

УДК 532.536

ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ СКАЧКАМИ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Аналитически и численно исследованы стационарные и нестационарные волны, распространяющиеся на поверхности движущегося по наклонной плоскости тонкого слоя дилатантной жидкости, реологические свойства которой описываются степенным законом Оствальда — де Вилия.

Вязкость многих жидкостей естественного и искусственного происхождения (например, вулканической лавы, грязевых селей, нефти, растворов и расплавов полимеров, суспензий, красок, меда, сыпучих материалов), называемых неньютоновскими, зависит от скорости сдвига течения. Для них адекватным уравнением состояния считается степенной закон Оствальда — де Вилия, который связывает напряжение сдвига со скоростью сдвига [1–9]. Этот закон содержит два параметра: коэффициент динамической вязкости η_0 [$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{n-2}$] и показатель степени n , принимающий значения $0 < n < 1$ для псевдопластических и $n > 1$ для дилатантных жидкостей. В частности, грязевые потоки ($0,1 \leq n \leq 0,4$) и нефть ($n = 0,8$) являются псевдопластическими жидкостями, а смесь извести с водой ($n = 1,47$) и засахарившийся мед ($n = 2,5$) — дилатантными жидкостями. Значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости.

В [5–9] представлен анализ устойчивости тонких слоев несжимаемых неньютоновских жидкостей, стекающих по наклонным (с углом α) плоскостям, к периодическим малым возмущениям. Показано, что такие возмущения неустойчивы при числах Оствальда $O_n > O_n^*$ и устойчивы при $O_n < O_n^*$, где $O_n^* = (2n+1)^{n-1} n^{2-n} \text{ctg } \alpha$ — критическое число Оствальда, соответствующее жидкости с показателем n . Поверхностное натяжение, которое необходимо учитывать при рассмотрении очень тонких слоев (пленок), не изменяет это критическое значение, но область волновых чисел неустойчивых возмущений становится конечной. В [6–9] приведены результаты расчета эволюции профиля свободной поверхности слоев ряда неньютоновских жидкостей для начальных возмущений двух типов, представляющих собой локализованное вздутие треугольной формы конечной высоты и ширины и сглаженную ступеньку, не ограниченную вверх по течению. При движении возмущений профили свободной поверхности существенно изменяются. Например, начальная ступенька, возникшая на поверхности слоя псевдопластической жидкости, преобразуется в серию скачков с крутым передним фронтом, толщина слоя жидкости между которыми меняется монотонно. Эта структура подобна стационарным бегущим волнам, изученным в работе [5], где также установлено, что стационарных решений типа сглаженного скачка в псевдопластических жидкостях не существует. В настоящей работе исследованы стационарные и нестационарные волны типа сглаженного гидравлического скачка, бегущие по поверхности слоя дилатантной жидкости на наклонной плоскости. Некоторые численные решения подобной задачи представлены в [10].

Аналогично [5–9] исходные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}\rho(u_t + uu_x + vu_y) &= -p_x + \rho g \sin \alpha + (\sigma_{xx})_x + (\tau_{xy})_y, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) &= -p_y - \rho g \cos \alpha + (\tau_{yx})_x + (\sigma_{yy})_y, \\ u_x + v_y &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Координата x направлена вдоль наклонной плоскости, y — перпендикулярно к ней; u , v — x - и y -компоненты скорости; σ , τ — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений; α — угол наклонной плоскости; p — давление; ρ — плотность жидкости. Для неньютоновских жидкостей имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\rho\nu_n A_n u_x, & \sigma_{yy} &= 2\rho\nu_n A_n v_y, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \rho\nu_n A_n (u_y + v_x), & A_n &= [2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2]^{(n-1)/2},\end{aligned}$$

где ν_n [$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{n-2}$] — кинематическая вязкость жидкости с показателем n .

Дополним уравнения (1) граничными условиями прилипания на плоскости $y = 0$ и равенства нулю напряжений, а также кинематическим уравнением на свободной поверхности $y = H(x, t)$. Введем следующие масштабы: L_0 , H_0 — длины вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости L_0 , H_0 ; $p_0 = \rho u_0^2$ — давление; $u_0 = (g \sin \alpha / \nu_n)^{1/n} (n / (2n + 1)) H_0^{(n+1)/n}$ — продольная скорость; $t_0 = L_0 / u_0$ — время. Предположив, что невозмущенная толщина слоя H_0 значительно меньше характерной длины вдоль наклонной плоскости L_0 ($\varepsilon \equiv H_0 / L_0 \ll 1$), определим порядки слагаемых и проинтегрируем уравнения (1) по координате y от 0 до $H(x, t)$. В результате получим уравнения, осредненные по толщине тонкого слоя неньютоновской жидкости на шероховатой наклонной плоскости:

$$H_t + Q_x = 0; \quad (2)$$

$$Q_t + c_1 (Q^2 / H)_x = (c_2 / O_n) [(1 - H_x \text{ctg} \alpha) H - Q^n / H^{2n}]. \quad (3)$$

Здесь $H(x, t)$ — функция, описывающая форму свободной поверхности; $Q(x, t) = \int_0^H u dy$ —

расход жидкости; $c_1 = (4n + 2) / (3n + 2)$; $c_2 = ((2n + 1) / n)^n$; $O_n = H_0^n u_0^{2-n} / \nu_n$ — число Оствальда.

Рассмотрим вопрос о возможности существования возвышений свободной поверхности слоя, не изменяющих форму в системе координат, движущейся с постоянной скоростью V . Предположим, что функции H и Q зависят только от $\xi = x - Vt$, и заменим частные производные по координате x и времени t на производную по ξ : $\partial / \partial t = -V d / d\xi$, $\partial / \partial x = d / d\xi$. Проинтегрировав уравнение (2), получим соотношение между расходом и возвышением поверхности $Q = VH + C$, подставив которое в (3), найдем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее форму свободной поверхности:

$$\left[O_n \left((c_1 - 1) V^2 - \frac{c_1 C^2}{H^2} \right) + c_2 H \text{ctg} \alpha \right] \frac{dH}{d\xi} = c_2 \left(H - \frac{(VH + C)^n}{H^{2n}} \right), \quad (4)$$

где C — постоянная интегрирования.

Решение уравнения (4) будем искать в виде сглаженного гидравлического скачка: $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} H(\xi) = H_1 = \text{const}$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} H(\xi) = 1$. Последнее равенство означает, что в качестве масштабов толщины слоя и расхода жидкости выбраны параметры невозмущенного течения $H_0 = Q_0 = 1$ при $\xi \rightarrow \infty$. В этом случае $C = 1 - V$, и уравнение для профиля волны принимает вид

$$\frac{dH(\xi)}{d\xi} = \frac{f(H)}{g(H)}, \quad (5)$$

где $f(H) = c_2 [H - (V(H - 1) + 1)^n / H^{2n}]$; $g(H) = O_n [(c_1 - 1) V^2 - c_1 (1 - V)^2 / H^2] + c_2 H \text{ctg} \alpha$.

При указанном выборе формы возможного решения $\lim_{H \rightarrow H_1} (dH/d\xi) = 0$, поэтому $\lim_{H \rightarrow H_1} f(H) = 0$. Отсюда можно определить скорость волны

$$V = (H_1^{(2n+1)/n} - 1)/(H_1 - 1). \quad (6)$$

Из формулы (6) следует, что при больших амплитудах H_1 скорость $V = H_1^{(n+1)/n}$; для сильнодилатантных жидкостей ($n \gg 1$) скорость волны прямо пропорциональна амплитуде H_1 .

В сглаженном гидравлическом скачке профиль характеризуется отрицательной производной $dH/d\xi < 0$ всюду, кроме точек $H = 1$, $H = H_1$, где она обращается в нуль. Знак $dH/d\xi$ определяется знаками функций $f(H)$, $g(H)$. Расчеты показывают, что при $1 < H < H_1$ функция $f(H)$ всегда отрицательна, в то время как знак функции $g(H)$ зависит от амплитуды скачка. Если H_1 меньше некоторого критического значения $H_1^*(n)$, то функция $g(H)$ положительна, производная $dH/d\xi$ отрицательна всюду в интервале изменения толщины слоя от амплитудного значения H_1 до невозмущенного значения $H = 1$. Это означает, что возвышение свободной поверхности монотонно уменьшается от H_1 до $H = 1$, следовательно, непрерывное решение типа сглаженного скачка существует. При $H_1 > H_1^*(n)$ функция $g(H)$ может стать отрицательной, а производная $dH/d\xi$ — положительной. В этом случае непрерывного профиля не существует: возвышение свободной поверхности монотонно уменьшается от амплитуды H_1 до значения $H = H^* > 1$, при котором производная $dH/d\xi$ обращается в бесконечность. Невозмущенного уровня $H = 1$ можно достичь, только если в этом месте имеется разрыв. Однако такие разрывные решения имеют формальный характер, так как в точках, где $H \rightarrow H^*$, нарушается основное предположение модели о том, что толщина слоя жидкости значительно меньше характерного продольного масштаба задачи. Для определения величины $H_1^*(n)$ решаем уравнение $g(H) = 0$ при нескольких увеличивающихся значениях амплитуды H_1 . Если H_1 незначительно превышает $H = 1$, то вещественный корень указанного уравнения меньше 1 и, следовательно, находится вне области изменения толщины слоя для решений рассматриваемого типа. По мере увеличения H_1 вещественный корень уравнения $g(H) = 0$ монотонно стремится к 1 со стороны меньших значений. Точка перехода этого корня через 1 соответствует критической амплитуде H_1^* . Для разрывных решений, соответствующих значениям $H_1 > H_1^*$, толщина слоя за скачком определяется как вещественный корень уравнения $g(H) = 0$.

Все расчеты выполнены для водного раствора извести с показателем $n = 1,47$. На рис. 1 представлена зависимость критической амплитуды скачка H_1^* от числа Оствальда O_n . Видно, что с увеличением O_n значение H_1^* уменьшается. На рис. 2 приведена зависимость толщины слоя H^* за скачком от амплитуды H_1 при различных значениях O_n . Видно, что величина H^* для любого значения O_n монотонно возрастает при увеличении амплитуды волны, а при фиксированном значении H_1 толщина слоя за разрывом увеличивается с ростом O_n .

Непрерывные профили свободной поверхности слоя дилатантной жидкости в области $1 \leq H_1 < H_1^*(n)$ можно найти путем численного решения уравнения (5) при заданных параметрах H_1 , n , O_n . Поскольку в точке $H = H_1$ производная $dH/d\xi$ обращается в нуль, для решения указанного уравнения необходимо отступить от этой точки и начать вычисления со значения искомой функции $H = H_1 - h$, где величина $h \ll H_1$ является решением уравнения (5), линеаризованного вблизи особой точки $H = H_1$. Такие численные решения представляют собой сглаженные скачки, ширина фронта которых уменьшается с увеличением амплитуды. Аналогичный анализ для псевдопластических жидкостей ($n < 1$) показывает, что решений типа сглаженного гидравлического скачка не существует. В этом

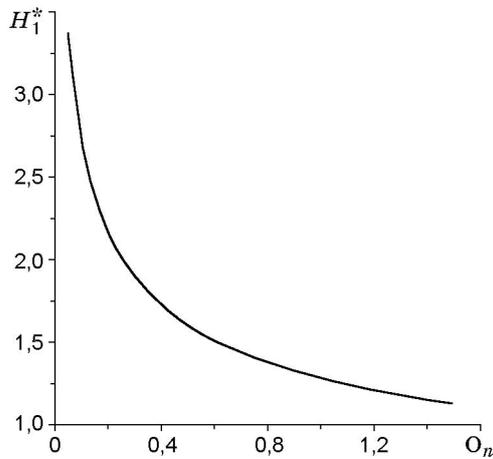


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость критической амплитуды стационарной волны от числа Оствальда

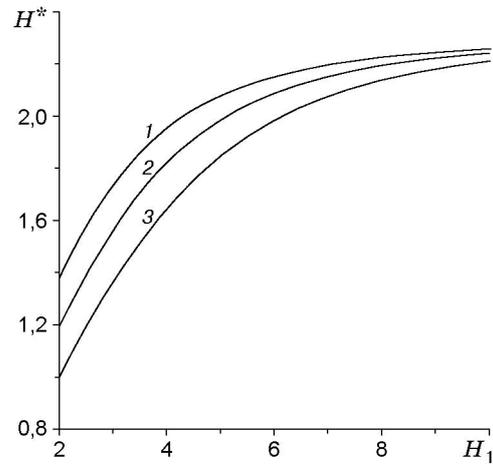


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость толщины слоя за скачком от амплитуды стационарной волны:
1 — $O_n = 1$; 2 — $O_n = 0,5$; 3 — $O_n = 0,25$

случае стационарные в движущейся с некоторой постоянной скоростью системе координат решения имеют вид периодических зубцов с крутыми передними фронтами [5].

Рассмотрим нестационарные волны, распространяющиеся по поверхности слоя дилатантной жидкости, когда на левой границе расчетной области заданы возвышение свободной поверхности $H_2(0, t) > 1$, а также соответствующие значения расхода и скорости жидкости. Для численного решения уравнений (2), (3), так же как в [5, 6], использована явная конечно-разностная схема. Согласно расчетам существует два характерных режима в зависимости от того, непрерывным или разрывным стационарным (в движущейся системе координат) решениям соответствует значение $H_2(0, t)$ на границе расчетной области, взятое в качестве амплитуды скачка H_1 . Если $H_2 < H_1^*$, то быстро возникает сглаженный скачок с амплитудой, равной H_2 , распространяющийся с постоянной скоростью по поверхности невозмущенного слоя и не изменяющий форму. Значение скорости, вычисленное по перемещению точки профиля с максимальной крутизной, совпадает с найденным по формуле (6), если положить $H_1 = H_2(0, t)$. Такая картина течения имеет место, в частности, в расчетах с параметрами $O_n = 1$ и $H_2(0, t) = 1,2$, поскольку в этом случае критическая амплитуда $H_1^* = 1,28$.

Если увеличить O_n и выбрать $H_2(0, t)$ так, чтобы соответствующее формальное стационарное (в движущейся системе координат) решение было разрывным, то течение будет развиваться иначе: на профиле свободной поверхности образуется быстро движущийся предшественник с крутым передним фронтом (рис. 3). Его скорость U с течением времени уменьшается ($U = 20,4; 18,2; 16,7; 14,5$ в моменты $t = 1,25; 2,5; 3,75; 5,0$ соответственно). Скорость части профиля за предшественником примерно постоянна и равна $U_1 = 2,18$. При больших временах амплитуда предшественника асимптотически убывает и профиль становится "диффузионным". Увеличение амплитуды профиля свободной поверхности $H_2(0, t)$ при неизменном значении O_n приводит к увеличению скорости движения предшественника (рис. 4). Это следует из сравнения кривой 2 на рис. 3 и кривой 3 на рис. 4, которые представляют собой форму профиля в один и тот же момент безразмерного времени ($t = 1,25$).

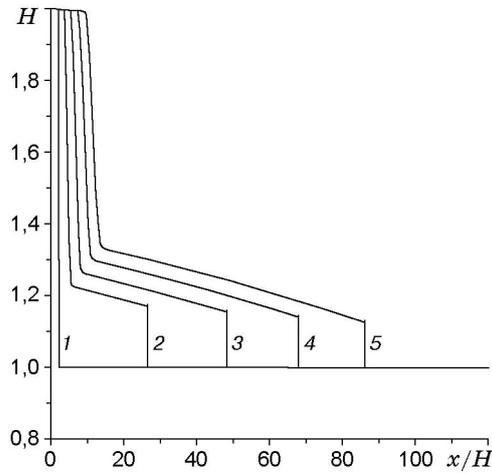


Рис. 3

Рис. 3. Профиль свободной поверхности слоя жидкости ($O_n = 20, H_2 = 2$):
 1 — $t = 0$; 2 — $t = 1,25$; 3 — $t = 2,5$; 4 — $t = 3,75$; 5 — $t = 5$

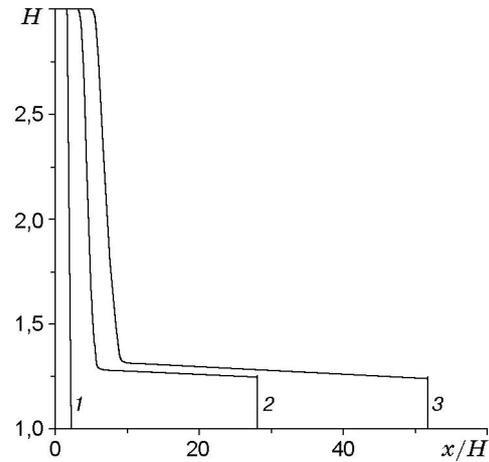


Рис. 4

Рис. 4. Профиль свободной поверхности слоя жидкости ($O_n = 20, H_2 = 3$):
 1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,625$; 3 — $t = 1,25$

Масштаб времени, использованный при переходе к безразмерным переменным, равен

$$t_0 = (H_0 / (g \sin \alpha))^{1/2} ((2n + 1) / n)^{n/2} O_n^{-1/2}.$$

Если выбрать конкретную жидкость с определенным значением показателя n и зафиксировать невозмущенную толщину слоя H_0 и угол α наклонной плоскости с горизонталью, то отношение масштабов времени, соответствующих двум числам Оствальда, будет равно $t_0^{(1)} / t_0^{(2)} = (O_n^{(2)} / O_n^{(1)})^{1/2}$. Отсюда следует, что увеличение O_n приводит к уменьшению временного масштаба. Безразмерное время определяется как $\bar{t} = t / t_0$, где t — размерное (физическое) время, поэтому

$$\bar{t}^{(1)} / \bar{t}^{(2)} = (t^{(1)} / t^{(2)}) (O_n^{(1)} / O_n^{(2)})^{1/2}.$$

Из этой формулы следует, что в расчетах при двух значениях O_n одному и тому же моменту безразмерного времени $\bar{t}^{(1)} = \bar{t}^{(2)}$ соответствуют различные моменты физического времени $t^{(1)} / t^{(2)} = (O_n^{(2)} / O_n^{(1)})^{1/2}$, а одному и тому же моменту физического времени $t^{(1)} = t^{(2)}$

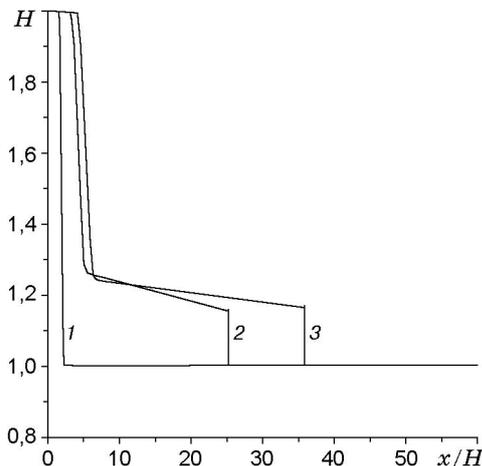


Рис. 5. Профили свободной поверхности слоя жидкости ($t = 23,7$ мс):
 1 — начальный профиль; 2 — $O_n = 10$; 3 — $O_n = 20$

соответствуют различные моменты безразмерного времени $\bar{t}^{(1)}/\bar{t}^{(2)} = (O_n^{(1)}/O_n^{(2)})^{1/2}$. Если $O_n^{(2)} > O_n^{(1)}$, то $t^{(2)} < t^{(1)}$ и $\bar{t}^{(2)} > \bar{t}^{(1)}$. На рис. 5 представлены профили свободной поверхности водного раствора извести при одинаковой амплитуде и двух значениях O_n в один и тот же момент физического времени $t = 23,7$ мс. Видно, что при бóльших значениях числа Оствальда течение развивается быстрее.

Таким образом, по поверхности тонких слоев дилатантных жидкостей, движущихся вдоль наклонных плоскостей, могут распространяться бегущие волны неизменной формы типа сглаженного гидравлического скачка, если их амплитуда меньше некоторого критического значения, зависящего от показателя жидкости и числа Оствальда. При бóльших амплитудах таких стационарных волн не существует, а нестационарные волны имеют более сложную структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eirich F. R.** Rheology. N. Y.: Acad. Press, 1967. V. 4.
2. **Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O.** Dynamics of polymeric liquids. N. Y.: John Wiley and Sons, 1977. V. 1.
3. **Шульман З. П., Берковский Б. М.** Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966.
4. **Metzner A. B.** Advances in chemical engineering. N. Y.: Acad. Press, 1956. V. 1.
5. **Ng C., Mei C. C.** Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 151–183.
6. **Berezin Yu. A., Hutter K., Spodareva L. A.** Stability analysis of gravity driven shear flows with free surface for power-law fluids // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 169–178.
7. **Berezin Yu. A., Hutter K., Spodareva L. A.** Evolution of disturbances on shallow layers of non-Newtonian fluids // Physica D. 2000. V. 139. P. 319–334.
8. **Сподарева Л. А.** Устойчивость течений неньютоновских жидкостей // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 75–80.
9. **Березин Ю. А., Сподарева Л. А.** Волнообразование на свободной поверхности нефтяных пленок // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 139–147.
10. **Berezin Yu. A., Chugunov V. A., Hutter K.** Hydraulic jumps on shallow layers of non-Newtonian fluids // J. Non-Newtonian Fluids Mech. 2001. V. 101, N 3. P. 220–230.

Поступила в редакцию 23/X 2001 г.