

УДК 551.466.81:534.1

ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКОВ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ИСТОЧНИКАМИ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

А. Ю. Васильев, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва

E-mail: chakin@ipmnet.ru

Проанализированы энергетические и силовые характеристики пучков периодических внутренних волн в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. Полученные методами интегральных преобразований точные решения линейризованных задач генерации помимо трехмерных внутренних волн описывают сопутствующие пограничные слои двух типов. Решения, не содержащие эмпирических параметров, приведены к форме, допускающей прямое сравнение с экспериментальными данными для излучателей различного типа (фрикционного, поршневого, комбинированного) прямоугольной или эллиптической формы. Компоненты тензора напряжений и силы, действующие на излучатель, приведены в квадратурах. В предельных случаях решения равномерно переходят в аналогичные выражения для задач в двумерной постановке.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, внутренние волны, аналитические методы, точное решение, стоксов и внутренний пограничные слои.

Введение. Внутренние волны, играющие важную роль в динамике океана, атмосферы и других стратифицированных сред, изучаются аналитически [1], численно и экспериментально в лабораторных и природных условиях. В аналитических расчетах волновых полей вместо реальных граничных условий на излучателях используются совокупности сингулярных источников, свойства которых постулируются [2] или заимствуются из теории идеальной жидкости [3]. При анализе возмущений, возбуждаемых в жидкости горизонтальным цилиндром, совершающим прямолинейные или крутильные колебания малой амплитуды, параметры волновых пучков и пограничных слоев рассчитываются независимо [4, 5]. Полученные результаты, которые используются для определения областей применимости асимптотических приближений, обычно приведены в интегральной форме [4, 5], что затрудняет их практическое использование.

Учет всех корней дисперсионного уравнения позволяет одновременно рассчитать параметры двумерных внутренних волн и сопутствующих пограничных слоев [6]. Результаты таких расчетов согласуются с экспериментальными данными [7]. Предложенный в [6] подход распространяет классический метод Стокса [8] на неоднородные среды. Выполнение точных граничных условий позволяет рассчитывать как волны, так и тонкую структуру пограничных слоев, возникающих при линейных колебаниях участков плоской поверхности в произвольных направлениях. Нелинейная задача излучения волн пограничными слоями на диске, совершающем крутильные колебания, рассмотрена в [9].

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН "Поддержка молодых ученых" на 2005 г., программы ОЭМПУ РАН ОЭ-14 "Динамика и акустика неоднородных жидкостей, газожидкостных смесей и суспензий" и при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке РАН на 2005 г. и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-05-64090).

В случае трехмерных движений пограничный слой на осциллирующей части плоскости оказывается более сложным и включает аналог слоя Стокса в однородной жидкости и специфический внутренний пограничный слой [10]. Метод построения решения [9] достаточно универсальный и позволяет рассчитывать течения и при более сложных движениях излучающих поверхностей, которые используются в эксперименте для увеличения амплитуды волн. Целью данной работы является оценка силовых характеристик пучков трехмерных периодических внутренних волн, излучаемых источниками различной формы.

1. Определяющие уравнения и граничные условия. Изучаются установившиеся периодические движения в вязкой несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, плотность которой зависит от высоты по закону $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda)$ (Λ — масштаб; ось z направлена противоположно ускорению свободного падения \mathbf{g}). Частота плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$, кинематическая вязкость ν постоянная. Источником движений является часть наклонной плоскости, совершающая линейные гармонические колебания в выбранном направлении с магнитудой скорости u_0 . Зависимость всех величин от времени имеет периодический характер, общий множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Линеаризованная система уравнений движения в приближении Буссинеска имеет вид [10]

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v} - \rho g \mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_z \frac{\rho_0}{\Lambda} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, ρ , P — возмущения скорости, плотности и давления соответственно; \mathbf{e}_z — единичный орт оси Oz . При проведении вычислений используются стандартные условия теории внутренних волн: приближение слабой стратификации $\Lambda \gg H$ (H — максимальный линейный масштаб задачи), условие малости вязкости $N\lambda_c^2 \gg \nu$ (λ_c — характерная длина волны).

Вид уравнения неразрывности для несжимаемых сред позволяет ввести тороидально-полоидальное представление, в котором три компоненты скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ с помощью соотношения $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{e}_z \Psi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z \Phi)$ определяются скалярными функциями Φ , Ψ [11]. При этом система (1) преобразуется к виду

$$(\omega^2 \Delta - N^2 \Delta_{\perp} - i\omega \nu \Delta^2) \Phi = 0, \quad (\omega - i\nu \Delta) \Psi = 0, \quad (2)$$

где $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ — оператор Лапласа; $\Delta_{\perp} = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$. Первое независимое уравнение в (2) является типичным для теории внутренних волн, второе появляется при описании линейных пограничных слоев в вязкой жидкости [2]. Следуя [12], дополнительные решения, обусловленные введением тороидально-полоидального представления, и соответствующие им множители в (2) отброшены из физических соображений.

Геометрия задачи и использованные системы координат приведены на рисунке. Излучающая поверхность находится на непроницаемой плоскости, расположенной под углом φ к горизонту. Начало координат во всех случаях располагается в центре осциллирующей области.

Направление действия силы тяжести определяет лабораторную систему координат (x, y, z) , связанную с неподвижной жидкостью. На излучающей поверхности расположен центр локальной системы координат (ξ, η, ζ) , полученной путем поворота системы (x, y, z) на угол φ вокруг оси y . При таком выборе оси ξ и η находятся на излучающей поверхности, а ось ζ нормальна к ней. С волновым конусом связаны две системы координат: сопутствующая (q, p, α) , в которой ось q , наклоненная под углом $\theta = \arcsin(\omega/N)$ к горизонту, ориентирована в направлении распространения волн, ось p — поперек, α — угловая переменная, и цилиндрическая (r, α, z) :

$$\xi = x \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad \eta = y, \quad \zeta = -x \sin \varphi + z \cos \varphi,$$

$$\left\{ \sin^2 \theta (k_{1,2}^2 + k_{\perp}^2) - [(k_{\xi} \cos \varphi - k_{1,2} \sin \varphi)^2 + k_{\eta}^2] + i \sin \theta \delta_N^2 (k_{1,2}^2 + k_{\perp}^2)^2 \right\} \times \\ \times [\delta_N (k_3^2 + k_{\perp}^2) - i \sin \theta] = 0. \quad (5)$$

Здесь $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$ — универсальный микромасштаб; $\sin \theta = \omega/N$; $k_{\perp}^2 = k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2$. В дисперсионном уравнении для периодических движений в вязкой стратифицированной жидкости помимо отношения частот, характерного для внутренних волн [1], присутствует универсальный микромасштаб δ_N , характеризующий пограничные слои [6–9].

Уравнение (5) имеет три пары комплексных корней, одна из которых регулярна по вязкости ($\text{Im } k \sim \nu$), а две других сингулярны ($\text{Im } k \sim \nu^{-1/2}$). Регулярные корни описывают пучок конических внутренних волн, существующий и в идеальной жидкости. В слабостратифицированных средах с малой вязкостью корни дисперсионного уравнения (5) находятся методами теории возмущений [13]. В полупространстве $\zeta > 0$ значения корней выбираются из условия затухания возмущений на бесконечности $\text{Im } k_1 > 0$, $\text{Im } k_2 > 0$, $\text{Im } k_3 > 0$.

Полная классификация регулярных и сингулярных компонент трехмерных периодических движений в вязкой жидкости с учетом эффектов сжимаемости, вращения и стратификации приведена в [14]. При переходе к однородной жидкости исчезает различие между сингулярными корнями (5), т. е. пограничные слои становятся тождественными и образуют вырожденный пограничный слой.

Коэффициенты A , B , C определяются из решений системы линейных уравнений, образующейся при подстановке решения (4) в граничные условия (3) для скорости источника $\mathbf{u}(\xi, \eta)$, которые также записываются в спектральной форме $\mathbf{U}(k_{\xi}, k_{\eta})$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\xi, \eta) \exp(-ik_{\xi}\xi - ik_{\eta}\eta) d\xi d\eta.$$

Практический интерес представляет изучение нескольких типов излучателей, использующихся в лабораторных экспериментах. К их числу относятся следующие излучатели: фрикционный (прямоугольник или диск, совершающий линейные колебания вдоль своей поверхности), поршневой (прямоугольник или диск, совершающий колебания вдоль нормали к своей поверхности) и комбинированный (два одинаковых сопряженных прямоугольника, осциллирующих в противофазе вдоль нормали к своей поверхности). Значения возмущений скорости и плотности в волновых пучках и пограничных слоях на излучателях приведены в [10, 15]. Полученные ранее выражения, которые используются при расчетах возмущения давления и сил, действующих на излучающую поверхность, в данной работе не приводятся.

3. Расчет сил, действующих на излучающую поверхность. Компоненты сил, действующих на единицу поверхности излучателя: $f_i = -\sigma_{ik}n_k$, определяются тензором напряжений [16]

$$\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

для вычисления которого используются рассчитанные ранее функции Φ и Ψ в локальной системе координат.

Полная сила, действующая на излучающую поверхность, задается выражением

$$F_i = \iint_S \tilde{f}_i(x, y) dx dy = \sin \varphi \iint_S f_i(\xi, \eta) d\xi d\zeta. \quad (6)$$

Распределения давления и плотности в локальной системе координат, связанной с излучающей поверхностью, с учетом [10] имеют вид

$$\begin{aligned}
 P &= -\rho_0\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1 (A e^{ik_1\zeta} + B e^{ik_2\zeta}) e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta - \\
 &\quad - i\rho_0\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1 [A e^{ik_1\zeta} (k_1^2 + k_\perp^2) + B e^{ik_2\zeta} (k_2^2 + k_\perp^2)] e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta, \\
 \rho &= \rho_0 \left[1 + \frac{i}{\omega\Lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_1^2 + k_\eta^2) (A e^{ik_1\zeta} + B e^{ik_2\zeta}) e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta \right],
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = k_\xi \cos \varphi - k_i \sin \varphi$; $\chi_i = k_\xi \sin \varphi + k_i \cos \varphi$.

Компоненты тензора напряжений, которые в формуле (6) записаны в лабораторной системе координат (x, y, z) , для удобства дальнейших вычислений представлены в локальной системе координат (ξ, η, ζ) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} = -P - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} C k_\eta \varepsilon_3 e^{ik_3\zeta + ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta - \\
 &\quad - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} (A e^{ik_1\zeta} \varepsilon_1^2 \chi_1 + B e^{ik_2\zeta} \varepsilon_2^2 \chi_2) e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta, \\
 \sigma_{yy} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = -P + 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} C k_\eta \varepsilon_3 e^{ik_3\zeta + ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta - \\
 &\quad - 2\mu i \int_{-\infty}^{+\infty} k_\eta^2 (A e^{ik_1\zeta} \chi_1 + B e^{ik_2\zeta} \chi_2) e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta, \\
 \sigma_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -P - 2i\mu \int_{-\infty}^{+\infty} [A e^{ik_1\zeta} \chi_1 (\varepsilon_1^2 + k_\eta^2) + B e^{ik_2\zeta} \chi_2 (\varepsilon_2^2 + k_\eta^2)] e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta, \\
 \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} C (\varepsilon_3^2 - k_\eta^2) e^{ik_3\zeta + ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta - \\
 &\quad - i\mu \int_{-\infty}^{+\infty} k_\eta [A e^{ik_1\zeta} \varepsilon_1 \chi_1 + B e^{ik_2\zeta} \varepsilon_2 \chi_2] e^{ik_\xi\xi + ik_\eta\eta} dk_\xi dk_\eta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} C k_\eta \chi_3 e^{ik_3 \zeta + ik_\xi \xi + ik_\eta \eta} dk_\xi dk_\eta + \\ &+ i\mu \int_{-\infty}^{+\infty} [A e^{ik_1 \zeta} (k_\eta^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^3 - \varepsilon_1 \chi_1^2) + B e^{ik_2 \zeta} (k_\eta^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^3 - \varepsilon_2 \chi_2^2)] e^{ik_\xi \xi + ik_\eta \eta} dk_\xi dk_\eta, \\ \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} C k_\eta \chi_3 e^{ik_3 \zeta + ik_\xi \xi + ik_\eta \eta} dk_\xi dk_\eta + \\ &+ i\mu \int_{-\infty}^{+\infty} (k_\eta^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^3 + k_\eta^2 + k_\eta \varepsilon_1^2) (A e^{ik_1 \zeta} + B e^{ik_2 \zeta}) e^{ik_\xi \xi + ik_\eta \eta} dk_\xi dk_\eta.\end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления компонент тензора вязких напряжений могут быть выполнены численными методами.

Выражения для полных сил, учитывающие затухание в пограничных слоях и перенос энергии волнами, определяются интегралами от компонент тензора вязких напряжений и также не приводятся к известным функциям. Практический интерес представляет расчет возмущений давления и плотности, которые измеряются независимыми методами.

4. Расчет возмущений давления и плотности в жидкости. Проводимые расчеты основаны на результатах асимптотических вычислений параметров пучков трехмерных внутренних волн и двух пограничных слоев, приведенных в [10]. Возмущения формируются фрикционным излучателем прямоугольной формы со сторонами a , b , ориентированными вдоль осей координат ξ , η , который осциллирует вдоль оси $O\xi$ со скоростью $\mathbf{u} = u_0 \theta(a/2 - |\xi|) \theta(b/2 - |\eta|) \mathbf{e}_\xi$. В приближении малой вязкости и малости размеров источника по сравнению с вязким волновым масштабом $L_\nu = (\nu \Lambda / N)^{1/3}$ ($a \ll L_\nu$, $b \ll L_\nu$) вычисляются возмущения давления в окрестности источника:

$$P_1^b \approx -i \rho_0 \omega u_0 \delta_\varphi \exp \left(\frac{i-1}{\delta_\varphi} + \frac{i\pi}{4} \right), \quad (7)$$

а также на больших удалениях ($q \gg a$, $q \gg b$):

$$P_1^w \approx \frac{\rho_0 \omega u_0 a b \delta_N}{2\pi^{3/2} \sqrt{|\mu|}} \sin \theta \left[\cos \varphi \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \cos \theta \sin \varphi \right] G \left(\frac{1}{2}, p, q \right). \quad (8)$$

Функция $G(n, p, q)$ определяется сверткой решения для точечного излучателя с показательной функцией:

$$G(n, p, q) = \frac{1}{\sqrt{p \sin \theta + q \cos \theta}} \int_0^{+\infty} dk_p k_p^n \exp \left(ik_p p - \frac{k_p^3 \delta_N^2 q}{2 \cos \theta} \right). \quad (9)$$

В формуле (9) интеграл является аналитической функцией вязкости, поскольку второй член в показателе экспоненты равномерно обращается в нуль при стремлении вязкости к нулю.

Аналогичные выражения анализировались ранее при изучении внутренних волн в вязкой жидкости [1] (см. также [2, формула (6.6) и прил. В]), однако показатель n при этом оставался неизвестным. Поскольку при моделировании излучателя мультиполями фактически используются свойства только регулярной компоненты решения, рассчитанную

картину течения невозможно согласовать с реальной, содержащей пограничные слои (и сингулярные по вязкости компоненты в решениях уравнений движения). Из вида функции $G(n, p, q)$ следует, что число n не является целым, т. е. решение системы (2) в общем случае нельзя представить в виде разложения по мультиполям.

На оси пучка ($p = 0$) на больших расстояниях от источника волн выражение (9) значительно упрощается:

$$G(n, 0, q) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{q \cos \theta}} \left(\frac{2 \cos \theta}{q \delta_N^2} \right)^{(n+1)/3} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right).$$

Максимальное давление на оси пучка при $\alpha = -\pi/4$ составляет

$$|P_1^w|_{\max} = \frac{\rho_0 \omega u_0 a b \sin \theta \sin(\theta - \varphi)}{6\sqrt{2} q \pi \sqrt{|\mu|}}.$$

Расчеты выражений (7), (8) проведены в линейном приближении, которое справедливо при выполнении неравенств $u_0 l_1 / \nu \ll 1$ ($l_1 = ab/q$ — отношение площади излучателя к расстоянию от источника до точки измерения в области волновых движений) и $u_0 \delta_N / \nu \ll 1$ для пограничных слоев. Приведенные выражения имеют смысл числа Рейнольдса. Масштаб скорости u_0 определяется граничными условиями. Вблизи источника масштаб длины задается универсальным микромасштабом δ_N , а вдали от него — величиной l_1 . Линейное приближение практически всегда выполняется при анализе волновых движений, но может нарушаться вблизи излучающей поверхности, где сдвиговые пограничные слои интенсивно взаимодействуют между собой, порождая волны более высоких гармоник [16] и вихри.

Если часть поверхности совершает колебания вдоль оси ζ по нормали к плоскости источника (поршневой излучатель) со скоростью

$$\mathbf{u} = u_0 \theta (a/2 - |\xi|) \theta (b/2 - |\eta|) \mathbf{e}_\zeta,$$

то асимптотические выражения для давления в волновом пучке имеют вид

$$P_2^w \approx -\frac{\rho_0 \omega u_0 a b}{\pi} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\sin \theta}{\pi}} G\left(-\frac{1}{2}, p, q\right),$$

$$P_2^b \approx \frac{i+1}{\sqrt{|\mu|}} i \rho_0 \omega u_0 \delta_N \frac{\sqrt{\sin \theta} \operatorname{ctg} \varphi}{\pi^2} W_2,$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\eta^2 \cos \varphi + k_1^{(0)} \sigma}{k_\xi k_\eta} W_\delta(k_\xi, k_\eta) dk_\xi dk_\eta,$$

$$W_\delta(k_\xi, k_\eta) = \frac{\sin(k_\xi a/2) \sin(k_\eta b/2)}{k_\eta^2 \cos \varphi - k_\xi \sigma} \exp\left[ik_\xi \left(\xi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\mu} \zeta\right) + ik_\eta \eta\right],$$

$$\sigma = (k_\xi \cos \varphi \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \varphi \sqrt{k_\xi^2 \sin^2 \theta - k_\eta^2 \mu}) / \mu,$$

$$\mu = \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta, \quad k_1^{(0)} = (k_\xi \sin 2\varphi + 2 \cos \theta \sqrt{k_\xi^2 \sin^2 \theta - \mu k_\eta^2}) / (2\mu).$$

Максимальное давление на оси пучка ($p = 0$) равно

$$|P_2^w|_{\max} = \frac{\rho_0 \omega u_0 a b}{3\pi \sqrt{\pi}} \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 \theta \sin \theta}{q^4 \delta_N^2} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right).$$

В этом случае меняется структура неравенства, определяющего условие применимости линейного приближения. Для волновой компоненты оно принимает вид $u_0 l_2 / \nu \ll 1$. Данное

условие включает комбинационный масштаб длины $l_2 = ab/(q^{2/3}\delta_N^{1/3})$, в который теперь входят четыре линейных масштаба задачи (размеры излучателя, расстояние до точки наблюдения, универсальный микромасштаб). Изменение структуры неравенства обусловлено спецификой механизма излучения волн, обеспечивающего более высокую эффективность поршневого излучателя по сравнению с фрикционным. Условие линеаризации уравнений вблизи излучателя остается неизменным: $u_0\delta_N/\nu \ll 1$.

При совершаемых вдоль оси ξ продольных линейных колебаниях эллипса с полуосями a, b , расположенными вдоль осей ξ, η соответственно, выражение (6) принимает вид

$$U_\xi = \frac{u_0 ab}{2\pi\sqrt{k_\xi^2 a^2 + k_\eta^2 b^2}} J_1(\sqrt{k_\xi^2 a^2 + k_\eta^2 b^2}). \quad (10)$$

В частном случае, когда излучателем является диск ($a = b = R$), из (10) следует

$$U_\xi = \frac{u_0 R}{2\pi\sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}} J_1(R\sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}).$$

Выражения для эффективности излучения волн диском, осциллирующим вдоль плоскости, а следовательно, и для распределения давления незначительно отличаются от (7), (8):

$$P_3^w \approx \frac{\rho_0 \omega u_0 R^2 \delta_N}{2\sqrt{\pi|\mu|}} \sin \theta \left[\cos \varphi \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \cos \theta \sin \varphi \right] G\left(\frac{1}{2}, p, q\right),$$

$$P_3^b \approx \rho_0 \omega u_0 R \frac{1-i}{\sqrt{|\mu|}} \sqrt{\sin \theta} \exp\left(\frac{i-1}{\delta_\varphi}\right) \begin{cases} 1/R, & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq R, \\ 0, & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > R. \end{cases}$$

Следует отметить, что в используемом приближении на неподвижной части плоскости излучателя ($\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > R$) в асимптотических выражениях давление равно нулю.

Максимальное давление на оси пучка при $\alpha = -\pi/4$ определяется выражением

$$|P_3^w|_{\max} = \frac{\rho_0 \omega u_0 R^2 \sin \theta \sin(\theta - \varphi)}{6\sqrt{2} q \sqrt{|\mu|}}.$$

В условие пренебрежения конвективным членом в дальнем поле $u_0 l_3/\nu \ll 1$ теперь входит новый характерный масштаб длины $l_3 = R^2/q$. Условие линеаризации вблизи источника остается прежним: $u_0\delta_N/\nu \ll 1$.

При рассмотрении задачи об излучении волн осциллирующим в направлении оси $O\zeta$ эллипсом с полуосями a, b , расположенными вдоль осей ξ, η соответственно, фурье-образ распределения скоростей источника принимает вид

$$U_\zeta = \frac{ab}{2\pi\sqrt{k_\xi^2 a^2 + k_\eta^2 b^2}} J_1(\sqrt{k_\xi^2 a^2 + k_\eta^2 b^2}). \quad (11)$$

В частном случае, когда излучателем является диск ($a = b = R$), из (11) следует

$$U_\zeta = \frac{R}{2\pi\sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}} J_1(R\sqrt{k_\xi^2 + k_\eta^2}),$$

$$P_4^w \approx -\frac{\rho_0 \omega u_0 R^2}{\pi} e^{-i\pi/4} \sqrt{\sin \theta} G\left(-\frac{1}{2}, p, q\right), \quad P_4^b \approx \frac{i+1}{\sqrt{|\mu|}} i \rho_0 \omega u_0 \delta_N \frac{\sqrt{\sin \theta} \operatorname{ctg} \varphi}{\pi^2} W_2.$$

Максимальное давление на оси пучка равно

$$|P_4^w|_{\max} = \frac{\rho_0 \omega u_0 R^2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 \theta \sin \theta}{q^4 \delta_N^2} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right).$$

При этом в неравенстве, определяющем условие линеаризации в волновом пучке, появляется новый характерный масштаб длины $l_4 = R^2/(q^2/3 \delta_N^{1/3})$, отличающийся от l_2 . Условие линеаризации вблизи излучателя остается неизменным.

На практике для получения волн большой амплитуды применяются более сложные конструкции излучателя, части которого движутся в различных направлениях [17]. Такой излучатель моделируется генератором, состоящим из двух одинаковых прямоугольников, сопряженных по стороне a , которые совершают в противофазе колебания вдоль оси ζ . Скорость генератора задается выражением

$$\mathbf{u} = u_0 \theta(a/2 - |\xi|) [\theta(\eta) \theta(b/2 - \eta) - \theta(-\eta) \theta(b/2 + \eta)] \mathbf{e}_\zeta.$$

Составной источник более соответствует структуре волнового поля, создает большие волновые возмущения в ближнем поле и характеризуется следующим распределением давления:

$$P_5^w \approx -\frac{\rho_0 \omega u_0 a b}{2\pi^{3/2}} e^{i\pi/4} \sin^{3/2} \theta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) G\left(\frac{1}{2}, p, q\right),$$

$$P_5^b \approx -i\rho_0 \omega u_0 \delta_N \frac{\sqrt{\sin \theta} \operatorname{ctg} \varphi}{\pi^2} \exp\left(\frac{i-1}{\delta_\varphi}\right) W_4,$$

$$W_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\eta^2 \sin \varphi + k_1^{(0)} \sigma}{k_\xi k_\eta} V_\delta dk_\xi dk_\eta,$$

$$V_\delta(k_\xi, k_\eta) = \frac{\sin(k_\xi a/2) \sin(k_\eta b/2)}{k_\eta^2 \cos \varphi - k_\xi \sigma} \exp\left[ik_\xi \xi + ik_\eta \eta + \frac{i-1}{4} \delta_\nu \zeta(k_\xi^2 + k_\eta^2)\right].$$

Максимальное давление на оси пучка при $\alpha = \pi/4$ определяется выражением

$$|P_5^w|_{\max} = \frac{\sqrt{2} \rho_0 \omega u_0 a b^2 \sin^{3/2} \theta}{12q \delta_N^2}.$$

В условие линеаризации $u_0 l_5/\nu \ll 1$ в волновом пучке входит масштаб $l_5 = ab^2/(q\delta_N)$. Вблизи источника его вид остается прежним.

Результаты вычислений возмущения плотности могут быть представлены в обобщенном виде для всех исследованных типов источников:

$$\rho \approx \frac{2i\rho_0}{\omega \Lambda} A_m^w \sin^2 \theta M_m(p, q), \quad m = 1, \dots, 5,$$

$$M_m(n, p, q) = f(\alpha, \theta, \varphi) G(n, p, q), \quad f = \cos \varphi \sin \theta - \sin(\pi/4 - \alpha) \sin \varphi \cos \theta.$$

Выражения для возмущений плотности в волне в сопутствующей системе координат (p, q) отличаются от выражений для волновых компонент скоростей (см. [18]) только множителем $i\rho_0/(\omega \Lambda)$. Приведенные в таблице соответствующие выражения имеют простой физический смысл. В коэффициент A_m^w входят параметры источника (размеры и угловое положение), масштабы, индуцирующие механизм генерации (δ_N для фрикционного излучателя), и функции углового положения луча. Данные выражения неприменимы при малых частотах осцилляций, когда не работают методы построения неравномерных асимптотик. Функция f определяется угловыми характеристиками задачи, показатель n — индекс мультипольности источника.

Волновые компоненты плотности
для различных излучателей в приближении малой вязкости

Тип источника	A_m^w	$f(\alpha, \theta, \varphi)$	n
Фрикционный (прямоугольник)	$\frac{i}{4} \frac{u_0 ab \delta_N}{\sqrt{\pi^3 \mu }}$	f	$3/2$
Поршневой (прямоугольник)	$\frac{1-i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{u_0 ab}{\sqrt{\sin \theta}}$	1	$1/2$
Составной (прямоугольник)	$\frac{1-i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{u_0 ab^2 \sqrt{\sin \theta}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$	$3/2$
Фрикционный (диск)	$\frac{i}{4} \frac{u_0 R^2}{\sqrt{\pi \mu }} \delta_N$	f	$3/2$
Поршневой (диск)	$\frac{1-i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{u_0 \pi R^2}{\sqrt{2 \sin \theta}}$	1	$1/2$

Компоненты тензора вязких напряжений в волновых пучках на больших расстояниях от источника ($q \gg a, q \gg b$) в приближении малой вязкости имеют вид

$$\sigma_{xx} = -p_m^w - 2i\rho_0\nu A_m^w \cos^2 \alpha \sin 2\theta \cos \alpha Q_m(n, p, q),$$

$$\sigma_{yy} = -p_m^w + 4i\rho_0\nu A_m^w \cos \alpha \sin \alpha \sin \theta \cos^2 \theta Q_m(n, p, q),$$

$$\sigma_{zz} = -p_m^w - 4i\rho_0\nu A_m^w \cos \theta \cos^2 \theta Q_m(n, p, q),$$

$$Q_m(n, p, q) = f(\alpha, \theta, \varphi) G(n+1, p, q).$$

На оси пучка в общем случае компоненты тензора вязких напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma^{(m)} \approx -\rho_0 A_m^w \frac{f(\alpha, \theta, \varphi)}{3\sqrt{q \cos \theta}} \left(\frac{2 \cos \theta}{q \delta_N^2} \right)^{(n+1)/3} \left[\omega \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) \sin \theta - \nu \left(\frac{2 \cos \theta}{q \delta_N^2} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{n+2}{3}\right) \right],$$

индекс $m = 1$ соответствует фрикционному источнику (прямоугольнику), $m = 2$ — поршневому (прямоугольнику), $m = 3$ — составному (прямоугольнику), $m = 4$ — фрикционному (диску), $m = 5$ — поршневому источнику (диску). Значения входящих в данную формулу величин A_m^w и $f(\alpha, \theta, \varphi)$ для различных типов источника приведены в таблице. Показатель мультипольности n в данном случае принимает следующие значения: для фрикционного источника (прямоугольника, диска) и составного источника (прямоугольника) $n = 5/2$, для поршневого источника (прямоугольника, диска) $n = 3/2$.

Анализ выражений показывает, что давление, плотность и компоненты тензора вязких напряжений пропорциональны площади источника волн, определяются геометрией задачи (множитель $f(\alpha, \theta, \varphi)$), расстоянием от источника q и универсальным микромасштабом δ_N^β , где величина β зависит от типа источника.

В таблице приведены также значения коэффициентов A_m^w , $f(\alpha, \theta, \varphi)$ и показателя мультипольности n в выражениях для вертикальной компоненты силы, действующей на излучатель:

$$F_z \approx i\rho_0\omega \sin\theta \sin^2\varphi \sin\alpha f(\alpha, \theta, \varphi) A_m^w \int_{-a/2}^{a/2} dp \int_{-b/2}^{b/2} dq G(n+1, p, q), \quad m = 1, \dots, 5.$$

Полученные выражения непригодны при малых частотах осцилляций, когда нарушаются условия применимости использованного асимптотического метода расчета.

Заключение. В работе развита методика построения решения полностью линеаризованной задачи о генерации компактными источниками трехмерных внутренних волн в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. Полученное решение является полным, удовлетворяет точным граничным условиям и описывает структуру волнового конуса, а также периодических пограничных слоев двух типов.

Волны и пограничные слои образуют единую систему периодических движений в непрерывно стратифицированной жидкости. Несмотря на различие масштабов, волны и пограничные слои формируются и исчезают одновременно. Свойства волнового пучка зависят от формы и направления линии осцилляций излучателя. Расчеты поля плотности, давления, тензора вязких напряжений и вертикальной компоненты силы выполнены для нескольких типов излучателей (фрикционных, поршневых и составных) прямоугольной или эллиптической формы и приведены в форме квадратур, удобных для аналитических и численных оценок. Сравнительный анализ эффективности различных излучателей проведен в [17].

Для некоторых случаев, когда в силу симметрии задачи (излучателем является горизонтальный диск) выражения для вертикальной компоненты силы упрощаются, структура образующихся волновых пучков визуализирована в [18].

Более полный учет молекулярных эффектов приводит к расширению системы (1) за счет введения уравнений сохранения тепловой энергии и вещества. При этом в поле течений возникают специфические пограничные слои, индуцированные диффузией на неровностях рельефа ограничивающей поверхности [19], и дополнительные пары диффузионных и температурных пограничных слоев [20], влияние которых также необходимо учитывать при анализе динамики жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лайтхилл Дж.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
2. **Voisin В.** Limit states of internal waves beams // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 243–293.
3. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. М., 1986. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 282).
4. **Hurley D. G., Keady G. J.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. 2. Approximate viscous solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 119–138.
5. **Hurley D. G., Hood M. J.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. 3. Angular oscillations and comparison of theory with recent experimental observation // J. Fluid Mech. 2001. V. 433. P. 61–75.
6. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 31–40.

7. **Ильиных Ю. С., Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Сравнение точного решения одной задачи возбуждения периодических внутренних волн с экспериментом // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 649–655.
8. **Stokes G. G.** On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Camb. Philos. 1851. V. 9, pt 2. P. 8–106.
9. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Нелинейная генерация периодических внутренних волн пограничным течением на вращающемся осесимметричном теле // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 5. С. 636–639.
10. **Васильев А. Ю., Чашечкин Ю. Д.** Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 3. С. 442–452.
11. **Holm D. D., Kimura Y.** Zero-helicity Lagrangian kinematics of three-dimensional advection // Phys. Fluids. 1991. V. A3, N 5. P. 1333–1338.
12. **Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д.** Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 52–61.
13. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
14. **Чашечкин Ю. Д., Кистович А. В.** Классификация трехмерных периодических течений в жидкости // Докл. РАН. 2004. Т. 395, № 1. С. 55–58.
15. **Васильев А. Ю., Чашечкин Ю. Д.** Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн компактными источниками // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 621–625.
16. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. Т. 6.
17. **McEwan A. D.** Interaction between internal gravity waves and their traumatic effect on continuous stratification // Boundary — Layer Meteorol. 1973. N 5. P. 159–175.
18. **Чашечкин Ю. Д., Васильев А. Ю., Бардаков Р. Н.** Тонкая структура пучков трехмерных периодических внутренних волн // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 3. С. 404–407.
19. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 4. С. 50–56.
20. **Чашечкин Ю. Д., Кистович А. В.** Расчет структуры периодических течений в непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 776–780.

*Поступила в редакцию 15/II 2005 г.,
в окончательном варианте — 18/VIII 2005 г.*
