pi/5 - \alpha$, где $\alpha \ll 1$. Подставляя это выражение для ω в (11) и учитывая лишь линейные по малому параметру члены, найдем α . Переходя к углу φ , получаем

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{5} - \frac{2(\kappa - 1)}{3\kappa + 32} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{5} \right) - \rho_0 D(\kappa), \quad (12)$$

где $D(\kappa) = \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})/[80(3\kappa + 32)^2](4\kappa + a_1)(4\kappa + a_2)}$; $a_{1,2} = 4 + 10\sqrt{5} \pm \sqrt{2}\sqrt{325\sqrt{5} - 663}$.

Исследуем поведение функции $H(b, h)$ вдали от вершины трещины. Учитывая, что при этом $\rho \gg 1$, из (9) получаем

$$H(\rho, \varphi) = -\frac{(\kappa + 4) \sin 3\varphi - 3 \sin 5\varphi}{(\kappa + 1)\rho^3}. \quad (13)$$

Из уравнения $dH(\rho, \varphi)/d\varphi = 0$ при $\kappa = 1$ получаем $\varphi_0 = \pi/4$. При $1 < \kappa \leq 3$ приближенное решение можно построить, используя тот факт, что оно незначительно отличается от $\pi/4$. Полагая $\varphi_0 = \pi/4 - \alpha$ и учитывая, что $\alpha \ll 1$, получаем

$$\varphi_0 = \pi/4 - (\kappa - 1)/(3\kappa + 37). \quad (14)$$

Уравнение $dH(\rho, \varphi)/d\varphi = 0$ при произвольном значении ρ можно решить численно. Результаты расчетов при $\kappa = 1, 2, 3$ приведены на рис. 5 (кривые 1–3). Подставляя ρ_0 и

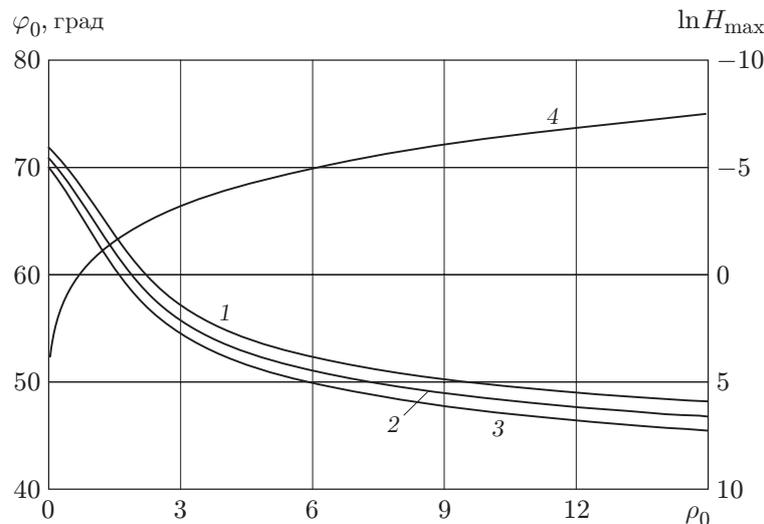


Рис. 5. Зависимость угла наклона оси лепестка изолиний функции $H(b, h)$ к трещине (кривые 1–3) и значения изолинии функции $H(b, h)$ (кривая 4) от продольного размера лепестка:

1 — $\kappa = 1$; 2, 4 — $\kappa = 2$; 3 — $\kappa = 3$

$\varphi_0(\rho_0, \varkappa)$ в (9), получаем значение изолинии $H_{\max} = H(\rho_0, \varphi_0)$. Результаты расчетов для значения $\varkappa = 2$ также приведены на рис. 5 (кривая 4). Кривые для других значений \varkappa в данном масштабе практически совпадают с кривой 4.

Кривые 2 и 4 на рис. 5 удовлетворительно аппроксимируют уравнения $\varphi_0 \approx 71,91 - 8,072\rho_0 + 0,979\rho_0^2 + 4,221 \cdot 10^{-3}\rho_0^3 - 0,01138\rho_0^4 + 9,154 \cdot 10^{-4}\rho_0^5 - 2,2657 \cdot 10^{-5}\rho_0^6$ (φ_0 измеряется в градусах) и $H_{\max} \approx 0,3149\rho_0^{-2,195}$. Помимо построенных асимптотических выражений данные зависимости позволяют рассчитать параметры любой изолинии.

Для того чтобы наряду с продольным размером лепестка оценить и поперечный размер, для изолинии функции $H(b, h) = \text{const}$ построим две взаимно перпендикулярные оси. Большая ось соединяет вершину трещины и наиболее удаленную от нее точку, лежащую на изолинии. Малая ось делит большую ось пополам. На рис. 4 эти построения проведены для изолинии $H_0 = 0,5$. Точки, в которых оси пересекают изолинию (точки 0, 1, 2) имеют координаты (b_0, h_0) , (b_1, h_1) и (b_2, h_2) соответственно. В этом случае при $i = 1, 2$ выполняются соотношения $\varphi_i = \varphi_0 \pm \gamma_i$ и $\rho_0/2 = \rho_i \cos \gamma_i$. Если длина малой оси равна q , а большой — p , то $q/p = (\text{tg } \gamma_1 + \text{tg } \gamma_2)/2$. Асимптотическое уравнение $H(b_0, h_0) = H(b_i, h_i)$ приводится к виду

$$(2 \cos \gamma_i)^n g(\varphi_0 \pm \gamma_i) = g(\varphi_0), \quad (15)$$

где $n = 3/2$, $g(\varphi_0) = ((2\varkappa + 5) \sin(3\varphi_0/2) - 3 \sin(7\varphi_0/2))$, а φ_0 вычисляется по (12) при $\rho_0 \ll 1$ и $n = 3$, $g(\varphi_0) = ((\varkappa + 4) \sin(3\varphi_0) - 3 \sin(5\varphi_0))$, а φ_0 вычисляется по (14) при $\rho_0 \gg 1$. Уравнение (15) решалось численно. В результате вычислений при $\varkappa = 1, 2, 3$ получены следующие значения γ_1, γ_2 : $\gamma_1 = 27,92; 29,17; 30,17$ и $\gamma_2 = 31,44; 33,30; 34,70$ при $\rho_0 \ll 1$; $\gamma_1 = 19,11; 19,78; 20,38$ и $\gamma_2 = 27,25; 29,55; 31,07$ при $\rho_0 \gg 1$.

Таким образом, лепесток изолинии слабонесимметричен. Большая ось делит малую ось на части, различающиеся не более чем на 10 %. Отношение длин большой и малой осей изменяется в диапазоне $q/p \approx 0,43 \div 0,63$. Отношение длин осей возрастает вблизи вершины трещины и при увеличении значения \varkappa .

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозова Е. А., Паргон В. З. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин // ПМТФ. 1961. № 5. С. 112–114.
2. Parihar K. S., Latitha S. Griffith cracks in an elastic medium in which body forces are acting // Engng Fract. Mech. 1985. V. 22, N 1. P. 135–148.
3. Механика разрушения и прочность: Справ. пособие. В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Т. 2. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988.
4. Козеко М. Е. Коэффициент интенсивности напряжений в задаче о трещине при наличии тормозных элементов // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1998. Вып. 113. С. 81–85.
5. Козеко М. Е. Поведение трещины в хрупком теле при наличии усилий, моделирующих тормозные элементы: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 1999.

Поступила в редакцию 19/IX 2005 г.,
в окончательном варианте — 6/XII 2005 г.