

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рыков Ю. А., Стриженов Д. С. О взаимодействии атомов с поверхностью твердого тела.— ПМТФ, 1967, № 4.
2. Tasi J. Dynamic initial slip in a linear chain.— Phys. Rev., 1972, Ser. B, vol. 6, p. 4851.
3. Пярриуу А. А. Взаимодействие молекул газа с поверхностями. М.: Наука, 1974.
4. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975.
5. Долгов А. С. Нестационарные процессы в одномерной цепи связанных ангармонических осцилляторов.— ПМТФ, 1975, № 2.

УДК 534.213

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА ПУСТЫХ СКЕЛЕТОВ ЗЕРНИСТЫХ КОЛЛЕКТОРОВ

*Б. П. Сибиряков*

*(Новосибирск)*

До последнего времени задачи распространения упругих волн в зернистых скелетах не решались в строгой постановке. Это связано с трудностями учета граничных условий на всей сложной поверхности пор. Многие исследователи (Маккензи, Токсоз и др.) пытались обойти эту трудность (в случае изолированных пор), решая точную задачу для отдельного включения и полагая, что поры не влияют друг на друга [1]. Такая постановка задачи дает правильные результаты лишь при очень малой пористости. В случае произвольной (не малой) пористости эти решения хотя и приводят к падению коэффициентов Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ , однако вследствие уменьшения плотности породы падение скоростей оказывается очень слабым, в частности, скорости продольных волн в пустом скелете оказываются выше, чем в водонасыщенном при сферической форме пор, что противоречит опыту [2]. Другая группа исследователей, связанная в основном с изучением композиционных материалов, разрабатывала приближенные методы построения так называемой «вилки» Хашина — Штрикмана [3, 4], где вместо точного решения ищутся допустимые границы изменения  $\lambda$  и  $\mu$ . Если «вилка» достаточно узкая, то значения  $\lambda$  и  $\mu$  композита являются практически достоверными. Ширина «вилки» увеличивается с увеличением перепада упругих свойств между скелетом и флюидом, и для реальных коллекторов оценки типа Хашина и Штрикмана также оказываются несостоятельными из-за больших перепадов по  $\lambda$  и  $\mu$  (если поры заполнены газом) или по  $\mu$  (если поры заполнены жидкостью). В [5, 6] предприняты попытки строгих расчетов упругих свойств пустых скелетов для периодических структур. Такие расчеты возможно провести потому, что граничные условия в этом случае ставятся на границе одного-единственного периода, а затем эти условия периодически повторяются на микроструктуре. При этом задача сводится к определению средних тензоров напряжений и деформаций на каком-либо периоде структуры. Алгоритм получения точного решения такой задачи указан в [6], а сравнение данных теории и опыта на двумерных средах показало их весьма хорошее согласие.

Однако периодические структуры — это частный случай микроструктур. В действительности периодически повторяются лишь некоторые коллективные интегральные характеристики микроструктур, а не их индивидуальные свойства. К тому же практически невозможно указать микроструктуру достаточно малого периода, если последняя сложена частицами разного размера, как это имеет место в терригенных коллекторах. И, наконец, все периодические структуры образуют анизотропные тела. Получить изотропное, статистически однородное тело можно лишь на неперидических, достаточно случайно организованных микроструктурах. Таким образом, необходим новый подход для определения средних значений  $\lambda$  и  $\mu$  в микрогетодородных, статистически изотропных средах.

В основу этого подхода можно положить следующие соображения. Можно поставить задачу о строгом решении уравнений равновесия на отдельном зерне, обладающем каким-то числом площадок контакта со своими соседями. Эта задача может быть решена, если усилия на контактах заданы. Однако можно положить эти нагрузки неопределенными, считая, что центр тяжести зерна деформируется, как в плоской продольной волне, т. е. в центре зерна  $e_{xx} = e_{yy} = 0$ ,  $e_{zz} \neq 0$ ,  $\sigma_z = 1$ . Если считать напряжения на зерне уравновешенными (что разумно, так как радиус зерна во много раз меньше длины волны), а энергию деформирования положить минимальной, то задача становится вполне определенной и нагрузки при указанных условиях будут вычислены как функции материала зерна и структуры порового пространства. По этим нагрузкам можно определить средний тензор деформации в центре зерна и средний тензор напряжений. Соотношение их дает средние значения параметров Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  на любом зерне, а следовательно, во всей микроструктуре.

Рассматриваются ситуации, при которых длина волны во много раз превышает радиус частиц  $r_0$ , т. е.  $l \gg r_0$ . В этом случае инерционные силы весьма малы в сравнении с силами, созданными внутренними напряжениями.

Поясним сказанное выкладками. Объемные силы, созданные напряжениями, т. е.  $\text{div } \sigma_{ik}$  порядка  $\sigma_{ik}/r_0$ , существенно меняются на расстояниях порядка размеров зерна, так что  $\text{div } \sigma_{ik} \sim \rho V_p^2 \theta / r_0$ , где  $\theta$  — объемная деформация. В то же время инерционные силы  $\rho \ddot{u}_i \sim \rho u_i / T^2$ . Таким образом, выполняется условие  $\rho V_p^2 \theta / r_0 \gg \rho u_i / T^2$ , где  $T$  — период волны. Поскольку  $TV_p \sim l$  (длина волны), а  $u/l \sim \theta$ , получаем  $\theta/r_0 \gg \theta/l$ . Это неравенство выполнено в силу условия  $l \gg r_0$ . Отсюда следует неравенство  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k \gg \rho \ddot{u}_i$ . Малость инерционных сил в сравнении с силами, созданными внутренними напряжениями, позволяет вместо уравнения движения интегрировать уравнение равновесия, т. е. для определения полей напряжений и деформаций пренебречь волновыми процессами внутри зерна.

Итак, требуется проинтегрировать уравнение равновесия  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0$  во внутренней области зерна  $V_0$ , если на площадках контактов заданы нагрузки  $f_i$ , а на остальной части поверхности зерна нагрузки отсутствуют. Решение поставленной задачи с неопределенными пока нагрузками  $f_i$ , однако с заданной системой площадок будем строить методами граничных интегральных уравнений, так что вектор перемещений  $u_k(x)$  представляется в виде  $u_k(x) = \int \varphi_i(y) \Gamma_{ik}(x, y) ds_y$ , а  $\varphi_k(x)$  удовлетворяют системе интегральных уравнений [7]:

$$(1) \quad \varphi_k(x) + 2 \int \Gamma_{ik}^{(1)}(x, y) \varphi_i(y) ds_y = f_k(x).$$

Система интегральных уравнений (1) сингулярна в силу неинтегрируемой особенности тензора  $\Gamma_{ik}^{(1)}$  при совпадении точек  $x$  и  $y$  между собой. Для устранения этой особенности воспользуемся известным приемом [7], основанным на использовании сопряженного к оператору  $\Gamma_{ik}^{(1)}$  оператора  $\Gamma_{ik}^{(1,2)}(x, y)$ :

$$(2) \quad \varphi_k(x) + \int_s [\Gamma_{ik}^{(1)}(x, y) \varphi_i(y) + \Gamma_{ik}^{(1,2)}(x, y) \varphi_i(x)] ds_y = \frac{f_k(x)}{2}.$$

Система (2) уже не имеет особенностей при  $x \rightarrow y$  и может быть решена методом последовательных приближений. При реализации метода последовательных приближений положим  $(1/2)f_k(x) = a_{km}\Omega(x_m)$ , где  $a_{km}$  — постоянные коэффициенты, а  $\Omega(x)$  — характеристическая функция площадки  $ds$ , внутри которой заключена точка  $x$ , т. е.  $\Omega(x) = 0$ , если  $x \notin ds$ , и  $\Omega(x) = 1$ , если  $x \in ds$ . В этом случае поле  $\varphi_k(x)$  представляется суммой

$$\varphi_k(x) = \varphi_k^{(0)}(x) + \varphi_k^{(1)}(x) + \dots + \varphi_k^{(n)}(x) + \dots, \quad \varphi_k^{(0)} = \frac{f_k}{2},$$

причем между функциями разных номеров существуют рекуррентные соотношения

$$(3) \quad -\varphi_k^{(n)}(x) = \int_s [\Gamma_{ik}^{(1)}(x, y) \varphi_i^{(n-1)}(y) + \Gamma_{ik}^{(1,2)}(x, y) \varphi_i^{(n-1)}(x)] ds_y.$$

Тем самым возникает линейная связь между перемещениями в некоторой точке  $x_m$  и нагрузками  $a_{in}$  во всех остальных точках (в том числе в точке  $x_m$ ). Эта связь выражена через  $3n$  неопределенных постоянных и должна быть дополнена некоторыми условиями. Чтобы устранить неопределенность в отношении заданных нагрузок  $a_{km}$ , поступим следующим образом. Очевидно, реальный процесс деформирования таков, что его потенциаль-

ная энергия является минимальной. Действительно, это утверждение должно относиться к объему, содержащему множество частиц. В принципе можно было бы провести ту же схему рассуждений и расчетов для нескольких зерен и минимизировать их потенциальную энергию. Для большого количества зерен этот прием мог бы привести к решению проблемы равновесия зернистых тел. Данная работа не претендует на решение этой большой проблемы. Однако, по-видимому, разумно начинать подобные исследования с объема  $dV$ , содержащего лишь одно типичное в некотором смысле зерно. Потенциальная энергия есть произведение нагрузок на перемещения, которые связаны с нагрузками формулами (2), так что  $E = \int_s P_i u_i ds$ . Так как перемещения линейно связаны с нагрузками, то энергия деформирования есть квадратичная функция коэффициентов  $a_{km}$ :

$$(4) \quad E = u_{hm} a_{km} = a_{ij} a_{km} Q_{ik}^j(x_m, x_j),$$

$$\text{где} \quad Q_{ik}^j(x_m, x_j) = P_{ik}^j(x_m, x_j) + G_{il}(x_j) \Gamma_{kl}(x_m, x_j) \Delta s.$$

В формуле (4) опущен знак суммирования по индексам  $i, j, k, m$ . Функции  $P_{ik}^j, G_{il}$  связаны с реализацией последовательных приближений уравнения (3),  $\Gamma_{kl}(x_m, x_j)$  — тензор Грина уравнения упругого равновесия. Если просуммировать по индексу  $m$ , пробегающему все точки площадок контактов, то получим

$$(5) \quad E = a_{ij} a_{k1} P_{ik}^{j \neq 1}(x_1, x_j) + a_{i1} a_{k1} P_{ik}(x_1) + a_{ij} a_{k2} P_{ik}^{j \neq 2}(x_2, x_j) + \\ + a_{i2} a_{k2} P_{ik}(x_2) + \dots + a_{ij} a_{kn} P_{ik}^{j \neq n}(x_n, x_j) + a_{in} a_{kn} P_{ik}(x_n).$$

В выражении (5) символом  $P_{ik}(x_s)$  обозначена величина  $G_{il}(x_s) \Gamma_{lk}(x_m, x_s) \Delta s = G_{il}(x_s) M_{lk}(x_s)$ , причем  $M_{lk}(x_s)$  определяется по формуле  $M_{lk}(x_s) = \lim_{m \rightarrow s} \Gamma_{lk}(x_m, x_s)$ . Что касается условий, при которых минимизируется

выражение (5), то к ним следует отнести условия равновесия зерна в целом (а не только малых объемов в его внутренней части). Условия равновесия зерна в целом требуют равенства нулю как вектора поверхностных нагрузок, так и антисимметричного тензора главного момента зерна:

$$(6) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} = 0, \quad k = 1, 2, 3;$$

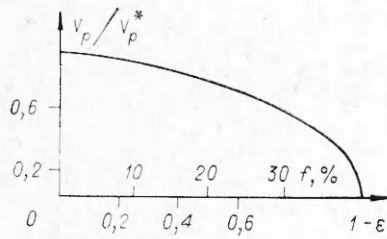
$$(7) \quad \sum_{j=1}^n (y_j a_{j3} - z_j a_{j2}) = 0, \quad \sum_{j=1}^n (z_j a_{j1} - x_j a_{j3}) = 0, \quad \sum_{j=1}^n (x_j a_{j2} - y_j a_{j1}) = 0.$$

В формуле (7)  $x, y, z$  есть декартовы координаты элементов контакта. Три условия (6) обращают в нуль вектор нагрузок, а условия (7) зануляют момент вращения зерна. Далее будем полагать, что флуктуации поля в центре зерна отсутствуют, т. е. центр зерна деформируется, как в плоской продольной волне, т. е. в центре зерна

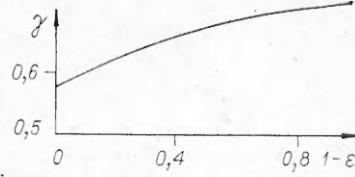
$$(8) \quad e_{11} = e_{22} = e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{33} = e,$$

деформация  $e$  отлична от нуля, например,  $e = 1$ . Тогда к шести условиям (6), (7) добавляются шесть условий, наложенных на деформации. Эти условия также представляют собой шесть линейных уравнений относительно нагрузок, что видно из формулы (4). Двенадцати условий (6)—(8) в совокупности с требованием минимума энергии деформирования достаточно для определения неизвестных нагрузок на площадках контактов при падении плоской в среднем продольной волны. Метод Лагранжа, как известно, сводится к решению системы уравнений размерности  $3n + p$ , состоящей из выражений типа

$$(9) \quad \frac{\partial E}{\partial a_s} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_s} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_s} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \Phi_p}{\partial a_s} = 0.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

К уравнениям (9) добавляются  $p$  (в нашем случае 12) уравнений связи (7)–(9).

Поскольку  $E$  есть квадратичная функция переменных  $a_s$ , а уравнения связи представляют собой линейные соотношения, вся задача в целом сводится к решению линейной системы размерностью  $3n + p$ . Выражение  $\partial E/\partial a_{sk}$  имеет вид

$$(10) \quad \frac{\partial E}{\partial a_{ks}} = \sum_{i=1}^3 a_{is} (1 + \delta_{ik}) P_{ih}(x_s) + \sum_{i,j \neq s} a_{ij} H_{ih}^j(x_s, x_j).$$

В выражении (10)  $ks = 1, 2, \dots, 3n$ ;  $i, k = 1, 2, 3$ .

Зная нагрузки  $P_i$ , можно определить средний тензор напряжений в центре зерна по формуле [8]:

$$(11) \quad \bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \int_s [P_i x_k + P_k x_i] ds,$$

где  $x_i, x_k$  — декартовы координаты нагрузок;  $V$  — объем зерна. Соотношения между вычисленными деформациями и средними напряжениями дают среднее значение коэффициентов Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  на всей структуре. Поскольку интегрирование в формуле (11) распространено лишь на область контактов  $S\epsilon$ , где  $\epsilon$  есть доля площади контактов по отношению ко всей поверхности зерна, то очевидно, что средний тензор напряжений будет зависеть от величины  $\epsilon$ . А так как величина  $\epsilon$  выражается через  $\eta = \sigma_0 r_0 / 3$  ( $\sigma_0 r_0$  — произведение удельной поверхности на средний размер зерна) в виде  $1 - \epsilon = \eta / (1 - f)$ , где  $f$  — пористость, то средние значения  $\lambda$  и  $\mu$  на структуре будут определяться, по крайней мере, двумя геометрическими параметрами — пористостью  $f$  и произведением удельной поверхности на средний размер зерна  $\eta$ . Доказывается, что  $0 \leq \eta \leq 1 - f$ . Расчеты, проведенные для зерна с восемью одинаковыми, произвольно расположенными площадками контактов при различных значениях пористости и удельной поверхности пор, показали, что скорости волн действительно зависят, по крайней мере, от двух геометрических параметров. Площадки контактов разбивались на элементарные. В пределах одного элемента нагрузки полагались постоянными. В практических расчетах использовалось зерно со сферической формой свободной части поверхности и круговыми площадками контактов (граничные условия удовлетворялись в 720 точках поверхности зерна). В опытах на искусственных моделях зернистых сред удалось получить образцы одинаковой пористости, но разной удельной поверхности. При больших значениях  $\eta$  (пористость одна и та же) скорости продольных волн падают, а отношение  $\gamma = V_s/V_p$  возрастает в соответствии с данными расчетов. На фиг 1, 2 приведены данные расчетов скоростей  $V_p$  и отношения  $\gamma = V_s/V_p$  для искусственных зернистых сред в зависимости от  $1 - \epsilon$ , т. е. от  $f$  и  $\eta$ . Сравнение с данными опытов хорошее. При больших значениях  $\eta$  коэффициент Пуассона стремится к нулю и может принимать отрицательные значения. Поскольку плотность упругой энергии в центре зерна обязана лишь объемной деформации  $e_{33}$ , то она соответствует крупномасштабному полю. В других точках зерна, очевидно, возникнут касательные напряжения и

деформации. При этом флуктуационное поле будет представляться в виде интеграла по объему зерна:

$$\bar{E} = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV,$$

где  $i, j$  принимают все значения, за исключением значения  $\sigma_{33} \varepsilon_{33}$ , которое определяет энергию среднего крупномасштабного поля, т. е.  $\bar{E} = \int_V \sigma_{33} \varepsilon_{33} dV$ . Решение поставленной задачи дает возможность вычислить

важный показатель рассеяния  $\alpha = \bar{E}/E$  на отдельном зерне. Таким образом, построена численная процедура определения скоростей и показателей рассеяния продольных и поперечных волн в зернистых средах в зависимости от материала зерна и структуры порового пространства.

Поступила 14 VI 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mackenzie J. K. The elastic constant of a solid spherical holes.— Proc. Phys. Soc. Lond., 1950, ser. B, vol. 63.
2. Kuster G. T., Toksoz M. N. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. Pt I. Theoretical formulations.— Geophysics, 1974, vol. 39, N 5.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials.— J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11.
4. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
5. Сибиряков Б. П. Способ расчета скоростей упругих волн в газонасыщенных периодических микроструктурах.— Геология и геофизика, 1981, № 5.
6. Максимов Л. А., Сибиряков Б. П., Татарников М. А. Теоретико-экспериментальные исследования распространения продольных и поперечных волн в двумерных пористых средах.— Геология и геофизика, 1981, № 11.
7. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.

УДК 532.593

### ИЗМЕРЕНИЕ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ ЗА ПЛОСКОСТЬЮ ОТКОЛА

В. Д. Глузман, Г. И. Канель

(Черноголовка)

Известно [1], что при отражении импульса сжатия от свободной поверхности в образце возникают растягивающие напряжения, которые могут приводить к его разрушению — отколу. Ввиду косвенного характера измерений откольной прочности материалов имеющиеся в литературе данные даже для близких условий нагружения могут различаться на порядок [2]. Регистрация скорости свободной поверхности образцов дает наиболее достоверную информацию о растягивающих напряжениях, действующих в плоскости откола и других сечениях откалывающейся пластины, но не дает сведений о дальнейшем развитии процесса по мере распространения отраженной волны разрежения за плоскость откола в глубь образца. Анализ явления в рамках континуально-кинетической модели разрушаемой среды [3] показывает, что релаксация напряжений в процессе разрушения ограничивает рост амплитудных значений растягивающих напряжений в отраженной волне разрежения. В данной работе предлагается способ и проведены измерения амплитудных значений растягивающих напряжений за плоскостью откола для меди М2 и нержавеющей стали Х18Н10Т.

Прямые измерения растягивающих напряжений в условиях одномерной динамической деформации, по-видимому, невозможны. Известно, однако, что при отражении волн сжатия или разрежения от контактной границы с веществом, обладающим меньшей динамической жесткостью, происходит изменение знака нагрузки [1]. Можно подобрать пару материалов различной сжимаемости таким образом, что после сжатия ударной волной при переходе отраженной волны разрежения из «жесткого»