

УДК 539.3+531.391.5+539.219.2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННОГО С РАЗРУШЕНИЕМ, И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В МАТЕРИАЛЕ

И. А. Миклашевич

Белорусская государственная политехническая академия, 220027 Минск, Беларусь

Показано, что разрушение может быть описано как процесс, происходящий в финслеровом пространстве. Использование финслерова пространства позволяет построить расслоенное многообразие, характеристики которого связаны с дефектной структурой среды. Предложен метод определения фрактальной размерности разрушения на основе представления о распространении трещины вдоль геодезических.

Ключевые слова: разрушение, трещина, дефектная структура, пространство Финслера.

1. Геометрические представления в теории разрушения. Процессы, протекающие вблизи вершины распространяющейся трещины, представляют собой сложное сочетание процессов упругого и пластического деформирования материала и накопления микроскопических трещин, приводящих к образованию макротрещины. Корректное описание взаимодействия поля напряжений распространяющейся трещины с полем внутренних напряжений основного материала и полем дефектов (например, дислокаций, дисклинаций, точечных дефектов) существенно затруднено из-за сложности физических процессов и математического аппарата, адекватно описывающего эти процессы.

В большинстве работ, посвященных прогнозированию распространения трещины, рассматриваются “глобальное” распространение трещины и “глобальные” траектории, однако при таком усредненном подходе невозможно ввести фрактальные характеристики, которые по своей природе локальны. “Локальный” подход к определению траектории трещины возможен на основе вариационного принципа [1].

Поля напряжений, используемые при расчете траектории в “локальном” подходе теории трещин, должны определяться исходя из микроструктуры разрушаемого материала. Это в принципе возможно в континуальной теории дислокаций. Основная идея континуальной теории, развитая в работах Б. А. Билби, Э. Крёнера, А. М. Косевича, И. А. Кунина, заключается в установлении связи между дефектами, существующими в реальном твердом теле, и геометрией (метрическими свойствами) среды. Геометрический подход позволяет корректно описать несовершенство кристаллов. Однако связь метрических свойств среды и процессов пластического деформирования и разрушения (движения трещины) до настоящего времени исследована недостаточно.

В настоящей работе рассматривается влияние метрических свойств среды (метрического тензора) на траекторию трещины. При этом фрактальность процесса разрушения

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (код проекта Ф99Р186) и Министерства образования Беларуси (код проекта ГБ 01-38).

(распространения трещины) связывается с геометрическими особенностями пространства, свойства которого зависят от структуры разрушающегося материала.

2. Траектория трещины. Для простейшей модели трещины типа модели Баренблатта — Дагдейла с использованием оптико-механической аналогии в [2, 3] получено вариационное уравнение траектории трещины в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{Q^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{Q\sqrt{1+y'^2}} = 0, \quad Q = (\sigma_{ij}n_i u_j)^{-1}, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad (1)$$

где σ_{ij} — напряжения на берегах трещины; n_i — направляющий косинус внешней нормали к поверхности трещины; u_j — смещение берегов трещины. Уравнение (1) получено для идеальной среды без учета реальной микроструктуры материала. Самосогласованность уравнения (1) (влияние распространения трещины на $(i-1)$ -м шаге на направление роста на i -м шаге), необходимая для описания поверхности разрушения [4], обеспечивается процедурой пошагового варьирования энергии разрушения по малой окрестности вблизи вершины трещины. Введем следующие обозначения:

$$f_1(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial \ln Q(x, y)}{\partial y}.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (1) принимает вид [3]

$$y'' - y' f_1(x, y)(1 + y'^2) + f_2(x, y)(1 + y'^2)^2 = 0. \quad (2)$$

Поскольку уравнения (1), (2) получены из вариационного принципа, они представляют собой уравнения геодезических выделения энергии разрушения и определены в евклидовом пространстве, что соответствует известному положению, согласно которому реальная трещина распространяется по геодезическим [5]. В уравнении (2) выражение $1 + y'^2$ есть элемент длины в двумерном случае для евклидова пространства. Использование евклидовой метрики позволяет получить реалистичные уравнения траектории в небольшом числе случаев [1, 6] для идеальных материалов. Для реальных сред с микроструктурой (дефектами) необходимо обобщение уравнения (1) на более широкие классы пространств. Это связано с тем, что для сред, обладающих внутренней структурой, процессы, протекающие вблизи вершины трещины, имеют комплексный характер и не могут быть описаны как прямая сумма операторов пластического и упругого деформирования [7]. Поскольку учет дефектной структуры материала требует введения всех трех ненулевых тензоров кривизны Картана [8–10], пространство, свойства которого зависят от структуры разрушающегося материала, должно иметь характер более общий, чем евклидово и риманово пространство [10–12].

Возможны два пути построения обобщенных пространств [12, 13]: 1) внесение в многообразие метрического тензора (или метрической функции); 2) внесение в многообразие коэффициентов связности. При рассмотрении процессов разрушения второй путь предпочтительнее, так как в этом случае дефектная структура изначально определяет геометрическую структуру пространства. Для риманова пространства независимое внесение метрики и связности представляется невозможным, так как коэффициенты связности риманова пространства однозначно связаны с метрикой [12]:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (3)$$

В то же время общие аффинные геометрии позволяют рассматривать деформации связности, необходимые для получения полного набора нетривиальных аффиннометрических характеристик в соответствии с выбранными внутренними инвариантами деформирования и

разрушения [13]. При построении набора определяющих параметров (и соответствующих деформаций связности) необходимо учитывать, что корректное описание динамики процесса распространения трещины требует введения скоростей как независимого параметра в определяющие уравнения процесса [7, 14].

Рассмотрим принципиальную возможность определения траектории трещины с учетом реальной структуры материала. В случае произвольного обобщенного пространства уравнение геодезической может быть записано как функция параметра длины кривой s , текущих координат x^μ и коэффициентов связности пространства $\Gamma_{i\lambda}^\mu$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (4)$$

При этом определение траектории трещины сводится к определению коэффициентов связности обобщенного пространства.

3. Геометрические характеристики дефектных твердых тел. При рассмотрении дефектов в общем виде твердому телу (континууму) ставится в соответствие некоторое многообразие M_n . В зависимости от выбранной интерпретации характеристик дефектов многообразие имеет тот или иной геометрический характер, от ограниченных теорий (в которых тензор кривизны $R_{ij,k}^l = 0$) до метрических аффинносвязных многообразий общего вида [9]. (Далее латинскими индексами отмечены орты пространства.) Для произвольного многообразия M_n одним из наиболее простых обобщенных пространств, метрика которого допускает существование всех трех ненулевых тензоров кривизны и которое используется для описания сред с микроструктурой, является пространство Финслера [15]. Выбор этого пространства обусловлен тем, что для него функция Гамильтона системы $H(x, y)$ и метрическая функция $F(x, \dot{x})$ связаны обычными каноническими уравнениями

$$\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial x^i} = - \frac{\partial H(x, y)}{\partial x^i}, \quad (5)$$

где $\dot{x} = dx^i/dt$; x^i , \dot{x}^i , y_i — независимые переменные. Введение скоростей в качестве независимых переменных позволяет без дополнительных предположений рассматривать динамические процессы. Введем также следующее обозначение: $f(x^i, \dot{x}^j, \dots) = f(x)$.

Так как гамильтониан имеет характер опорной поверхности для индикатрисы, то функции H , F есть дуальные функции, метрическая функция $F(x, \dot{x})$ — лагранжиан системы [7, 15], а уравнения (5) — обычные уравнения Гамильтона — Якоби. Пространства этого типа используются также при моделировании пластической деформации.

Введение метрической функции вида $F(x, \dot{x})$ определяет расслоенное многообразие, в котором \dot{x}^i задают линейное векторное пространство T_n , касательное к основному многообразию M_n , и являются контравариантными векторами пространства T_n . В этом случае точкой касания является точка многообразия $P(x^i)$. Для финслерова пространства вводится метрический тензор

$$g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}. \quad (6)$$

При этом каждому произвольному контравариантному вектору $\dot{x}^i \in T_n$ можно сопоставить ковариантный вектор y_i дуального касательного пространства:

$$y_i = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^j. \quad (7)$$

Риманово пространство является частным случаем финслерова пространства, для которого $g_{ij} \neq g_{ij}(\dot{x}^i)$, т. е. метрический тензор не зависит от направления. Использование метрики вида (6) позволяет сформулировать аналоги известных геометрических теорем и

римановой геометрии [15]. Для риманова пространства касательное пространство является евклидовым, и риманово пространство можно рассматривать как локально-евклидово пространство. Финслерово пространство локально является пространством Минковского.

4. Влияние дефектной структуры на распространение трещины. Как известно, процессы упругого деформирования, происходящие в идеальном кристалле, с геометрической точки зрения можно рассматривать как процессы в римановом пространстве с метрикой, не зависящей от направления. Выражение для элемента длины в этой метрике может быть записано в виде

$$dl^{(r)} = \sqrt{g_{ij}^{(r)} \frac{dx^i(r)}{dt} \frac{dx^j(r)}{dt}}.$$

Здесь индекс r при метрическом тензоре g_{ij} обозначает риманово пространство; x^i, x^j — текущие координаты точки; t — натуральный параметр кривой; индексы пробегает значения от 0 до n (n — размерность пространства, рассматриваемого в задаче). В случае распространения трещины в качестве натурального параметра обычно выбирают длину трещины.

4.1. *Влияние микроструктуры на метрические свойства континуума.* Так как каждому типу дефектов соответствует дополнительная геометрическая характеристика пространства — кривизна S , кручение R , сегментарная кривизна K (первый, второй, третий тензоры кривизны Картана), то в случае среды с микроструктурой метрика зависит не только от положения сопутствующей системы координат (макроскопическое состояние), но и от векторного поля, связанного с дефектами (микроскопическое состояние). При этом микроструктура (распределение дефектов, их природа) в общем случае не зависит от макроскопического состояния, т. е. генерация и эволюция этих состояний могут реализовываться независимыми путями. Например, точечные дефекты в материале могут образовываться в результате облучения, при этом деформированное состояние практически не изменяется. Кроме того, как отмечено выше, исходя из физического смысла задачи геометрические свойства зависят также от направления движения в этом пространстве, определяющих характеристик пространства и их скоростей [4, 11]. Поэтому в общем случае $g_{ij} = g_{ij}(S, R, K, x^j, \dot{x}^j)$, что позволяет найти метрический тензор для пространства Финслера как функцию коэффициентов связности из дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{k.l}^{*i}}{\partial x^t} - \frac{\partial \Gamma_{k.l}^{*i}}{\partial \dot{x}^s} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^t} + \Gamma_{q.t}^{*i} \Gamma_{k.l}^{*q} \right) = g^{ij} \left(\frac{\partial \Gamma_{kjl}^*}{\partial x^t} - \frac{\partial \Gamma_{kjl}^*}{\partial \dot{x}^s} \frac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^t} - \Gamma_{j.t}^{*q} \Gamma_{kql}^* \right). \quad (8)$$

Здесь $\Gamma_{kjl}^* = \Gamma_{kjl}^*(S, R, K, x^i, \dot{x}^i)$ — симметричные коэффициенты связности финслера пространства (в общем случае не совпадающие с коэффициентами связности риманова пространства). Из-за громоздкости получаемых выражений коэффициенты связности не приводятся. Рассмотрим основные свойства зависимости метрической функции от скоростей определяющих параметров. В выражении (8) величина G^i описывает неметричность связности и появляется вследствие того, что финслерова метрика зависит не только от положения сопутствующей системы координат, но и от дополнительного векторного поля ξ^l (поля, связанного с дефектами). Эта величина может быть найдена из уравнения производных поля [15] или получена из внесенной деформации связности [13]. Следует отметить, что в общем случае G^i не зависит от метрического тензора, что обеспечивает влияние несовершенств материала на процессы разрушения независимо от геометрии. Таким образом,

$$\Gamma_{k.j}^i \dot{x}^k = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}, \quad \Gamma_{k.j}^{*i} = \Gamma_{k.j}^i - C_{k.h}^i \Gamma_{r.j}^h \dot{x}^r.$$

Здесь $C_{k,j}^i$ — характерный тензор финслеровой геометрии, связанный с изменением метрического тензора вдоль выбранных направлений (тензор кручения Картана [7]). Появление кручения в финслеровой связности объясняется влиянием дефектной структуры на идеальный континуум:

$$C_{kji}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i}. \quad (9)$$

Поднимание и опускание индексов происходит при помощи метрического тензора, заданного уравнением (6). Следует отметить, что кручение (тензор (9)) может задаваться различными способами. Иногда используется первый тензор кривизны Картана [13]

$$S_{i.kl}^j = A_{k.r}^j A_{i.l}^r - A_{r.l}^j A_{i.k}^r,$$

где $A_{i.k}^j = F(x, \dot{x}) C_{i.k}^j$. Поскольку длина измеряется в реальном евклидовом пространстве, “лишние” переменные финслерова пространства являются скрытым параметром, а их проекция на касательное евклидово пространство определяет фрактальный характер поверхности. Это соответствует введению трех тензоров кривизны в качестве дополнительных параметров механики деформируемого тела [8, 11].

Отметим, что в пространстве аффинной связности нас интересуют геодезические и в качестве пространства движения трещины можно рассматривать пространство Финслера без кручения. Это связано с тем, что объект связности $\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$ определяет в данном многообразии те же геодезические, что и объект связности без кручения $\tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu$, полученный его симметрированием. Поэтому можно ограничиться рассмотрением одноформовых пространств Финслера с метрикой Бервальда — Моора. Для таких пространств метрика строится исходя из произвольной метрики Минковского. В этом случае метрический тензор пространства имеет вид

$$g_{ij}(x^m, \dot{x}^m) = S_m^A S_i^B g_{AB}(\dot{x}^D(x^m, \dot{x}^m)),$$

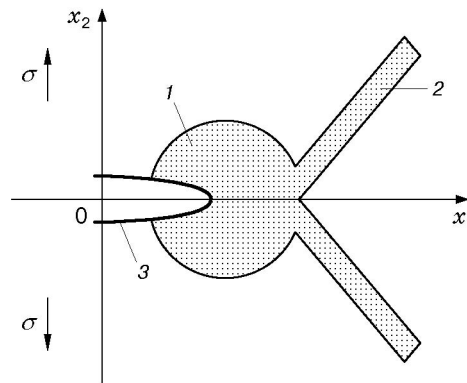
где S_m^A — глобальное поле реперов класса C^3 ; исходная метрика пространства Минковского

$$g_{AB} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_M^2}{\partial \dot{x}^A \partial \dot{x}^B}$$

зависит от x только через \dot{x}^D .

4.2. *Траектория трещины в среде с микродефектами.* В двумерной постановке определение взаимодействия трещины и дислокации дано Р. Аткинсоном в 1966 г. в рамках классической теории анизотропных сред. Решение Р. Аткинсона основывалось на определении сил взаимодействия дислокации и ее образа, возникающего на свободной поверхности трещины. Позднее теория была уточнена Б. А. Билби, А. Х. Коттреллом, К. Х. Свиндоном с учетом экранирования полей дислокаций. Основной трудностью использования теории Билби — Коттрелла — Свиндона, так же как и классической теории трещин, является наличие сингулярных решений в ядре дислокации и вершине трещины, что не позволяет использовать теорию упругости. Несмотря на то что существует ряд обобщений, в которых решена проблема сингулярности, обоснованность этих решений сомнительна. Эти решения противоречат экспериментально установленному факту отсутствия дефектов вблизи свободной поверхности трещины [16, 17]. Поскольку на поверхности дефекты отсутствуют, отсутствует и сам объект, вызывающий изображения.

Данное противоречие приводит к необходимости разработки других подходов к исследованию взаимодействия трещины с дефектами, например на основе лагранжева формализма континуальной теории дефектов [18]. Перспективной представляется также геометрическая теория взаимодействия трещины с дефектами [19]. Это связано с тем, что



Область пластического деформирования вблизи вершины трещины:
1 — зона пластических течений; 2 — линия скольжения; 3 — трещина

вариационная задача распространения трещины (выбор оптимального пути распространения трещины) с физической точки зрения может рассматриваться как формирование и исчезновение виртуальных свободных поверхностей в объеме материала. Энергетика таких процессов определяется метрическими свойствами континуума в области формирования виртуальных поверхностей. Поскольку энергетика, как и другие неизменные факторы, определяется дефектной структурой, метрические свойства (6) есть функция дефектной структуры, а геометрические параметры — функция энергии, связанной с дефектной структурой [7].

Так как дефектная структура определена локально, то пространство Финслера распадается на два трехмерных евклидова пространства

$$B_A = B \times M \subset E^3 \times E^3,$$

где B — рассматриваемый объект (тело); M — микроструктура в отсчетной конфигурации; знак “ \times ” обозначает декартово произведение пространств. Такое представление соответствует известному описанию тел с микроструктурой посредством сред Коссера (вектор положения и вектор директора). Это распадение связано с тем, что действие поля дефектов реализуется в касательном пространстве, а макроструктуры — в евклидовом пространстве, кинематически связанном с начальной недеформированной структурой. В этом случае метрическая функция $F(x, \dot{x})$ может быть представлена в виде $F(x, y)$ ($x = x_i$ — макроскопические координаты точки; $x = y^i$ — микроскопические координаты). Метрический тензор (6) имеет вид

$$g^{ij}(x, y) = \frac{\partial^2 H^2(x, y)}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (10)$$

Так же как в пространствах с метрикой Бервальда — Моора, метрический тензор зависит от x только через y . При этом в окрестности точки касания пространств геометрические характеристики этих пространств также можно считать близкими.

Рассмотрим распространение трещины в среде. Будем учитывать связь распространения трещины с эволюцией дефектной структуры и пренебрегать другими процессами диссипации энергии. При этом в простейшем случае достаточно рассматривать развитие дефектов в области пластического деформирования, обусловленного ростом трещины. Известно, что при продвижении конца трещины наблюдается развитие пластической деформации вблизи вершины трещины и в зоне локализации пластических сдвигов (полосы скольжения и т. п.) (см. рисунок). В двумерном случае область деформаций, инициируемых трещиной, может рассматриваться как суперпозиция круговой области радиуса r с

центром в вершине трещины и прямолинейных отрезков полос скольжения. Следует отметить, что для предлагаемого алгоритма точная форма зоны пластических деформаций несущественна. Так как пространство расслаивается на вертикальное и горизонтальное субпространства, полная энергия, сосредоточенная в поле дислокаций, является функцией микроскопических координат и находится в касательном пространстве. Это означает, что в данной точке континуума трещина “чувствует” не все поле дефектов материала, а только некоторую его часть, существенную при варьировании энергии (именно это варьирование определяет выбор направления роста трещины). Будем полагать $E \sim \exp(-\mu\sqrt{y_1^2 + y_2^2})$. Вместе с тем энергия должна быть также функцией макроскопических координат. Это связано с тем, что “расстояние” между точкой основного и касательного пространств есть функция их радиус-векторов и определение этого “расстояния” является самостоятельной задачей. Будем полагать, что функция распределения дислокаций для круговой области зависит от макроскопических параметров (координат x^1, x^2) и однородна внутри области радиуса r , а вне этой области влияние поля дефектов экспоненциально убывает. Обозначим $q = r^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2)$. Тогда макроскопическая зависимость есть

$$n_1(x, y) = n_{01}\{\theta(q) + \theta(-q) \exp[-\lambda_1((x^1)^2 + (x^2)^2)]\}, \quad (11)$$

где характеристика среды $\lambda_1 > 0$ — показатель, связанный с взаимодействием дефектов и континуума (например, силы торможения, процессы генерации и аннигиляции дефектов); θ — функция Хевисайда. С учетом (11) выражение для полной энергии, сосредоточенной в дефектах круговой области с макроскопическими координатами x^1, x^2 , можно записать в виде

$$E_1 = E_0 \int n_1(x, y) \exp(-\mu\sqrt{y_1^2 + y_2^2}) dS. \quad (12)$$

Здесь E_0 — упругая энергия единичной дислокации; dS — элемент площади касательного пространства, представляющей собой область, распределение дефектов в которой влияет на энергию дефектов в данной точке соприкосновения пространств. Поскольку в общем случае материал неоднороден, элемент площади выбирается в виде эллипса с полуосями a, b , ориентация которых зависит от этой неоднородности. В этом случае из уравнения (12) следует

$$E_1 = E_0 \pi a b \exp(-\mu\sqrt{y_1^2 + y_2^2}) \{\theta(q) + \theta(-q) \exp[-\lambda_1((x^1)^2 + (x^2)^2)]\}. \quad (13)$$

Рассмотрим бесконечно тонкую полосу скольжения. Исходя из аналогичных рассуждений для плотности дефектов в полосе можно принять

$$n_2(x, y) = n_{02} \delta(\pm kx_1 - B - x_2) \exp[-\lambda_2((x^1)^2 + (x^2)^2)] = \\ = n_{02} \delta(\pm t - x^2) \exp[-\lambda_2((x^1)^2 + (x^2)^2)], \quad (14)$$

где n_{02} — начальная плотность распределения дефектов в полосе скольжения; δ — дельта-функция Дирака; $k = \operatorname{tg} \alpha$; α — угол наклона полосы скольжения; B — координата начала полосы скольжения; $\lambda_2 > 0$. Знак “+” в аргументе дельта-функции соответствует полосе скольжения в верхней полуплоскости, знак “−” — в нижней полуплоскости. Обозначим через $\rho^2 = y_1^2 + y_2^2$ радиус-вектор микросостояний, через $\tilde{\rho}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ радиус-вектор макросостояний. Тогда, если взаимодействия в касательном пространстве для круговой области и полосы считать одинаковыми, то с учетом (13), (14) для полной энергии имеем

$$E = E_1 + E_2 = \pi a^2 b^2 e^{-\mu\rho} [\theta(r^2 - \tilde{\rho}^2) + \theta(\tilde{\rho}^2 - r^2) e^{-\lambda_1 \tilde{\rho}} + \delta(\pm kx^1 + b - x^2) e^{-\lambda_2 \tilde{\rho}}]. \quad (15)$$

Так как $a = a(y_1, y_2)$, $b = b(y_1, y_2)$, то на основе определения (10) с учетом (15) можно вычислить компоненты метрического тензора финслерова пространства g^{ij} . Из-за громоздкости получаемых выражений выпишем только выражение для компоненты g^{11} :

$$g^{11} = \left[\left(\frac{\partial a}{\partial y_1} \right)^2 b^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_1} \right)^2 a^2 + ab \left(b \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} + a \frac{\partial^2 b}{\partial y_1^2} \right) + 4ab \frac{\partial a}{\partial y_1} \frac{\partial b}{\partial y_1} - \right. \\ \left. - 3ab\mu \frac{y_1}{\rho} A - a^2 b^2 \mu \frac{y_2^2}{\rho^3} + a^2 b^2 \mu^2 \frac{y_1}{\rho^2} \right] 2 e^{-2\mu\rho} \times \\ \times [\theta(r^2 - \tilde{\rho}^2) + \theta(\tilde{\rho}^2 - r^2) e^{-\lambda_1 \tilde{\rho}} + \delta(\pm kx^1 + b - x^2) e^{-\lambda_2 \tilde{\rho}}], \quad (16)$$

где $A = b\partial a/\partial y_1 + a\partial b/\partial y_1$. При выводе (16) учтено, что $\partial\rho/\partial y_1 = y_1/\rho$, $\partial^2\rho/\partial y_1^2 = y_2^2/\rho^3$.

С учетом выражения для метрического тензора среды с дефектами (10) и представления о распространении трещины вдоль геодезической уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dy_i}{ds} - \gamma_{ihk}(x, x') x'^h x'^k = 0, \quad (17)$$

где s — параметр финслеровой длины дуги; векторы $x'^i = \dot{x}^i(dt/ds)$ и y_i связаны соотношением (7); $\gamma_{ihk}(x, x')$ — символы Кристоффеля первого рода, определяемые так же, как в римановой геометрии.

Уравнение (17) позволяет дать физическое обоснование фрактального характера распространения трещины. Определяя фрактальную размерность трещины как отношение длины траектории в реальном кристалле к длине траектории в идеальном кристалле (т. е. как отношение длин траекторий в пространстве Финслера и римановом пространстве), в случае одинаковой параметризации кривых имеем

$$D = \frac{dl}{dl^r} = \sqrt{g_{is} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt}} / \sqrt{g_{is}^r \frac{dx^{i(r)}}{dt} \frac{dx^{s(r)}}{dt}} = \frac{\sqrt{g_{is} dx^i dx^s}}{\sqrt{g_{is}^{(r)} dx^{i(r)} dx^{s(r)}}}. \quad (18)$$

Поскольку симметричные коэффициенты связности есть функция состояния, фрактальная размерность трещины также есть функция состояния.

Заключение. Использование геометрии финслерова пространства при описании процесса деформирования тел с дефектной структурой позволяет без привлечения дополнительных предположений физически обоснованно рассматривать взаимодействие геометрической структуры идеального материала и геометрической структуры системы дефектов. С точки зрения расслоенных многообразий, генерируемых финслеровой метрикой, горизонтальное расслоение соответствует идеальному континууму, а вертикальное — различным типам дефектов.

Существование вертикальных составляющих многообразия позволяет выяснить физические причины фрактального характера распространения трещины. Фрактальная размерность разрушения (см. уравнение (18)) в соответствии с экспериментальными данными и компьютерными моделями зависит как от свойств реальных кристаллов, так и от условий разрушения.

При рассмотрении режимов заданного разрушения (когда разрушение материала должно осуществляться в заданном месте и желательно по заданной траектории) траектория распространения трещины определяется уравнением (17). В этом случае, задавая распределение дефектов и регулируя это распределение технологически, можно получить необходимые характеристики траектории трещины. При этом функция распределения дислокаций является свободным параметром, который не влияет на фрактальность поверхности, но влияет на механические параметры материала (например, на параметры Ламе).

Автор выражает благодарность А. В. Чигареву, обратившему внимание автора на оптико-механическую аналогию и пространства Финслера, а также В. В. Баркалину за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
2. **Чигарев А. В., Миклашевич И. А.** Расчет траектории трещины в композиционном материале в линейном приближении // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 2. С. 114–118.
3. **Миклашевич И. А.** Траектория трещины в неоднородных средах при плоском нагружении // Механика композиц. материалов и конструкций. 2000. Т. 6, № 3. С. 408–418.
4. **Parisi A., Galdarelli G., Pietronero L.** Roughness of fracture surfaces // Europhys. Lett. 2000. V. 52, N 3. P. 304–310.
5. **Морозов Е. М., Фридман Я. Б.** Траектории трещин хрупкого разрушения как геодезические линии на поверхности тела // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 1. С. 87–90.
6. **Морозов Е. М.** Возможно ли отыскание траектории трещины сразу в целом? // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Тр. науч. шк. акад. В. В. Новожилова. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 1998. Вып. 1. С. 198–212.
7. **Saczuk J.** Finslerian foundations of solid mechanics // Zeszyty nauk. inst. maszyn przeplywowych PAN w Gdansku: Studia i Materialy. Gdansk: Wydawnictwo IMP PAN, 1996.
8. **Гузев М. А., Мясников В. П.** Термодинамическая модель упругопластического материала с дефектами структуры // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 156–172.
9. **Grachev A. V., Nesterov A. I., Ovchinnicov S. G.** The gauge theory of point defects // Phys. Status. Solidi. Ser. B. 1989. V. 156. P. 403–410.
10. **Гузев М. А., Мясников В. П.** Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 5. С. 1–3.
11. **Бердичевский В. Л., Седов Л. И.** Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, № 6. С. 981–1000.
12. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
13. **Мясников В. П., Гузев М. А.** Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 5, № 1. С. 5–16.
14. **Наймарк О. Б., Давыдова М. М., Плехов О. А., Уваров С. В.** Экспериментальное и теоретическое исследование динамической стохастичности и скейлинга при распространении трещины // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, № 3. С. 47–58.
15. **Рунд Х.** Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
16. **Kobayashi S., Ohr S.** In situ fracture experiments in b.c.c. metals // Philos. Mag. 1980. V. 42. P. 763–772.
17. **Shu-Ho Dai, Li J. C. M.** Dislocation-free zone at the crack tip // Scripta Metallurgica. 1982. V. 16. P. 183–188.
18. **Dong L. K., Zhang H. Y., Lung C. W.** Application of gauge theory of defects to fracture // Intern. J. Solids Structures. 1989. V. 25, N 7. P. 707–713.
19. **Miklashevich I. A.** The generalized space and the solid state deformation description // Intern. conf. on multifield problems: Book of abstr., Stuttgart, Germany, Apr. 8–10, 2002. Stuttgart: Univ. of Stuttgart, 2002. P. 82.

*Поступила в редакцию 13/VII 2001 г.,
в окончательном варианте — 6/VIII 2002 г.*