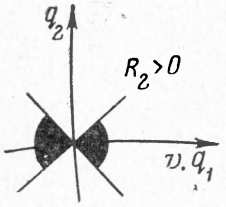
ОБ УСЛОВИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ МОЩНОСТИ РАССЕИВАНИЯ В ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О. Д. Григорьев (*Новосибирск*)

В заметке рассматривается критерий неотрицательности скорости диссипации энергии и устанавливаются возможные конечные соотношения между направлениями вектора скорости и большего главного напряжения для плоской деформации жестко-пластического тела.

Как известно [1], компоненты скорости деформации в криволинейных координатах, за которые приняты линии тока и ортогональные к ним траектории, имеют вид



Фиг. 1

$$\xi_{11} = -\xi_{22} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}, \qquad \xi_{12} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{v}{H_1} \tag{1}$$

$$v = \frac{f(q_2)}{H_2} \tag{2}$$

При этом условие коаксиальности главных осей напряжений и скоростей деформации имеет вид

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{H_1}{2\,\partial H_2/\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\frac{H_1H_2}{f(q_2)} \tag{3}$$

Здесь q_1, q_2 — указанные выше криволинейные координаты; H_1, H_2 — коэффициенты Ламе; ξ_{ij} — компоненты скорости деформации в принятой системе координат; v — модуль вектора скорости; $f(q_2)$ — некоторая функция своего аргумента, удовлетворяющая как граничным условиям для скоростей, так и условиям теоремы совместности полей скоростей и напряжений [1]; β — угол между вектором скорости и направлением большего главного напряжения.

Преобразуем уравнения для компонентов скорости деформации с помощью (2), (3) к виду

$$\xi_{11} = -\xi_{22} = \frac{v}{R_2}, \qquad \xi_{12} = \frac{2\operatorname{tg}2\beta}{R_2}v, \qquad \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} \tag{4}$$

Здесь R_2 — радиус кривизны ортогональных к линиям тока траекторий.

Критерий неотрицательности скорости диссипации энергии имеет вид

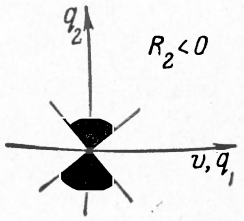
$$\sigma_{11}\xi_{11} + \sigma_{22}\xi_{22} + \sigma_{12}\xi_{12} \geqslant 0 \tag{5}$$

где напряжения удовлетворяют известным соотношениям

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\end{matrix}\right\} = \sigma \pm k\cos 2\beta, \qquad \sigma_{12} = k\sin 2\beta, \qquad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{6}$$

Пусть $R_2 \neq \infty$, тогда в силу (4), (6) указанный критерий можно привести к виду

$$\frac{1}{\cos 2\beta}\frac{1}{R_2} \geqslant 0 \tag{7}$$



Фиг. 2

При этом учитывается, что направление скорости совпадает с направлением возрастания параметра q_1 и координатные линии образуют правую систему координат. Неравенству (7) можно дать следующую простую геометрическую интерпретацию.

Пусть $R_2 > 0$, тогда областью изменения угла β согласно (7) будет

$$-45° < \beta < 45°, \qquad 135° < \beta < 225° \tag{8}$$

Соответствующая система криволинейных координат с заштрихованной областью изменения угла β изображена на фиг. 1.

Пусть теперь, наоборот, $R_2 < 0$, тогда из (7) получим

$$45° < \beta < 135°, \qquad 225° < \beta < 315° \tag{9}$$

Соответствующая система криволинейных координат с заштрихованной областью изменения угла β изображена на фиг. 2.

В случае, когда $R_2 = \infty$, ортогональные к линиям тока траектории суть прямые. При этом линии тока совпадают с линиями скольжения или среда движется, как твердое тело [1]. Проверка рассматриваемого критерия не вызывает здесь затруднений. Случай же, когда $\beta = 0$, $0 \pm \pi/2$, легко сводится к вышеизложенному.

Отметим, то предложенные недавно В. Прагером и А. Грином [2] методы проверки критерия (5) используют отображение физической плоскости на план скоростей и являются, по-видимому, менее удобными.

Поступила 21 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Физматгиз, 1958.