

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ТОРОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

О. М. Гейнц, Ю. И. Соловьев*

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

* Сибирский государственный университет путей сообщения, 630049 Новосибирск

Получены решения задачи о напряженном состоянии для упругого пространства с внутренней полостью в форме тора, допускающие разложение в тригонометрический ряд по углу в цилиндрической системе координат. На границе задавались перемещения и напряжения. С использованием аппарата обобщенных аналитических функций найдено аналитическое решение задачи. Представлены результаты расчета напряжений и перемещений точек упругого пространства.

Ключевые слова: упругое пространство, тороидальная полость, обобщенные аналитические функции.

Введение. Методы решения плоских задач теории упругости, основанные на применении классических аналитических функций комплексной переменной, разработаны в трудах Н. И. Muskhelishvili [1]. В работе [2] изложены методы, позволяющие распространить аппарат аналитических и обобщенных аналитических функций на пространственные задачи. Использование этих методов для нахождения решений задач, допускающих разложение в тригонометрический ряд по углу в цилиндрической системе координат, позволяет получить аналитическое решение ряда канонических задач. К таким задачам относится исследование напряженного состояния упругого тела в виде сплошного и полого тора или пространства, имеющего тороидальную полость.

1. Обобщенные аналитические функции. Следуя [3], будем называть обобщенной аналитической функцией (ОАФ) непрерывно дифференцируемую комплекснозначную функцию Φ переменных z, r , удовлетворяющую уравнению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi - \frac{2m+1}{t-\bar{t}}(\Phi - \bar{\Phi}) = 0, \quad (1)$$

где m — целое число; $t = z + ir$. Обозначим такие ОАФ через $\Phi_m(t)$. Свойства функций, удовлетворяющих уравнению (1), исследовались в [4] и других работах.

Разделяя в (1) вещественную и мнимую части, получим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \Phi_m &= \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Im} \Phi_m + \frac{2m+1}{r} \operatorname{Im} \Phi_m, \\ \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \Phi_m &= -\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} \Phi_m, \end{aligned} \quad (2)$$

которые аналогичны условиям Коши — Римана для классических аналитических функций. Если вещественная и мнимая части ОАФ являются дважды дифференцируемыми функциями, то из (2) следует

$$\nabla_m^2 (r^m \operatorname{Re} \Phi_m) = 0, \quad \nabla_{m+1}^2 (r^m \operatorname{Im} \Phi_m) = 0 \quad \left(\nabla_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right).$$

Следуя [5], введем производную функции Φ_m :

$$\Phi'_m(t) = \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} = -i \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} + \frac{2m+1}{r} \operatorname{Im} \Phi_m. \quad (3)$$

Если функция Φ_m дважды дифференцируема по z , r , то Φ'_m будет удовлетворять уравнению (1). (Следует отметить, что сумма или разность ОАФ и их произведение на вещественную постоянную являются ОАФ, удовлетворяющими уравнению (1), но умножение на мнимую постоянную выводит функцию из рассматриваемого класса функций.)

Функции $\Phi_m(t)$ можно рассматривать как псевдоаналитические функции Берса с порождающей парой $F = 1$, $G = ir^{-2m-1}$. В работе [5] при условии $\operatorname{Im}(\bar{F}G) > 0$ проведена классификация нулей и особых точек, а также построены аналоги теоремы и формулы Коши.

2. Представление общего решения теории упругости в цилиндрических координатах с помощью обобщенных аналитических функций. Пусть компоненты упругого смещения в цилиндрических координатах z , r , θ разлагаются в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} w(z, r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (w_n^1(z, r) \sin n\theta + w_n^2(z, r) \cos n\theta), \\ u(z, r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n^1(z, r) \sin n\theta + u_n^2(z, r) \cos n\theta), \\ v(z, r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (v_n^1(z, r) \cos n\theta - v_n^2(z, r) \sin n\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты разложения должны удовлетворять следующим уравнениям (верхние индексы далее опускаются):

$$\begin{aligned} \nabla_n^2 w_n + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta_n}{\partial z} &= 0, \\ \nabla_{n+1}^2 (u_n - v_n) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial r} - \frac{n}{2} \vartheta_n \right) &= 0, \\ \nabla_{n-1}^2 (u_n + v_n) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \vartheta_n}{\partial r} + \frac{n}{2} \vartheta_n \right) &= 0, \end{aligned}$$

где $\vartheta_n = \partial w_n / \partial z + \partial u_n / \partial r + (u_n - n v_n) / r$.

В работах [6–9] получены выражения для коэффициентов разложения w_n , u_n , v_n :

$$2G[w_n + i(u_n - s_m v_n)] = r^m (\varkappa \Phi'_{m1} - 2z \bar{\Phi}''_{m1} - \bar{\Phi}'_{m2} - 2i s_m \operatorname{Im} \Phi'_{m3}). \quad (5)$$

Здесь $s_m = 1$ при $m > 0$; $s_m = 0$ при $m = 0$; $s_m = -1$ при $m < 0$; $m = \pm n$; $\varkappa = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига; $\Phi_{mj}(t)$ — обобщенные аналитические функции комплексной переменной $t = z + ir$, удовлетворяющие уравнению (1) и равенству

$$r^m \operatorname{Re} \Phi'_{mj} = r^{-m} \operatorname{Re} \Phi'_{-mj} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Компоненты напряжения также разлагаются в ряды вида (3). Для коэффициентов разложения $\sigma_{zn}^{1,2}(z, r)$, $\sigma_{rn}^{1,2}(z, r)$, $\sigma_{\theta n}^{1,2}(z, r)$, $\tau_{zrn}^{1,2}(z, r)$, $\tau_{z\theta n}^{1,2}(z, r)$, $\tau_{r\theta n}^{1,2}(z, r)$ получены выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{zn} + i(\tau_{zrn} - s_m \tau_{z\theta n}) &= r^m (\Phi'_{m1} - 2z \bar{\Phi}''_{m1} - \bar{\Phi}'_{m2} - i s_m \operatorname{Im} \Phi'_{m3}), \\ \sigma_{zn} + \sigma_{rn} + \sigma_{\theta n} &= 4(1 + \nu) r^m \operatorname{Re} \Phi'_{m1}, \quad \sigma_{\theta n} = 2\nu r^m \operatorname{Re} \Phi'_{m1} + 2G(u_n - n v_n) / r, \\ \tau_{r\theta n} &= r^m \operatorname{Re} \Phi'_{m3} + 2G(n u_n - v_n) / r. \end{aligned}$$

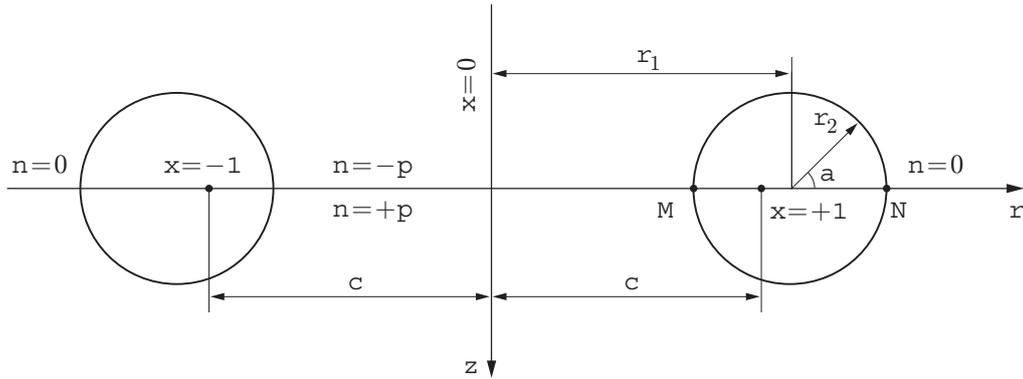


Рис. 1

3. Обобщенные аналитические функции в тороидальных координатах. Будем рассматривать задачи в тороидальной системе координат (ξ, η, θ) (рис. 1). Здесь ξ, η — биполярные координаты в меридиональной плоскости $\theta = \text{const}$, связанные с цилиндрическими координатами формулами

$$z = c \frac{\sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad r = c \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos \eta}$$

(c — параметр системы координат).

Следуя [8], обобщенные аналитические функции Φ_{mj} будем искать в виде ряда

$$\Phi_{mj} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - m)} (\alpha_{mj}\Theta_{m,m-1} + \beta_{mj}\Theta_{m,m} + \gamma_{mj}\Theta_{m,m+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{mk}^{js}\Phi_{mk}^s + a_{mk}^{jc}\Phi_{mk}^c), \quad (7)$$

где $\alpha_{mj}, \beta_{mj}, \gamma_{mj}, a_{mk}^{js}, a_{mk}^{jc}$ — вещественные коэффициенты; Γ — гамма-функция; Φ_{mk}^s, Φ_{mk}^c — обобщенные аналитические функции, которые в тороидальных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{mk}^{s,c} = & \frac{1}{r^m} \sqrt{2(\text{ch } \xi - \cos \eta)} \left\{ (2k - 2m - 1) P_{k-1/2}^m(\text{ch } \xi) \begin{pmatrix} \sin k\eta \\ \cos k\eta \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - (2k + 2m - 1) P_{k-3/2}^m(\text{ch } \xi) \begin{pmatrix} \sin (k-1)\eta \\ \cos (k-1)\eta \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - 2i \left[P_{k-1/2}^{m+1}(\text{ch } \xi) - \begin{pmatrix} \cos k\eta \\ -\sin k\eta \end{pmatrix} - P_{k-3/2}^{m+1}(\text{ch } \xi) \begin{pmatrix} \cos (k-1)\eta \\ -\sin (k-1)\eta \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (k \geq 1), \quad (8) \\ \Phi_{m0}^s = & -\Phi_{m1}^s, \quad \Phi_{m0}^c = \Phi_{m1}^c. \end{aligned}$$

Здесь $P_{k-1/2}^m$ — присоединенные функции Лежандра первого рода полуцелого индекса; Θ_{mq} — многозначные обобщенные аналитические функции [6, 7]. После обхода вокруг полюса $(0, c)$ против часовой стрелки их приращения равны $\Delta\Theta_{m,m-1} = (-2r - 4imz)c^{m-1}/r^{2m+1}$, $\Delta\Theta_{m,m} = -2ic^m/r^{2m+1}$, $\Delta\Theta_{m,m+1} = -2/c^{m+1}$. Для этих функций согласно [7] выполняются соотношения

$$r^m \text{Re } \Theta_{m,m} = \frac{\Gamma(1/2 - m)}{2\sqrt{\pi}c} \sqrt{2(\text{ch } \xi - \cos \eta)} P_{-1/2}^m(\text{ch } \xi), \quad \text{Re } \Theta_{m,m-1} = \frac{1}{r} \text{Im } \Theta_{m-1,m-1},$$

$$\operatorname{Im} \Theta_{m,m-1} = 2m \frac{z}{r} \operatorname{Im} \Theta_{m,m} + \frac{\Gamma(1/2 - m)}{2\sqrt{\pi} cr^m} \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)}} \times \\ \times (4m \operatorname{sh} \xi P_{-1/2}^m(\operatorname{ch} \xi) + 4(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) P_{-1/2}^{m+1}(\operatorname{ch} \xi)), \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} \Theta_{m,m+1} = r^{-2m-1} \operatorname{Im} \Theta_{-m-1,m+1},$$

$$\operatorname{Im} \Theta_{m,m+1} = \frac{\Gamma(1/2 - m)}{2\sqrt{\pi} cr^m} \sqrt{2(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)} \frac{2}{1 + 2m} P_{-1/2}^{m+1}(\operatorname{ch} \xi).$$

Согласно (3) производные функций (8) вычисляются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi_{mk}^{s,c} = \pm \frac{1}{4c} [(2k - 2m - 1) \Phi_{m,k+1}^{c,s} - (4k - 2) \Phi_{mk}^{c,s} + (2k + 2m - 1) \Phi_{m,k-1}^{c,s}], \\ \Theta'_{m,m-1} = \frac{\Gamma(1/2 - m)}{4\sqrt{\pi} c^2} \Phi_{m1}^c + \frac{2m}{c} \Theta_{m,m}, \quad (10) \\ \Theta'_{m,m} = -\frac{\Gamma(1/2 - m)}{4\sqrt{\pi} c^2} \Phi_{m1}^s, \quad \Theta'_{m,m+1} = \frac{\Gamma(1/2 - m)}{4\sqrt{\pi} c^2} \Phi_{m1}^c.$$

Из условия непрерывности и однозначности перемещений получаем

$$\alpha_{m2} = \varkappa \alpha_{m1}, \quad (\varkappa + 1) \alpha_{m1} = s_m \alpha_{m3}, \quad \gamma_{m2} = \varkappa \gamma_{m1}, \\ (\varkappa + 1) \gamma_{m1} = -s_m \gamma_{m3}, \quad \varkappa \beta_{m1} + \beta_{m2} = 2s_m \beta_{m3} \quad (m \neq 0), \quad (11) \\ \alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = 0, \quad \gamma_{02} = \varkappa \gamma_{01}, \quad \beta_{02} = -\varkappa \beta_{01}, \quad \beta_{03} = 0.$$

4. Решение задач для упругого пространства с тороидальной полостью при заданных на поверхности полости перемещениях. Рассмотрим упругое пространство с внутренней полостью в виде кругового тора (рис. 2). Пусть ось тора совпадает с осью Oz , геометрическое место центров сечений плоскостями $\theta = \text{const}$ представляет собой окружность радиуса ρ_1 , лежащую в плоскости $z = 0$; ρ_2 — радиус сечения тора. Уравнение поверхности полости в тороидальных координатах имеет вид $\xi = \xi_0 = \ln [(\rho_1 + c)/\rho_2]$, где $c = \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}$.

Пусть на поверхности тора заданы смещения, представленные в виде тригонометрических рядов (4). Тогда коэффициенты разложения можно записать в виде

$$2Gw_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda - 2 \cos \eta}} \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^s \sin k\eta + A_k^c \cos k\eta),$$

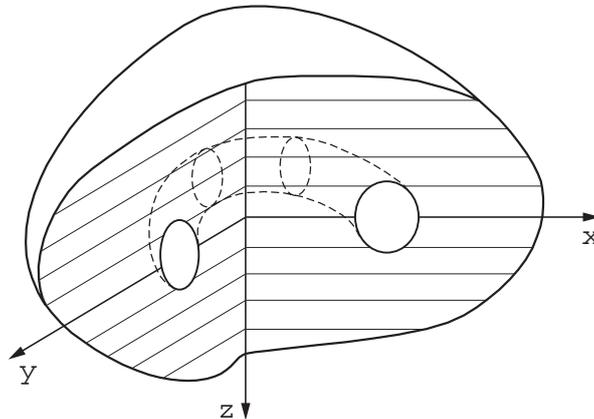


Рис. 2

$$2G(u_n - v_n) = -\frac{2}{\sqrt{\lambda - 2 \cos \eta}} \sum_{k=0}^{\infty} (B_k^s \cos k\eta - B_k^c \sin k\eta), \quad (12)$$

$$2G(u_n + v_n) = -\frac{2}{\sqrt{\lambda - 2 \cos \eta}} \sum_{k=0}^{\infty} (C_k^s \cos k\eta - C_k^c \sin k\eta) \quad (\lambda = 2 \operatorname{ch} \xi_0).$$

Подставляя ряды (12) в (5) и используя выражения (7)–(11), получим соотношения для $A_k^{s,c}$ (верхние индексы s, c опускаются):

$$A_k = l_k - q_k/2, \quad (13)$$

где

$$l_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} L_0 + L_1 - L_2, \quad l_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} L_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} L_1,$$

$$L_k = [(2k - 2n - 1)(\alpha a_{nk}^1 - a_{nk}^2) + \beta \beta_{n1} - \beta_{n2}] P_{k-1/2}^n(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$L_0 = [-(1 + 2n)(\alpha a_{n1}^1 - a_{n1}^2) + \beta \beta_{n1} - \beta_{n2}] P_{-1/2}^n(\lambda/2),$$

$$q_k = E_{k-1} - E_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 - E_2, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} E_1,$$

$$E_k = [(2k - 2n - 1)d_k^1 - (2k + 2n + 1)d_{k+1}^1] P_{k-1/2}^n(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$E_0 = [8n\alpha_{n1} - (2n + 1)d_1^1] P_{-1/2}^n(\lambda/2).$$

Соотношения для коэффициентов $B_k^{s,c}$ записываются в виде (верхние индексы s, c опускаются)

$$B_k = l_k + q_k/2, \quad (14)$$

где

$$l_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad l_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} L_0 + L_1 - L_2,$$

$$l_0 = L_0 - L_1 + 4n\alpha_{n1} P_{-1/2}^n(\lambda/2) \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1},$$

$$L_k = [(\alpha a_{nk}^1 + a_{nk}^2 - 2a_{nk}^3) - (\alpha a_{n,k+1}^1 + a_{n,k+1}^2 - 2a_{n,k+1}^3)] P_{k-1/2}^{n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$L_0 = [-(\alpha a_{n1}^1 + a_{n1}^2 - 2a_{n1}^3) + 2\alpha_{n1} + (-2\alpha\gamma_{n1} + 2\gamma_{n3})/(1 + 2n)] P_{-1/2}^{n+1}(\lambda/2),$$

$$q_k = E_{k-1} - E_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} E_0 - E_2, \quad q_0 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_1,$$

$$E_k = (d_k^1 - d_{k+1}^1) P_{k-1/2}^{n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1), \quad E_0 = -d_1^1 P_{-1/2}^{n+1}(\lambda/2).$$

В приведенных выше формулах

$$d_k^j = (2k - 2n - 3)a_{n,k-1}^j - (4k - 2)a_{nk}^j + (2k + 2n + 1)a_{n,k+1}^j \quad (k \geq 2),$$

$$d_1^j = -\begin{pmatrix} 1 - 2n \\ 3 + 2n \end{pmatrix} a_{n1}^j + (3 + 2n)a_{n2}^j + 2 \begin{pmatrix} \alpha_{nj} + \gamma_{nj} \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}.$$

Для множителей, записанных в матричной форме, верхняя строка матрицы соответствует индексу s , нижняя — индексу c .

Формулы для коэффициентов $C_{nk}^{s,c}$ получаются из (14) путем замены n на $-n$ при

$$L_k = [(\alpha a_{-nk}^1 + a_{-nk}^2 + 2a_{-nk}^3) - (\alpha a_{-n,k+1}^1 + a_{-n,k+1}^2 + 2a_{-n,k+1}^3)] P_{k-1/2}^{-n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$L_0 = [-(\alpha a_{-n1}^1 + a_{-n1}^2 + 2a_{-n1}^3) + 2\alpha_{-n1} + (-2\alpha\gamma_{-n1} + 2\gamma_{-n3})/(1-2n)] P_{-1/2}^{-n+1}(\lambda/2).$$

Соотношения (13), (14) при заданных A_k, B_k, C_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) и условия (6) образуют бесконечную систему уравнений для коэффициентов рядов (7). Для вычисления напряжений и смещений в упругом пространстве необходимо определить эти коэффициенты.

5. Решение задач для упругого пространства с тороидальной полостью при заданных на поверхности полости внешних силах. Рассмотрим два случая, когда на поверхности полости заданы внешние силы.

1. Пусть поверхностные напряжения заданы в виде

$$\begin{aligned} 2\sigma_{zn} &= \frac{1}{4c} \frac{1}{\sqrt{\lambda - 2 \cos \eta}} \sum_{k=0}^{\infty} (S_k^s \cos k\eta - S_k^c \sin k\eta), \\ \tau_{zrn} - \tau_{z\theta n} &= -\frac{2}{4c} \frac{1}{\sqrt{\lambda - 2 \cos \eta}} \sum_{k=0}^{\infty} (T_k^s \sin k\eta + T_k^c \cos k\eta). \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения для $\sigma_{zn} + \sigma_{rn}, \tau_{r\theta n}$ и $(\sigma_{zn} + \sigma_{rn} + \sigma_{\theta n})/(1 + \nu)$ имеют такой же вид, как для σ_{zn} (S заменяется на R, V, Z соответственно), а выражение для $\tau_{zrn} + \tau_{z\theta n}$ получается заменой T на U во второй формуле (15).

Процедура определения коэффициентов в разложении (15) описана в п. 4. В первой формуле (15) имеем

$$S_k = l_k - q_k/2,$$

где

$$l_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad l_1 = \binom{-2}{0} L_0 + L_1 - L_2,$$

$$L_k = [(2k - 2n - 1)(d_k^1 - d_k^2) - (2k + 2n + 1)(d_{k+1}^1 - d_{k+2}^2)] P_{k-1/2}^n(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$L_0 = [-(1 + 2n)(d_1^1 - d_1^2) + 8n(1 - \alpha)\alpha_{n1}] P_{-1/2}^n(\lambda/2),$$

$$R_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad R_1 = \binom{-2}{0} L_0 + L_1 - L_2, \quad R_0 = L_0 - L_1,$$

$$E_k = [(2k - 2n - 1)h_k - (2k + 2n + 1)h_{k+1}] P_{k-1/2}^n(\lambda/2) \quad (k \geq 1),$$

$$E_0 = -(2n + 1)h_1 P_{-1/2}^n(\lambda/2),$$

$$h_k = (2k - 2n - 3)d_{k-1}^1 - (4k - 2)d_k^1 + (2k + 2n + 1)d_{k+1}^1 \quad (k \geq 2),$$

$$h_1 = -\binom{3+2n}{1-2n} d_1^1 + (3+2n)d_2^1 + \binom{16n}{0} \alpha_{n1}.$$

Коэффициенты R_k принимают вид

$$R_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad R_1 = \binom{-2}{0} L_0 + L_1 - L_2, \quad R_0 = L_0 - L_1,$$

где $L_k = Z_k^1 + 4((n+1)B_k - (n-1)C_k)/\sqrt{\lambda^2 - 4}$.

Далее, коэффициенты V_k имеют вид

$$V_k = -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad V_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} L_0 + L_1 - L_2, \quad V_0 = L_0 - L_1,$$

где

$$\begin{aligned} L_k &= Z_k^3 - 4((n+1)B_k + (n-1)C_k)/\sqrt{\lambda^2 - 4}, \\ Z_k^j &= [(2k - 2n - 1)d_k^j - (2k + 2n + 1)d_{k+1}^j]P_{k-1/2}^n(\lambda/2) \quad (k \geq 1), \\ Z_0^j &= (-(2n+1)d_1^j + 8n\alpha_{nj})P_{-1/2}^n(\lambda/2). \end{aligned}$$

При вычислении $\sigma_{zn} + \sigma_{rn} + \sigma_{\theta n}$ коэффициенты Z_k принимаются равными Z_k^1 .

Коэффициенты T_k разложения (15) имеют вид

$$T_k = l_k + q_k/2, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} l_k &= -L_{k-1} + L_k - L_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} L_0 + L_1 - L_2, \quad l_0 = L_0 - L_1, \\ L_k &= [(d_k^1 + d_k^2 + d_k^3) - (d_{k+1}^1 + d_{k+1}^2 + d_{k+1}^3)]P_{k-1/2}^{n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1), \\ L_0 &= -(d_1^1 + d_1^2 + d_1^3)P_{-1/2}^{n+1}(\lambda/2), \\ q_k &= E_{k-1} - E_{k+1} \quad (k \geq 2), \quad q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 - E_1, \quad q_0 = -E_1, \\ E_k &= (h_k - h_{k+1})P_{k-1/2}^{n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1), \quad E_0 = -h_1P_{-1/2}^{n+1}(\lambda/2). \end{aligned}$$

Формулы для U_k подобны (16) при

$$\begin{aligned} L_k &= [(d_k^1 + d_k^2 - d_k^3) - (d_{k+1}^1 + d_{k+1}^2 - d_{k+1}^3)]P_{k-1/2}^{n+1}(\lambda/2) \quad (k \geq 1), \\ L_0 &= -(d_1^1 + d_1^2 - d_1^3)P_{-1/2}^{n+1}(\lambda/2). \end{aligned}$$

2. Пусть на поверхности полости заданы внешние силы интенсивности p_z, p_r, p_θ , разложенные в тригонометрические ряды вида (4). Коэффициенты этих разложений связаны с компонентами напряжения соотношениями

$$\begin{aligned} p_{zn} &= \sigma_{zn} \cos \alpha + \tau_{zrn} \sin \alpha, \\ p_{rn} &= \tau_{zrn} \cos \alpha + \sigma_{rn} \sin \alpha, \quad p_{\theta n} = \tau_{z\theta n} \cos \alpha + \tau_{r\theta n} \sin \alpha, \end{aligned} \tag{17}$$

где α — угол между внешней нормалью к поверхности и осью Oz :

$$\sin \alpha = -\frac{\operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta - 1}{\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \eta}, \quad \cos \alpha = -\frac{\operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \eta}.$$

Пусть заданные внешние силы разлагаются в тригонометрические ряды также по координате η тороидальной системы координат:

$$\begin{aligned} p_{zn} &= \frac{1}{4c} (\lambda - 2 \cos \eta)^{-3/2} \sum_{k=0}^{\infty} (P_{zk}^s \sin k\eta + P_{zk}^c \cos k\eta), \\ p_{rn} &= \frac{1}{4c} (\lambda - 2 \cos \eta)^{-3/2} \sum_{k=0}^{\infty} (P_{rk}^s \cos k\eta - P_{rk}^c \sin k\eta), \end{aligned} \tag{18}$$

$$p_{zn} = \frac{1}{4c} (\lambda - 2 \cos \eta)^{-3/2} \sum_{k=0}^{\infty} (P_k^s \sin k\eta + P_k^c \cos k\eta).$$

Подставляя (18) в равенства (17), с учетом разложения (15) получим

$$\begin{aligned} P_{zk} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} (S_{k+1} - S_{k-1}) + \lambda(T_{k+1} + U_{k+1} + T_{k-1} + U_{k-1})/2 - 2(T_k + U_k), \\ P_{rk} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} (T_{k+1} + U_{k+1} - T_{k-1} - U_{k-1}) + \\ &\quad + \lambda(S_{k+1} - Z_{k+1} + S_{k-1} - Z_{k-1})/2 - 2(S_k - Z_k), \\ P_{\theta k} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} (T_{k-1} - U_{k-1} - T_{k+1} + U_{k+1}) - \lambda(V_{k-1} + V_{k+1})/2 + 2V_k \quad (k \geq 2), \\ P_{z1} &= \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1} \left[S_2 - \binom{2}{0} S_0 \right] + \frac{\lambda}{2} \left[T_2 + U_2 + \binom{0}{2} (T_0 + U_0) \right] - 2(T_1 + U_1), \\ P_{r1} &= \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1} \left[T_2 + U_2 - \binom{0}{2} (T_0 - U_0) \right] + \frac{\lambda}{2} \left[S_2 - Z_2 + \binom{2}{0} (S_0 + Z_0) \right] - 2(S_1 - Z_1), \quad (19) \\ P_{\theta 1} &= \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1} \left[\binom{0}{2} (T_0 - U_0) - T_2 + U_2 \right] - \frac{\lambda}{2} \left(V_2 + \binom{2}{0} V_0 \right) + 2V_1, \\ P_{z0} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} S_1 + \lambda(T_1 + U_1)/2 - 2(T_0 + U_0), \\ P_{r0} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} (T_1 + U_1) + \lambda(S_1 - Z_1)/2 - 2(S_0 - Z_0), \\ P_{\theta 0} &= \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1} (-T_1 + U_1) - \lambda V_1/2 + 2V_0. \end{aligned}$$

Подставляя выражения величин через коэффициенты рядов (7) в правую часть (19), с учетом условия (6) получим бесконечную систему уравнений.

6. Примеры решения частных задач для упругого пространства с тороидальной полостью. Ниже приведены результаты решения следующих задач: задачи А — о повороте жесткого тора в упругом пространстве вокруг оси Oy на угол $\omega = 1$; задачи В — о растяжении упругого пространства силами $\sigma_z^0 = 1$, приложенными на бесконечности; задачи С — об одностороннем растяжении напряжением $\sigma_x^0 = 1$ на бесконечности.

На рис. 3 приведены распределения касательных напряжений вдоль линии $z = 0$, $\theta = 0$ для задачи А (кривая 1 — τ_{zr} , кривая 2 — $\tau_{z\theta}$, кривая 3 — $\tau_{r\theta}$). На рис. 4, а, б представлены эпюры касательных и нормальных напряжений вдоль линии $z = 0$, $\theta = 0$ для задач В, С соответственно (кривая 1 — σ_z , кривая 2 — σ_r , кривая 3 — σ_θ). Во всех случаях наблюдается концентрация напряжений на поверхности полости в точках, в которых $z = 0$. На рис. 5 показано изменение напряжений на поверхности полости в сечении $\theta = 0$ при $\xi = \xi_0$ от точки N до M (см. рис. 1) для задачи В (кривые 1, 2) и задачи С (кривые 3, 4). Здесь кривые 1, 3 соответствуют σ_θ , кривые 2, 4 — σ_η .

Экстремальные значения напряжений равны: $\sigma_\theta = -0,5995$ при $\alpha = 3,1145$, $\sigma_\eta = -0,8335$ при $\alpha = 3,1145$ (для задачи В) и $\sigma_\theta = -1,613$ при $\alpha = -0,143$, $\sigma_\eta = 1,884$ при $\alpha = 2,802$ (для задачи С).

Зависимости напряжения σ_z в точках N , M от отношения радиусов ρ_1/ρ_2 представлены на рис. 6 (кривые 1, 3 — $\eta = 0$, кривые 2, 4 — $\eta = \pi$) для задачи В (кривые 1, 2) и задачи С (кривые 3, 4). В случае $\rho_1/\rho_2 \approx 1$ (внутренний радиус сечения тора стремится к нулю) наблюдается резкий рост напряжений.

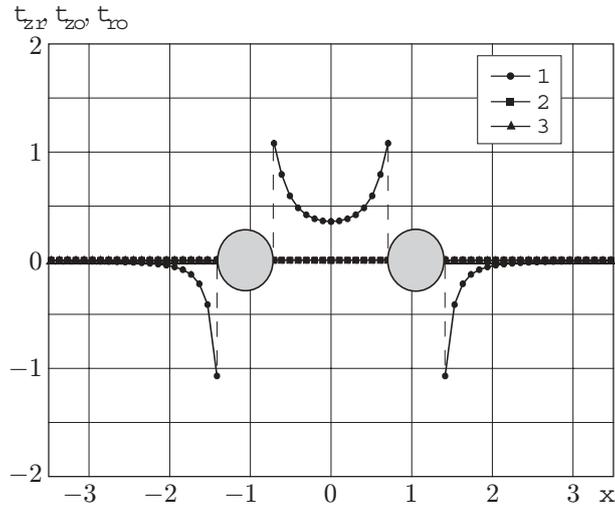


Рис. 3

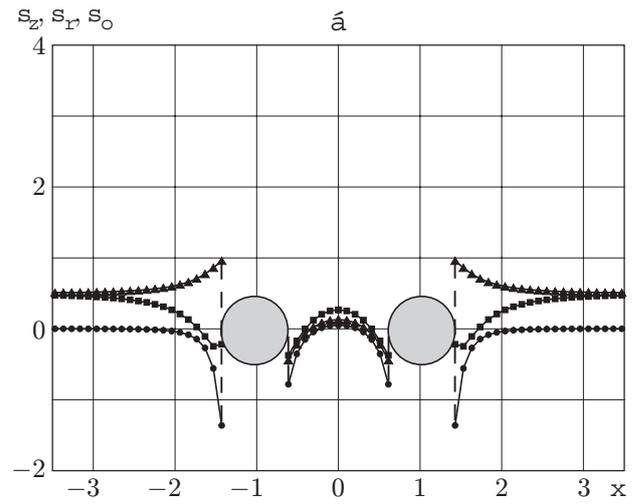
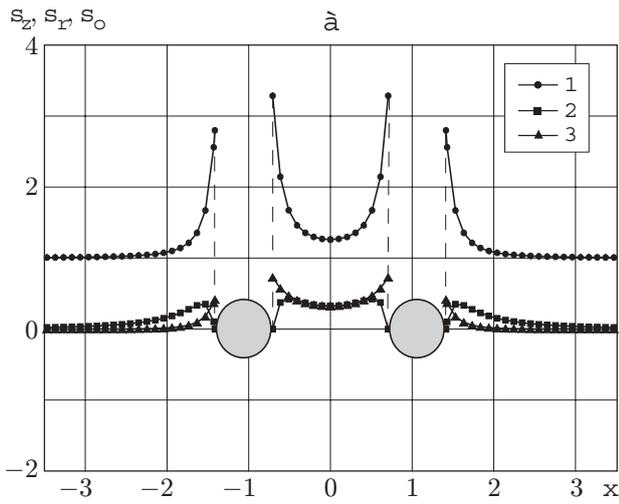


Рис. 4

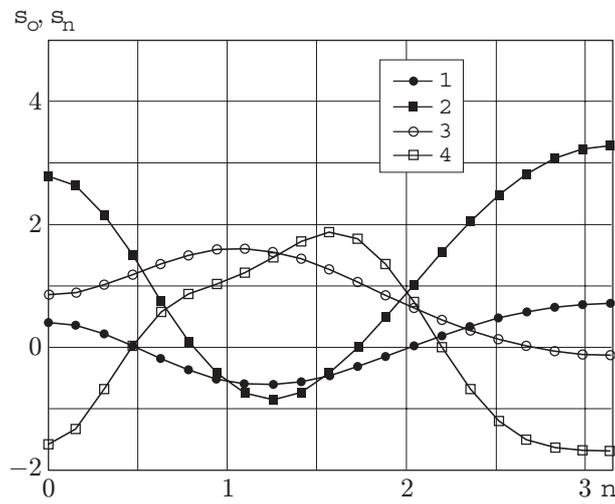


Рис. 5

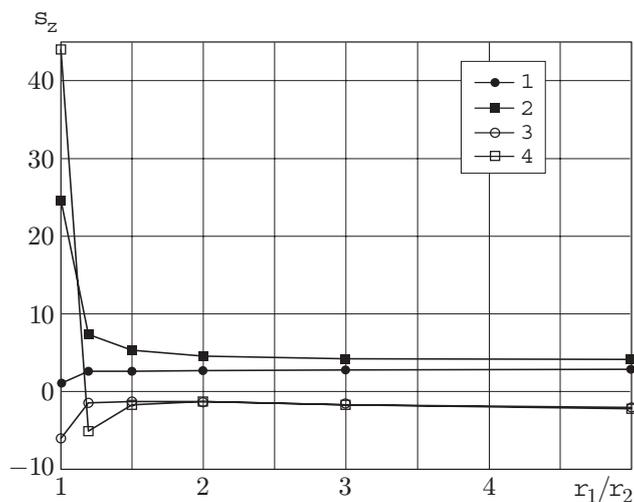


Рис. 6

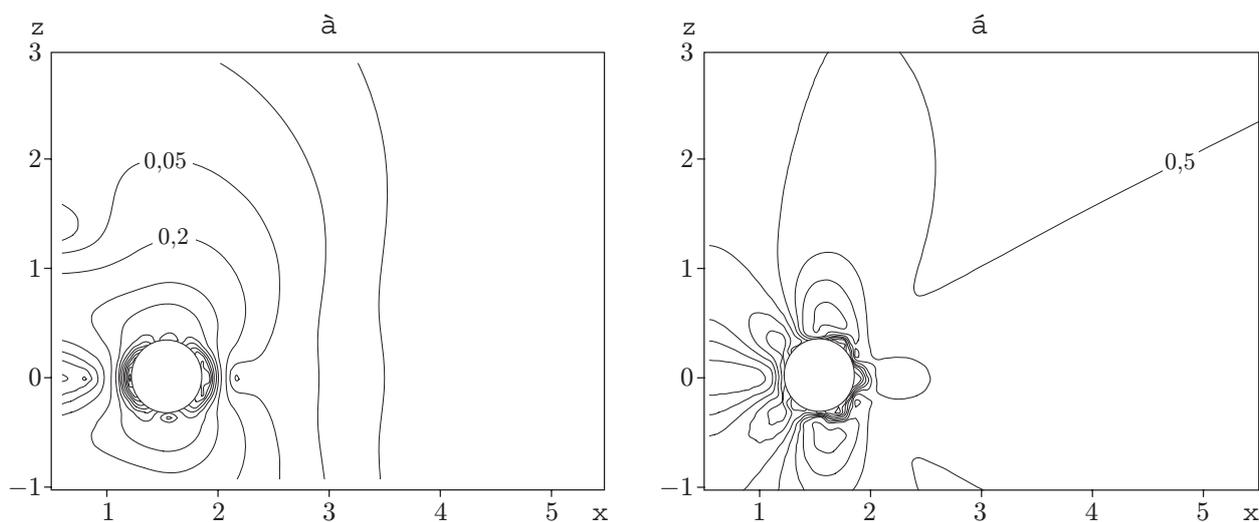


Рис. 7

Изолинии максимальных касательных напряжений для задач В, С приведены на рис. 7, а, б соответственно.

Заключение. Полученные результаты позволяют уточнить расчеты напряженно-деформированного состояния различных объектов, например внутренних дефектов типа кольцевых трещин или горных выработок вокруг целиков, находящихся на большой глубине, и повысить уровень надежности и экономичности таких расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

4. **Положий Г. Н.** Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973.
5. **Bers L.** Theory of pseudo-analytic functions. N. Y., 1959. (Lect. notes in memoirs).
6. **Соловьев Ю. И., Гейнц О. М.** Обобщенные аналитические функции в тороидальных координатах и их применение к задачам теории упругости // Материалы регион. науч.-практ. конф. "ТрансСиб-99", Новосибирск, 24–25 июня 1999 г. Новосибирск: Сиб. гос. ун-т путей сообщения, 1999. С. 456–459.
7. **Соловьев Ю. И.** Обобщенные аналитические функции в пространственных задачах теории упругости // Вестн. Сиб. гос. ун-та путей сообщения. 1999. Вып. 1. С. 92–98.
8. **Соловьев Ю. И., Гейнц О. М.** Представление общего решения теории упругости в тороидальных координатах при помощи обобщенных аналитических функций // Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 164–166.
9. **Соловьев Ю. И., Гейнц О. М.** Задача теории упругости для пространства с тороидальной полостью // Вестн. Сиб. гос. ун-та путей сообщения. 2000. Вып. 3. С. 86–93.

Поступила в редакцию 5/V 2003 г.
