

3. Бычков Ю. И., Королев Ю. Д., Орловский В. М. Диффузная и канальная стадии при пробое перенапряженных газовых промежутков. Изв. вузов, Физика, 1971, № 9, стр. 45—49.
4. Ковальчук Б. М., Кремнев В. В., Месяц Г. А. Лавинный разряд в газе и генерирование нано- и субнаносекундных импульсов большого тока. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 1.
5. Shipman J. D. Traveling wave excitation of high power gas lasers. Appl. Phys. Letters, 1967, vol. 10, No. 1.
6. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. М., «Наука», 1971.
7. Raether H. Electron avalanches and breakdown in gases. London, Butterworth, 1964.

УДК 533.95.7/8

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЭЛЕКТРОННО-ИОННОМ КОЛЬЦЕ

Г. П. Берман

(Красноярск)

Рассматриваются поперечные колебания конечной амплитуды в электронно-ионном кольце. Вдали от области линейных резонансов получено уравнение для медленно меняющихся амплитуд и найдены условия возбуждения неустойчивости типа «отрицательного давления». Вблизи нижней границы области линейной неустойчивости найдены условия, при которых нелинейность срывает устойчивость колебаний при конечных амплитудах.

1. В [1] исследовался вопрос об устойчивости электронно-ионного кольца относительно поперечных колебаний (неустойчивость типа «змейки» в приближении линейности поляризационной силы, возникающей при относительном смещении центров тяжести пучков. Оказывается, что существует область волновых чисел ( $k_- < k < k_+$ ), для которых имеет место неустойчивость. Появление поперечной неустойчивости связано с наличием резонансов на частотах электронно-ионных колебаний (вблизи  $k_+$ ) и на дошперовских частотах колебаний электронов в фокусирующем магнитном поле (вблизи  $k_-$ ). Нелинейная стадия развития колебаний показывает, что вблизи верхней границы области неустойчивости ( $k_+$ ) нелинейная поляризационная сила стабилизирует неустойчивость на амплитудах, малых по сравнению с поперечным радиусом пучка [2]. В случае отсутствия внешней фокусировки электронов в [2] получено точное решение в виде нелинейной стационарной волны, движущейся вдоль пучка. При наличии нелинейности в электронно-ионном кольце возможны колебания с конечными амплитудами как вблизи области линейной неустойчивости, так и вдали от нее.

В работе получены уравнения, которые описывают колебания такого типа, и исследуется вопрос об их устойчивости.

В качестве модели выбраны два жестких пучка электронов и ионов, плотность частиц в поперечном сечении которых распределена по гауссовскому закону

$$(1.1) \quad n_{e,i}(r_{\perp}) = n_{e,i}^{(0)} \exp(-r_{\perp}^2 / a_0^2)$$

где  $a_0$  — постоянная, характеризующая радиус пучков,  $r_{\perp}$  — модуль радиус-вектора частицы в плоскости поперечного сечения пучка. Измеряя все пространственные и временные величины в единицах  $a_0$  и  $\omega_0$  соответственно ( $\omega_0^2 = \pi e^2 n_e^{(0)} / M_i$  — частота колебаний ионов в поле электронов), запишем систему уравнений для поперечных смещений центров тяжести пучков [1, 2]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} d^2x/dt^2 + \lambda^2 x &= -\delta(x-y)[1 - 1/4(y-x)^2], \quad d^2y/dt^2 = (x-y)[1 - \\ &- 1/4(y-x)^2] \\ d/dt &\equiv \partial/\partial t + v\partial/\partial z, \quad \delta = n_i^{(0)} M_i / \gamma n_e^{(0)} m_e, \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $x(y)$  — смещение электронов (ионов),  $\lambda$  — частота колебаний электронов во внешнем фокусирующем поле,  $v$  — скорость электронов.

Поляризационная сила в (1.2), возникающая при поперечном смещении центров тяжести пучков, вычислена для распределения (1.1) в предположении малой нелинейности ( $x, y \ll 1$ ).

При выполнении последнего условия используем метод «растяжения», развитый в [3-5]. Ищем решение (1.2) в виде ряда

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x_l^{(n)}(\xi, \tau) \\ y_l^{(n)}(\xi, \tau) \end{pmatrix} e^{il(kz - \omega t)}$$

где параметр  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\xi$  и  $\tau$  — медленные переменные

$$(1.4) \quad \xi = \varepsilon(z - c_0 t), \quad c_0 = \partial\omega/\partial k, \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

С точностью до  $\varepsilon$  получаем из (1.2) дисперсионное уравнение линейной теории [1]

$$F(\omega) = \omega^{-2} + \delta/(\omega - kv)^2 - \lambda^2 = 1$$

Учитывая, что

$$(1.5) \quad c_0 = v/[1 + \delta\omega/\alpha^2(\omega - kv)]^{-1}$$

получаем с точностью до  $\varepsilon^2$

$$(1.6) \quad x_1^{(2)} - \alpha y_1^{(2)} = 2ic_0\omega \partial\Phi/\partial\xi, \quad \Phi(\xi, \tau) \equiv y_1^{(1)}(\xi, \tau), \quad \alpha = 1 - \omega^2$$

С учетом (1.5), (1.6) получаем в порядке  $\varepsilon^3$  уравнение для  $\Phi(\xi, \tau)$

$$(1.7) \quad \partial\Phi/\partial\tau + iv\partial^2\Phi/\partial\xi^2 = iq|\Phi|^2\Phi$$

$$(1.8) \quad v = \frac{1}{2} \left[ \frac{4c_0^2\omega^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2(c_0 - v)^2}{\delta} + c_0^2 \right] \left[ \frac{\alpha^2(\omega - kv)}{\delta} + \omega \right]^{-1/2}$$

$$q = 3/4(1 - \alpha)^4 [\alpha^2(\omega - kv)/\delta^{-1} + \omega]^{-1/2}$$

Уравнение типа (1.7) исследовалось, например, в [4-6]. Покажем, при каких условиях возможна неустойчивость типа отрицательного давления. Ищем решение (1.7) в виде

$$(1.9) \quad \Phi(\xi, \tau) = \sqrt{\rho} \exp\left(-\frac{i}{2v} \int \sigma d\xi\right)$$

Подставляя (1.9) в (1.7) и отделяя вещественную и мнимую части, получим систему уравнений для определения  $\rho$  и  $\sigma$

$$(1.10) \quad \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\sigma\rho) = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \sigma \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = -2vq \frac{\partial\rho}{\partial\xi} + 2v^2 \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \sqrt{\rho}$$

Последний член во втором уравнении (1.10) мал при условии

$$(1.11) \quad q\Delta^2/k^2v \gg 1$$

где  $\Delta = |x - y|_{\max}$  — амплитуда относительного смещения центров тяжести пучков. Величина  $qv\rho^2$  в (1.10) играет роль давления, если  $\rho$  и  $\sigma$  считать гидродинамической плотностью и скоростью. При  $qv < 0$  «давление» становится отрицательным и начальные возмущения экспоненциально нарастают. Условие  $qv < 0$  дает

$$(1.12) \quad 4c_0^2\omega^2/\alpha + \alpha^2(c_0 - v)^2/\delta + c_0^2 < 0$$

Рассмотрим ионную ветвь колебаний

$$(1.13) \quad \omega \approx 1 + \delta/2k^2v^2, \quad \alpha \approx -\delta/k^2v^2, \quad c_0 \approx -\delta/k^3v^2$$

С учетом (1.13) получаем из (1.11), (1.12) условия возникновения неустойчивости типа отрицательного давления

$$(1.14) \quad \delta^{-1}(kv\Delta/\omega_0)^2 \gg 1, \quad \delta(\omega_0/kv)^3 \ll 1$$

При малых  $\delta$  (случай малой компенсации) условие (1.14) хорошо удовлетворяется даже для относительно малых величин  $\Delta$ .

2. Рассмотрим устойчивость колебаний конечной амплитуды вблизи нижней границы области линейной неустойчивости ( $k_-$ ). Используя метод, аналогичный п. 1, получаем уравнение для  $\Phi(\xi, \tau)$  вблизи границы области линейной неустойчивости ( $\partial F/\partial\omega = 0$ )

$$(2.1) \quad i\partial\Phi/\partial\xi = a\partial^2\Phi/\partial\tau^2 - (b|\Phi|^2 + c\Phi), \quad \tau = \varepsilon t, \quad \xi = \varepsilon^2 z$$

$$(2.2) \quad a = -1/2 [4\omega^2\delta/\alpha + \alpha^2kv_0/\omega](v_0\omega\delta)^{-1}$$

$$b = -3/4(1 - \alpha)^4(v_0\omega)^{-1}, \quad c = (\mu/|\mu|)k, \quad \mu = (v - v_0)/v_0, \quad |\mu| \ll 1$$

где  $v_0$  — скорость на границе области устойчивости. Выберем колебание с волновым вектором  $k < k_-$ , т. е. в линейном приближении колебание устойчиво ( $\mu > 0$ ), и рассмотрим случай  $V \delta/\lambda = \kappa \ll 1$ ;  $\lambda \gg 1$ , ( $\lambda \sim 1$ ).

Получим из (2.2)

$$(2.3) \quad a_- \approx -2k/(1+\lambda)\kappa, \quad b_- \approx -3k/4(1+\lambda)$$

Ищем решение (2.1) в виде

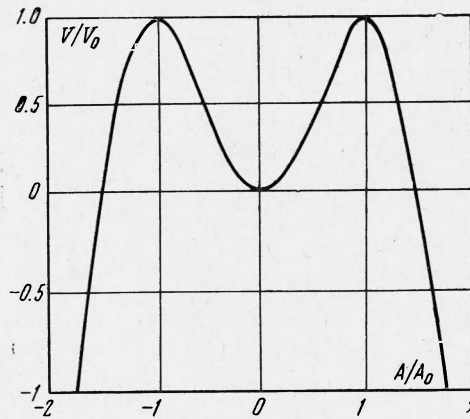
$$(2.4) \quad \Phi(\xi, \tau) = A(\tau) \exp(-i\psi(\tau))$$

Подставим (2.4) в (2.1) и отделим вещественную и мнимую части, затем проинтегрируем один раз уравнение для амплитуды  $A(\tau)$ .

Получаем

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} (dA/d\tau)^2 + V(A) = H = \text{const}$$

$$(2.6) \quad V(A) = -M^2/A^2 - (b/4a)A^4 - (c/2a)A^2, \quad M = A^2 d\psi/d\tau = \text{const}$$



Рассмотрим колебания с нулевым «моментом»  $M = 0$ . Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$(2.7) \quad A(\tau) = A_0 \sqrt{1-\beta^2} \operatorname{Sn}[\sqrt{1/2} |c/a| (1+\beta) \tau; \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}]$$

$$(2.8) \quad \beta = \sqrt{1-H/V_0}, \quad A_0 = \sqrt{|c/b|}, \quad V_0 = c^2/4|ab|$$

На фигуре изображена потенциальная кривая (2.6). Величины  $A_0$  и  $V_0$  на фигуре вычисляются по (2.8). Оценка величины максимальной амплитуды  $\Delta = |x-y|_{\max}$ , соответствующей  $A_0$  в (2.7), (2.8), дает в случае (2.3)

$$(2.9) \quad \Delta \approx 4\varepsilon \sqrt{(1+\lambda)/3}$$

Величина  $\varepsilon$  соответствует смещению по  $k$  с нижней границы области неустойчивости в сторону малых  $k$ , в область линейной устойчивости ( $\varepsilon^2 \sim |\mu|$ ):  $k_- - k \approx \approx \varepsilon^2 k_-$ . Поэтому, задавая малые значения для величины  $\varepsilon$ , получаем малые критические амплитуды в выражении (2.9), при которых происходит срыв устойчивости колебаний конечной амплитуды вблизи нижней границы области неустойчивости.

Автор благодарен Б. В. Чирикову за обсуждение результатов работы.

Поступила 16 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чириков Б. В. Устойчивость частично компенсированного электронного пучка. Атомная энергия, 1965, т. 19, № 3.
2. Казаринов Н. Ю., Кузнецов А. Б., Перельштейн Э. А., Рубин С. В., Шевцова В. Ф. Нелинейные явления в неустойчивости типа «змейка» электронно-ионного кольца. Препринт Р9-6284, Дубна, 1972.
3. Midzuno Y., Watanabe T. Nonlinear behaviors of waves in a plasma in the vicinity of marginally stable state. J. Phys. Soc. Japan, 1970, vol. 28, No. 3.
4. Taniuti T., Yajima N. Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I. J. Math. Phys., 1968, vol. 10, No. 8.
5. Asano N., Taniuti T., Yajima N. Perturbation method for a nonlinear wave modulation. II. J. Math. Phys., 1968, vol. 10, No. 11.
6. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 1968, № 2.