

УДК 532.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

В. А. Жаров

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, 140180 Жуковский
E-mail: flumec@progtech.ru

Предложена методика решения уравнений, описывающих динамику волновых пакетов волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое. Используется метод расщепления исходной задачи на линейную и нелинейную части на каждом шаге по времени. Линейная часть решается с использованием уравнения для спектральных компонентов волнового пакета с последующим фурье-преобразованием из пространства волновых чисел в физическое пространство. В физическом пространстве решается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Фурье-преобразование осуществляется с помощью библиотечной процедуры быстрого преобразования Фурье. В качестве примеров решены задачи линейной динамики волнового пакета, сосредоточенного в окрестности области неустойчивости (т. е. множества волновых векторов в пространстве волновых чисел, для которых мнимая часть собственной частоты волн Толлмина — Шлихтинга положительна) и нелинейной динамики волнового пакета, перекрывающего область неустойчивости.

Ключевые слова: волны Толлмина — Шлихтинга, преобразование Фурье, пограничный слой.

Введение. Рассматривается пограничный слой на пластине в несжимаемой жидкости. Большой интерес вызывает динамика возмущений конечных спектральных размеров волновых пакетов (ВП) на фоне среднего течения, так как явления, происходящие в ламинарной части пограничного слоя, могут иметь аналоги в турбулентной части пограничного слоя. Кроме того, модели развития возмущений могут представлять интерес для предсказания перехода.

Как показывают эксперименты [1–3], в реальных ситуациях переход от ламинарного движения газа к турбулентному связан с появлением в ламинарной части пограничного слоя волновых пакетов (волн Толлмина — Шлихтинга) конечных спектральных размеров и последующим их развитием вниз по течению, сначала — линейным, затем — слабо-нелинейным. Появление стадии сильной нелинейности фактически соответствует точке перехода. Линейной динамике ВП посвящены работы [4–6]. Нелинейная динамика на ранней стадии развития отражена в [2, 7–9]. Экспериментальные результаты работ [2, 9] могут использоваться для сравнения при оценке эффективности теоретических моделей, представленных в [7, 8].

Возмущение движения жидкости складывается из нескольких частей в соответствии с типами волн, возбуждаемых в пограничном слое: волн Толлмина — Шлихтинга и волн Сквайра (волны вертикальной завихренности) дискретного и непрерывного спектра. Влияние волн Толлмина — Шлихтинга непрерывного спектра на динамику возмущений рассмотрено в работах [10, 11]. Необходимость учета волн непрерывного спектра следует,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00598) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-1984-2002.1).

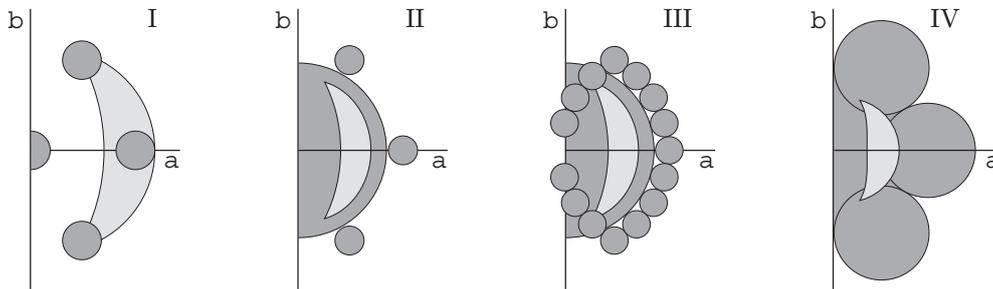


Рис. 1. Возможные начальные конфигурации волновых пакетов

вообще говоря, из их слабого затухания в длинноволновой части пространства волновых чисел. Ниже для упрощения постановки задачи волны непрерывного спектра не рассматриваются.

Описание ВП решением уравнений Навье — Стокса затруднительно из-за малости амплитуды возмущения по сравнению с фоновым потоком. Поэтому представляет интерес выделение динамики ВП. Это оказывается возможным, если учесть, что, как правило, возбуждается только одна мода волн Толлмина — Шлихтинга, которая индуцирует волну Сквайра (в случае слабой нелинейности она может возбуждать, конечно, и волны непрерывного спектра).

В случае трехволнового резонанса нелинейные уравнения даже в укороченном виде численно решать сложно из-за интегродифференциального уравнения, описывающего “0-пакет” [7, 8] (новый элемент динамики трехволнового резонанса — совокупность гармоник в окрестности начала координат пространства волновых чисел), возникающий из-за конечности размеров волновых пакетов в слабонелинейном приближении. Но очень легко решается линейная задача динамики ВП в пространстве волновых чисел. В физическом пространстве распределение амплитуд получается с помощью преобразования Фурье. Поэтому представляется естественным следующий способ: расщепление оператора задачи на линейную и нелинейную части. Линейная часть решается в пространстве волновых чисел, нелинейная — в физическом пространстве. Связь между элементами решения можно осуществлять с помощью дискретного преобразования Фурье (быстрое преобразование Фурье).

Решение спектральной (временной) задачи для волн Толлмина — Шлихтинга дискретного спектра показывает [12], что в пространстве волновых чисел α, β множество неустойчивых волновых чисел представляет собой компактную область, расположенную около начала координат. Если пренебречь непрерывным спектром, то возможны следующие варианты волновых пакетов, амплитуда которых нарастает вниз по течению (рис. 1).

Вариант I: резонансный триплет, основная гармоника которого расположена в области неустойчивости (усиление описывается числовым коэффициентом) с областью, содержащей начало координат (сингулярная часть пакета).

Вариант II: область сингулярности содержит область неустойчивости (усиление волн описывается интегральным оператором), резонансный триплет расположен вне области неустойчивости.

Вариант III: область сингулярности содержит область неустойчивости, дискретные моды соответствуют множественному трехволновому резонансу.

Вариант IV: область сингулярности, резонансный триплет и область неустойчивости перекрываются (см. рис. 1).

Область неустойчивости отмечена на рисунке светлым тоном.

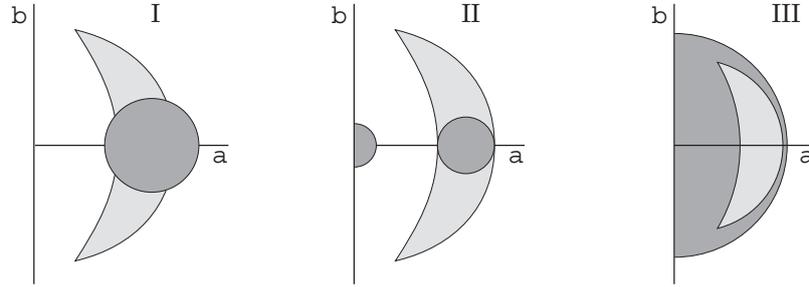


Рис. 2. Упрощенные начальные конфигурации волновых пакетов

Возможны и другие варианты (например, в работе [13] рассмотрен вариант резонанса с участием кратной гармоники). Для описания динамики ВП в перечисленных выше случаях необходимо знание матричных элементов [7, 8] в широкой области волновых чисел. В связи с этим для демонстрации методики эти варианты ниже не рассматриваются, а методика применяется к более простым случаям (рис. 2):

- 1) волновой пакет содержит область неустойчивости (численно и аналитически решается линейная задача);
- 2) волновой пакет содержит сингулярную область и область неустойчивости (численно решается линейная задача);
- 3) волновой пакет содержит две отдельные компоненты — сингулярную часть и дискретную гармонику в области усиления (численно решается нелинейная задача).

1. Уравнения для гармоник и уравнения для огибающей волнового пакета.

В работах [7, 8] получено уравнение, описывающее пространственно-временную динамику спектральных компонентов $f_{\mathbf{k}}$ локализованного в пространстве возмущения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i[\bar{\omega}^R(\mathbf{k}) - (\dot{X}_0\mathbf{k})]\right)f_{\mathbf{k}} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \omega^R}{\partial \bar{X}_0} f_{\mathbf{k}}\right) - \varepsilon^2(\bar{\omega}^I(\mathbf{k}) + Q(\mathbf{k}))f_{\mathbf{k}} = \varepsilon \int H_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' + \dots \quad (1)$$

Здесь $\bar{\omega}(\mathbf{k}) = \bar{\omega}^R(\mathbf{k}) + i\bar{\omega}^I(\mathbf{k})$ — безразмерное собственное число (частота собственных колебаний волн Толлмина — Шлихтинга) спектральной задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда, обладающее областью неустойчивости в пространстве волновых чисел; $\mathbf{k} = (\alpha, \beta)$ — волновой вектор; $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $\bar{X}_0(t)$ — положение “центра масс” локализованного возмущения (положение точки в потоке, которая движется с некоторой заранее определенной скоростью, наблюдение за возмущением производится из движущейся системы координат); величины Q и H определены в [7, 8]; ε — малый параметр.

В связи с этим возникает задача численного определения динамики локализованных возмущений указанных видов. Для волновых пакетов малых размеров в пространстве волновых чисел может быть получена система уравнений в частных производных [7, 8], к которой, вообще говоря, добавляется интегродифференциальное уравнение для волнового пакета, расположенного около начала координат пространства волновых чисел (“0-пакет”). Уже это обстоятельство сильно усложняет решение задачи, так как линейный интегральный оператор сингулярен в физическом пространстве. В пространстве же волновых чисел эта задача не сингулярна. Поэтому возникает идея о расщеплении оператора в процессе численного решения на линейную и нелинейную части.

Так как область усиления расположена вблизи начала координат ($k \approx 0,1 \div 0,3$), представляет интерес аппроксимация собственной частоты в этой области. Аппроксимация

безразмерной частоты в окрестности нуля имеет вид [7, 8, 12]

$$\bar{\omega}(\mathbf{k}) = \bar{\omega}^R(\mathbf{k}) + i\varepsilon^2 \bar{\omega}^I(\mathbf{k}) = \alpha a(\bar{X}_0) + b(\bar{X}_0)\alpha k + i\varepsilon^2 d(\bar{X}_0).$$

Входящие в это выражение параметры определены в [12].

На рис. 1 представлены некоторые возможные начальные конфигурации спектральных компонентов на фоне области усиления. Спектральные размеры отдельного волнового пакета, составляющего начальную конфигурацию, могут быть малыми (вариант I). Динамика таких волновых пакетов в физическом пространстве определяется их малой окрестностью в пространстве волновых чисел. В случае, когда волновой пакет содержит область усиления (вариант IV), усиление (затухание) возмущения в физическом пространстве определяется интегральным оператором, распространяющимся на всю область сосредоточения локализованного возмущения. Могут быть и промежуточные случаи (варианты II и III).

2. Узкие волновые пакеты. В работах [7, 8] получены уравнения динамики огибающей волнового пакета в ламинарной части пограничного слоя на пластине. Они включают интегродифференциальное уравнение, описывающее динамику волновых гармоник с волновым вектором в окрестности нуля пространства волновых чисел, которые в общем случае подвержены самовоздействию и взаимодействию с совокупностью волновых пакетов, находящихся в трехволновом резонансе между собой. На динамику этих волновых пакетов, описываемых дифференциальными уравнениями типа нелинейного уравнения Шредингера, в свою очередь, оказывают влияние волновые гармоники из окрестности начала координат пространства волновых векторов. Эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial t}(t, \mathbf{r}_1) - \varepsilon(\dot{X}_0 - a(\bar{X}_0)) \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_1}(t, \mathbf{r}_1) = \varepsilon^2 I^{(0)}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j^{(n)}}{\partial t} + i(q(\hat{P}_j^{(n)}) - q(n\mathbf{k}_j))\tilde{\varphi}_j^{(n)} + i\varepsilon x_1 \frac{\partial \omega^R}{\partial \bar{X}_0}(\hat{P}_j^{(n)})\tilde{\varphi}_j^{(n)} = \varepsilon^2 I_j^{(n)}, \quad (3)$$

где

$$I^{(0)} = -b(\bar{X}_0) \int G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \varphi^{(0)}(t, \mathbf{s}) d\mathbf{s} - ix_1 \frac{\partial a(\bar{X}_0)}{\partial \bar{X}_0} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_1}(t, \mathbf{r}_1) +$$

$$+ (d(\bar{X}_0) + Q(0))\varphi^{(0)}(t, \mathbf{r}_1) + \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{n=-1 \\ n \neq 0}}^1 H_{0,n\mathbf{k}_j} \tilde{\varphi}_j^{(n)}(t, \mathbf{r}_1) \tilde{\varphi}_j^{(-n)}(t, \mathbf{r}_1) + H_{0,0}(\varphi^{(0)}(t, \mathbf{r}_1))^2;$$

$$G(\mathbf{r}) = 1/(\pi r);$$

$$I_j^{(n)} = (\bar{\omega}^I(\hat{P}_j^{(n)}) + Q(\hat{P}_j^{(n)}))\tilde{\varphi}_j^{(n)}(t, \mathbf{r}_1) + ix_1^2 P^{(2)}(\hat{P}_j^{(n)})(n\alpha_j)\tilde{\varphi}_j^{(n)}(t, \mathbf{r}_1) +$$

$$+ \sum_{l=-1}^1 H(n\mathbf{k}_j, l\mathbf{k}_j)\tilde{\varphi}_j^{(l)}(t, \mathbf{r}')\tilde{\varphi}_j^{(n-l)}(t, \mathbf{r}'')e_j^{(l)}e_j^{(n-l)}e_j^{(-n)} + V_j^{(n)};$$

$$\hat{P}_j^{(n)} = n\mathbf{k}_j + (\varepsilon/i)\nabla; \quad q(\mathbf{k}) = \bar{\omega}^R(\mathbf{k}) - \dot{X}_0\alpha; \quad \varphi_j^{(n)} = e_j^{(n)}\tilde{\varphi}_j^{(n)};$$

$$\mathbf{s} = (\xi, \eta); \quad e_j^{(n)} = \exp\left(-i \int_0^t q(n\mathbf{k}_j) dt\right); \quad l, n = -1, 0, 1; \quad j = 1, 2, 3.$$

В последней формуле $V_j^{(n)}$ определены выражениями

$$V_1^{(n)} = \{H(n\mathbf{k}_1, n\mathbf{k}_2) + H(n\mathbf{k}_1, n\mathbf{k}_3)\}\tilde{\varphi}_2^{(n)}(\mathbf{r})\tilde{\varphi}_3^{(n)}(\mathbf{r});$$

$$V_2^{(n)} = \{H(n\mathbf{k}_2, n\mathbf{k}_1) + H(n\mathbf{k}_2, n\mathbf{k}_3)\}\tilde{\varphi}_1^{(n)}(\mathbf{r})\tilde{\varphi}_3^{(-n)}(\mathbf{r});$$

$$V_3^{(n)} = \{H(n\mathbf{k}_3, n\mathbf{k}_1) + H(n\mathbf{k}_3, n\mathbf{k}_2)\}\tilde{\varphi}_1^{(n)}(\mathbf{r})\tilde{\varphi}_2^{(-n)}(\mathbf{r}).$$

Здесь $\tilde{\varphi}_j^{(n)}(\mathbf{r})$, $n = -1, 1$; $j = 1, 2, 3$; $\mathbf{r} = (x, z)$ — амплитуда огибающей компонента резонансного триплета; $\tilde{\varphi}_j^{(-n)}$ комплексно сопряжены с $\tilde{\varphi}_j^{(n)}$; $\varphi^{(0)}$ — амплитуда “0-пакета”; $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ — волновые векторы резонансного триплета ($\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, $\bar{\omega}^R(\mathbf{k}_1) = \bar{\omega}^R(\mathbf{k}_2) + \bar{\omega}^R(\mathbf{k}_3)$); в остальном сохранены обозначения работы [8]. Члены, соответствующие кратным гармоникам, в уравнениях (2) и (3) не учитываются.

Левая часть оператора уравнений для $n \neq 0$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_j^{(n)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{\omega}^R}{\partial \mathbf{k}} \Big|_{\mathbf{k}=n\mathbf{k}_j} \cdot \nabla - \dot{X}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] \tilde{\varphi}_j^{(n)}(\mathbf{r}, t) - i \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right)^2 \bar{\omega}^R \Big|_{\mathbf{k}=n\mathbf{k}_j} \tilde{\varphi}_j^{(n)}(\mathbf{r}, t),$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right).$$

Величина $H_{0,0}$ определялась [12] как промежуточный предел $H_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}$, где \mathbf{k} направлен вдоль продольной оси пространства волновых чисел, а \mathbf{k}_1 и $\mathbf{k}-\mathbf{k}_1$ — его субгармоники, при малом, но не обращающемся в нуль \mathbf{k} . При этом оказалось, что $\text{Re}[H_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}]$ и $\text{Im}[H_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}]$ ведут себя как степенные функции $\alpha^{0,72}$ и $\alpha^{0,45}$ соответственно при $\alpha \rightarrow 0$. Перенормируя исходные уравнения ($f_{\mathbf{k}} = k^\mu \tilde{f}_{\mathbf{k}}$, $\mu \cong -0,72$), можно добиться, чтобы новая величина $H_{0,0}$ была конечной и действительной, что регуляризует полученные в [7, 8] уравнения для огибающей волнового пакета.

3. Некоторые частные случаи. Далее рассматриваются случаи, в которых продольной неоднородностью пренебрегается. В случае 1 можно аппроксимировать область неустойчивости с помощью полинома. В этом случае динамика гауссовского в начальный момент волнового пакета описывается квадратурой

$$\Psi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp(-it\Phi_1 + t\Phi_2 - \Phi_3 + i((\alpha - 0,3)x + \beta z)) \cong$$

$$\cong 0,293 \exp[-0,25i(12 + (0,3 + 0,6ib)t + ix)^2 / ((b - i)t - 20i) - (0,0125 + 0,09ib)t -$$

$$- 0,3ix + 0,5iz^2 / ((b - 0,4i)t - 40i)] / \sqrt{(20 + i + ibt)(6,366 + 0,637t + 0,159ibt)},$$

$$\Phi_1 = (2b(\alpha - 0,3)^2 + b\beta^2)/2, \quad \Phi_2 = 0,01 - (\alpha - 0,15)^2 - \beta^2/5, \quad \Phi_3 = ((\alpha - 0,3)^2 + \beta^2)/0,05.$$

Результаты вычислений приведены на рис. 3.

Эта же задача может быть решена в линейном приближении численно с помощью дискретного преобразования Фурье. Сопоставление с результатами экспериментальных работ [4, 9] показывает качественное соответствие с аналитическими и численными результатами настоящей работы.

Численное решение позволяет рассмотреть случай, когда носитель ВП содержит начало координат пространства волновых чисел и область неустойчивости (случай 3). При этом принимается во внимание самовоздействие. Схема расщепления выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial t} = H_{0,0}(\varphi^{(0)})^2, \quad \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\Omega f_{\mathbf{k}},$$

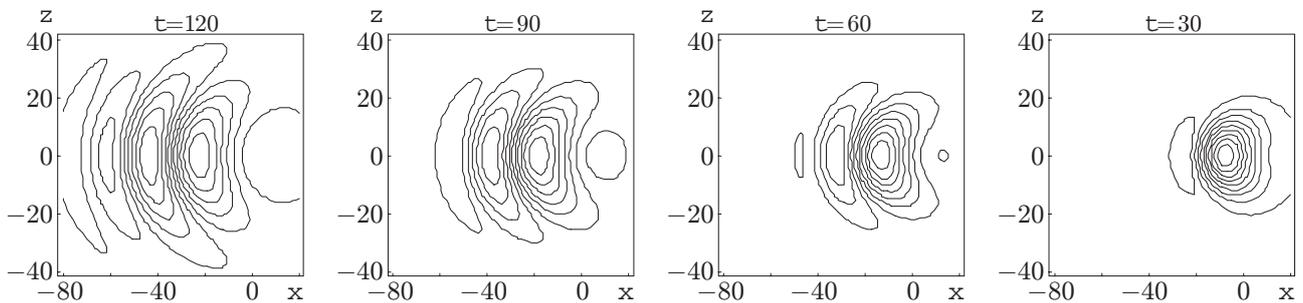
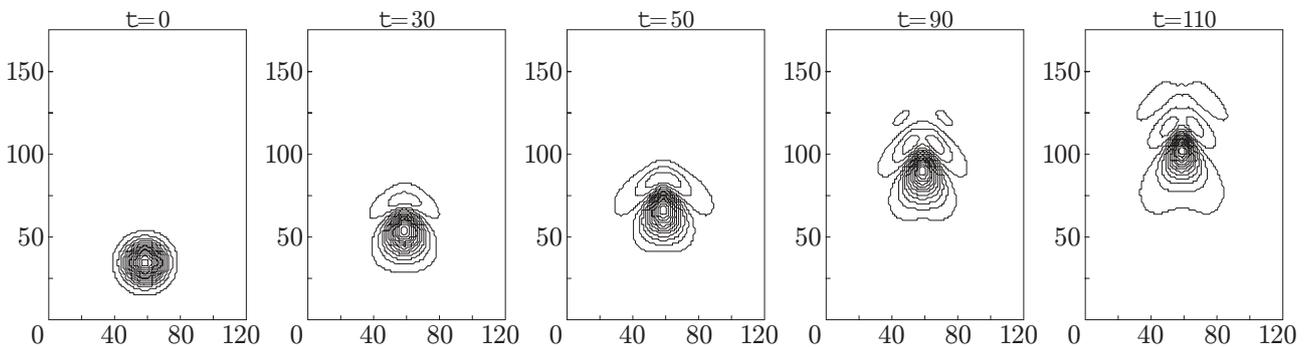


Рис. 3. Линейная динамика гауссовского волнового пакета

Рис. 4. Динамика волнового пакета с самовоздействием (горизонтальное направление — ось z , вертикальное — ось x)

где $i\Omega = (i[\bar{\omega}^R(\mathbf{k}) - (\dot{X}_0\mathbf{k})]) - \varepsilon^2(\bar{\omega}^I(\mathbf{k}) + Q(\mathbf{k}))$. Результаты вычислений показывают, что гауссовский в начальный момент времени ВП преобразуется в ВП, локализованный в области неустойчивости. После этого начинается стадия дисперсии волнового пакета в физическом пространстве. Этот результат, возможно, объясняет явление, описанное в работах [14, 15] и монографии [2], в котором наблюдалось преобразование изначально длинноволнового ВП (полосчатых структур) в коротковолновый ВП.

Решение этой задачи представлено на рис. 4. Следует заметить, что учет субгармонических компонент в исходном волновом пакете в представленном численном примере может только увеличить соответствие экспериментальным результатам.

Полученные результаты позволяют надеяться, что предложенным методом можно описать ВП в случае его более сложной начальной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Emmons H. W.** The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Pt I // *J. Aeronaut. Sci.* 1951. V. 18, N 7. P. 490–498.
2. **Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.** Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1999.
3. **Занин Б. Ю.** Переход к турбулентности на крыле в полете и в аэродинамической трубе при одинаковых числах Рейнольдса // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.* 1988. № 18, вып. 5. С. 51–53.
4. **Gaster M., Grant I.** An experimental investigation of the formation and development of wave packet in a laminar boundary layer // *Proc. Roy. Soc. London.* 1975. V. A347. P. 253–269.

5. **Терентьев Е. Д.** О формировании волнового пакета в пограничном слое на плоской пластине // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 5. С. 814–819.
6. **Рыжов О. С., Савенков И. В.** Асимптотическая теория волнового пакета в пограничном слое на пластинке // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 5. С. 820–828.
7. **Жаров В. А.** Асимптотическое описание слабонелинейных волновых пакетов в среде со слабой дисперсией, типичной для ламинарных пограничных слоев на пластине, обтекаемой несжимаемой жидкостью // Тр. ЦАГИ. 1993. Вып. 2523. С. 3–16.
8. **Жаров В. А.** Вариант описания слабонелинейной динамики волнового пакета в пограничном слое на пластине в несжимаемой жидкости // Там же. С. 17–28.
9. **Medeiros M. A. F., Gaster M.** The production of subharmonic waves in the nonlinear evolution of wave packets in boundary layers // J. Fluid Mech. 1999. V. 399. P. 301–318.
10. **Жигулев В. Н., Сидоренко Н. В., Тумин А. М.** О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью // ПМТФ. 1980. № 6. С. 43–49.
11. **Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.** О возбуждении пакетов волн сплошного спектра в пограничном слое внешней турбулентностью. Нижний Новгород, 1992. (Препр. / Ин-т прикл. физики РАН).
12. **Додонов И. Г., Жаров В. А., Хлопков Ю. И.** Локализованные когерентные структуры в пограничном слое // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 60–67.
13. **Реутов В. П.** Нелинейный критический слой и формирование продольных вихрей при взаимодействии волн в сдвиговых течениях // ПМТФ. 1987. № 5. С. 107–115.
14. **Grek G. D., Kozlov V. V., Ramazanov M. P.** Three types of disturbances from the point source in the boundary layer // Laminar-turbulent transition. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 267–272.
15. **Grek G. D., Dey J., Kozlov V. V., et al.** Experimental analysis of the process of the formation of turbulence in the boundary layer at higher degree of turbulence of windstream. TR 91-FM-2 / Indian Inst. of Science. Banglador, 1991.

*Поступила в редакцию 24/XI 2003 г.,
в окончательном варианте — 17/II 2004 г.*
