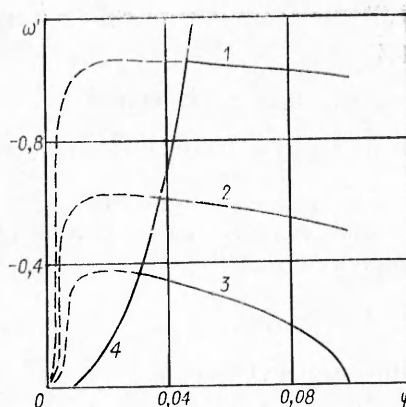


после моментов «всплывания», отвечающих точкам пересечения линий 1—3 и 4, не описывается уже уравнением (3.13).

Полученные в рассмотренных примерах результаты для наиболее простого частного случая, когда в (1.10) допустимо ограничиться лишь по одному первому уравнению для каждого из двух ξ ($J = 1$), носят, естественно, приближенный характер. Тем не менее они позволяют найти предварительные оценки характеристик течения. А когда требуется повышенная точность, предлагается ограничиваться в (1.10) большим числом уравнений ($J \geq 2$).



Р и с. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Константиnescу В. Н. Газовая смазка.— М.: Машиностроение, 1968.
2. Gross W. A., Matsch L. A., Castelli V. et al. Fluid film lubrication.— N. Y.: Wiley, 1980.
3. Никитин А. К., Ахвердиев К. С., Остроухов Б. И. Гидродинамическая теория смазки и расчет подшипников скольжения, работающих в стационарном режиме.— М.: Наука, 1981.
4. Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики.— М.: Наука, 1985.
5. Колодежников В. И. Течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком канале с одной свободной стенкой при ее подводе через пористый вкладыш // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 4.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.

Поступила 12/XI 1987 г.

УДК 532.591

ГЕНЕРАЦИЯ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ ДНА

Б. Е. Протопопов, И. В. Стурова

(Новосибирск)

В настоящее время достаточно хорошо разработана линейная теория генерации поверхностных волн различными возмущениями в жидкости с горизонтальным дном. Однако для жидкости с неровным дном аналитические исследования данной задачи сталкиваются со значительными математическими трудностями. Для малых неровностей дна обычно используется метод возмущений [1].

В настоящей работе в линейной постановке исследовано влияние малой локализованной донной неровности на поведение поверхностных волн для двух задач: распад начального возвышения свободной поверхности и движение области поверхностных давлений. Проведено сопоставление с численным решением исходной задачи, полученным конечно-разностным методом.

1. Пусть идеальная несжимаемая однородная жидкость занимает область $-\infty < x < \infty$, $-H(x) \leq y \leq 0$, где x — горизонтальная, а y — вертикальная координаты, $H(x) = H_0 - h(x)$, $h(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В начальный момент времени $t = 0$ свободная поверхность жидкости отклонена от своего равновесного горизонтального вида и задана выражением $y = f_0(x)$. Потенциал скорости данного течения $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad \varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$(1.3) \quad \varphi_y = h_x \varphi_x \text{ при } y = -H(x);$$

$$(1.4) \quad |\varphi| < \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

и начальными условиями

$$(1.5) \quad \varphi = 0, \quad \varphi_t = -gf_0(x) \text{ при } t = 0.$$

В предположении, что $h_m \ll H_0$ ($h_m = \max|h|$), аналогично [1] граничное условие на дне линеаризуется, и решение задачи (1.1)–(1.5) ищется в виде

$$(1.6) \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

При этом функции φ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.4). Граничное условие на дне (1.3) сносится на линию $y = -H_0$:

$$(1.7) \quad \varphi_{0y} = 0, \quad \varphi_{1y} = A(x, t) \text{ при } y = -H_0 \\ (A(x, t) = h_x \varphi_{0x} - h \varphi_{0yy}).$$

Для нахождения φ_i можно вывести рекуррентную последовательность краевых задач. Дальнейший анализ ограничен изучением волн только в первом приближении. Начальные условия (1.5) запишем как $\varphi_{0,1} = 0$, $\varphi_{0t} = -gf_0(x)$, $\varphi_{1t} = 0$ при $t = 0$. Предполагается, что функции $f_0(x)$ и $h(x)$ допускают преобразование Фурье и (для простоты) являются четными.

Функция φ_0 описывает хорошо известное решение данной задачи для жидкости с ровным дном:

$$(1.8) \quad \varphi_0(x, y, t) = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_0(k) \cos kx \operatorname{ch} k(y + H_0)}{\sqrt{k \operatorname{sh} 2kH_0}} \sin \omega t \, dk \\ \left(\omega(k) = \sqrt{gk \operatorname{th} kH_0}, \quad F_0(k) = 2 \int_0^{\infty} f_0(x) \cos kx \, dx \right).$$

Вертикальное смещение свободной поверхности $\eta(x, t)$ определяется из соотношения $\eta = -(1/g)\varphi_t|_{y=0}$ и, согласно (1.6),

$$(1.9) \quad \eta = \eta_0 + \eta_1.$$

Здесь первое слагаемое равно $\eta_0(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_0(k) \cos kx \cos \omega t \, dk$.

Для вычисления функции η_1 используются интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Согласно (1.7), (1.8),

$$A(x, t) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{k} F_0(k) \sin \omega t}{\sqrt{\operatorname{sh} 2kH_0}} (h \sin kx)_x \, dk$$

и решение для η_1 в (1.9) имеет вид

$$\eta_1(x, t) = \frac{2g}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos \xi x}{\operatorname{ch} \xi H_0} d\xi \int_0^{\infty} \frac{k F_0(k) [\cos \omega(\xi) t - \cos \omega(k) t]}{\operatorname{ch} kH_0 [\omega^2(k) - \omega^2(\xi)]} K(\xi, k) \, dk \\ \left(K(\xi, k) = \int_0^{\infty} h(x) \sin kx \sin \xi x \, dx \right).$$

В слое жидкости конечной ширины $|x| \leq L$ с граничными условиями

$$(1.10) \quad \varphi_x = 0 \text{ при } |x| = L$$

из решения задачи (1.1)–(1.3), (1.5) в приближении (1.6) находим

$$(1.11) \quad \eta_0(x, t) = \frac{b_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\beta x \cos \omega_n t;$$

$$(1.12) \quad \eta_1(x, t) = \frac{2g\beta^2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cos m\beta x}{\operatorname{ch} m\beta H_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n M_{nm}}{\operatorname{ch} n\beta H_0} \times \\ \times \begin{cases} (\cos \omega_m t - \cos \omega_n t) / (\omega_n^2 - \omega_m^2) & \text{при } n \neq m, \\ t \sin \omega_m t / (2\omega_m) & \text{при } n = m, \end{cases}$$

где $\beta = \pi/L$; $\omega_n = \sqrt{gn\beta \operatorname{th} n\beta H_0}$;

$$b_n = \frac{\xi}{L} \int_0^L f_0(x) \cos n\beta x dx; \quad M_{nm} = K(m\beta, n\beta).$$

2. При исследовании волновых движений, образующихся под влиянием внешнего давления $p_a(x, t)$, прикладываемого к свободной поверхности жидкости, сохраняются обозначения п. 1. Потенциал скорости рассматриваемого течения удовлетворяет уравнению (1.1) с граничными условиями (1.3), (1.4). Граничное условие на свободной поверхности теперь запишем в форме

$$(2.1) \quad \varphi_{tt} + g\varphi_y = -p_a/\rho \quad \text{при } y = 0$$

(ρ — плотность жидкости). Предполагается, что в начальный момент времени возмущения в жидкости отсутствуют, а начальные условия

$$(2.2) \quad \varphi = 0, \quad \varphi_t = -p_a/\rho \quad \text{при } t = 0.$$

Возвышение свободной поверхности определяется из соотношения $\eta = -(\varphi_t|_{y=0} + p_a/\rho)/g$. Предполагается, что поверхностное давление движется равномерно со скоростью c в направлении положительной оси x , постоянно на отрезке $|x - ct| \leq l$ и равно нулю вне его, т. е.

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p_a/\rho &= P \quad \text{при } |x - ct| \leq l, \\ p_a &= 0 \quad \text{при } |x - ct| > l. \end{aligned}$$

В приближении малой неровности дна решение данной задачи ищется в виде (1.6), но в отличие от п. 1 граничное условие на свободной поверхности и начальное условие для функции φ_0 имеют вид

$$\varphi_{0tt} + g\varphi_{0y} = -p_a/\rho \quad \text{при } y = 0, \quad \varphi_{0t} = -p_a/\rho \quad \text{при } t = 0.$$

Все остальные условия сохраняются. Решение данной задачи:

$$(2.4) \quad \varphi_0(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(k) \operatorname{ch} k(y + H_0)}{\operatorname{ch} kH_0 (\omega^2 - k^2 c^2)} \{kc [\sin kx \cos \omega t - \sin k(x - ct)] - \\ - \omega \cos kx \sin \omega t\} dk;$$

$$(2.5) \quad \eta_0(x, t) = \frac{1}{\pi g} \int_0^{\infty} \frac{f(k) \omega dk}{k^2 c^2 - \omega^2} \{\omega [\cos k(x - ct) - \cos \omega t \cos kx] - \\ - kc \sin \omega t \sin kx\};$$

$$(2.6) \quad \eta_1(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{\operatorname{ch} \xi H_0} \int_0^{\infty} \frac{k f(k) dk}{\operatorname{ch} kH_0} \left\{ B(\omega(k)) - B(\omega(\xi)) + \right. \\ \left. + \frac{k^2 c^2 (F_1 \sin kct - F_2 \cos kct)}{[\omega^2(k) - k^2 c^2][\omega^2(\xi) - k^2 c^2]} \right\}.$$

Здесь $f(k) = 2P \sin kl/k$; $F_1(k, \xi, x) = G_1(k, \xi) \cos \xi x - G_2(k, \xi) \sin \xi x$;

$$F_2(k, \xi, x) = G_3(k, \xi) \cos \xi x - G_1(\xi, k) \sin \xi x;$$

$$G_1(k, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin \xi x \cos kx dx; \quad G_2(k, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos \xi x \cos kx dx;$$

$$G_3(k, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \sin \xi x \sin kx dx; \quad B(\omega) = \frac{\omega (kcF_1 \sin \omega t - \omega F_2 \cos \omega t)}{(k^2 c^2 - \omega^2) [\omega^2(\xi) - \omega^2(k)]}.$$

Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении влияние переменного дна сказывается следующим образом: в дополнение к тем волновым движениям, которые возникают в жидкости с ровным дном от рассматриваемого генератора волн (начального возмущения свободной поверхности или движущейся области поверхностных давлений), появляются волновые возмущения, которые вызваны колебаниями участка дна, отвечающего размерам донной неровности. Эти донные колебания «включаются» одновременно с началом действия основного генератора, и их вертикальная компонента скорости описывается функцией $A(x, t)$, которую можно представить в виде $A = (hZ)_x$, где

$$(2.7) \quad Z(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{kf(k) dk}{\operatorname{ch} kH_0 (k^2 c^2 - \omega^2)} \{kc [\cos k(x - ct) - \cos kx \cos \omega t] - \omega \sin \omega t \sin kx\}.$$

Важная характеристика данного течения — волновое сопротивление W , испытываемое движущейся областью давления. С учетом (2.3)

$$(2.8) \quad W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(x, t) \eta_x dx = \rho P [\eta(ct + l, t) - \eta(ct - l, t)].$$

Для жидкости с ровным дном, согласно (2.5),

$$W_0(t) = \frac{2\rho P^2}{\pi g} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{k} \sin^2 kl \left[\frac{\sin(\omega - kc)t}{\omega - kc} - \frac{\sin(\omega + kc)t}{\omega + kc} \right] dk.$$

Асимптотическая оценка этого выражения при $t \rightarrow \infty$ даст решение соответствующей стационарной задачи, приведенное, например, в [2]: $W_0 \approx \approx 4\rho P^2 \sin^2 k_0 l / g(1 - gH_0/c^2 \operatorname{ch}^2 k_0 H_0)$ (k_0 — корень уравнения $c^2 k = = g \operatorname{th} kH_0$). Наличие малой неровности вносит для W в дополнение к W_0 слагаемое W_1 , зависящее от поведения функции η_1 в (2.6):

$$(2.9) \quad W_1 = \frac{2gP}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \xi l d\xi}{\operatorname{ch} \xi H_0} \int_0^{\infty} \frac{kf(k) dk}{\operatorname{ch} kH_0} \left\{ C(\omega(k)) - C(\omega(\xi)) + \frac{k^2 c^2 (E_1 \cos kct - E_2 \sin kct)}{[\omega^2(k) - k^2 c^2] [\omega^2(\xi) - k^2 c^2]} \right\},$$

$$\text{где } C(\omega) = \frac{\omega (\omega E_1 \cos \omega t - kc E_2 \sin \omega t)}{(k^2 c^2 - \omega^2) [\omega^2(\xi) - \omega^2(k)]};$$

$$E_1(k, \xi, t) = G_3(k, \xi) \sin \xi ct + G_1(k, \xi) \cos \xi ct;$$

$$E_2(k, \xi, t) = G_1(k, \xi) \sin \xi ct + G_2(k, \xi) \cos \xi ct.$$

Для слоя жидкости конечной ширины $|x| \leq L$ решение задачи о движении области поверхностного давления $p_a/\rho = P$ при $|x + x_0 - ct| \leq \leq l$, $p_a = 0$ при $|x + x_0 - ct| > l$ с учетом граничного условия (1.12)

имеет вид

$$(2.10) \quad \eta_0 = \frac{2P}{\pi g} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos n\beta(x+L);$$

$$(2.11) \quad \eta_1 = \sum_{m=1}^{\infty} N_m \cos m\beta(x+L).$$

Здесь

$$T_n = \frac{\omega_n \sin n\beta l}{n(\omega_n^2 - n^2\beta^2 c^2)} [\omega_n \cos n\beta(x_0 - L)(\cos \omega_n t - \cos n\beta ct) + \sin n\beta(x_0 - L)(n\beta c \sin \omega_n t - \omega_n \sin n\beta ct)];$$

$$N_m = \frac{2\pi m P}{L^3 \operatorname{ch} m\beta H_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{nm}}{\operatorname{ch} n\beta H_0} \left[G(\omega_n) - G(\omega_m) + \frac{n^2\beta^2 c^2 \cos n\beta(x_0 - L - ct)}{(n^2\beta^2 c^2 - \omega_n^2)(\omega_m^2 - n^2\beta^2 c^2)} \right];$$

$$B_{nm} = \int_{-L}^L h(x) \sin n\beta(x+L) \sin m\beta(x+L) dx;$$

$$G(\omega) = \frac{\omega [n\beta c \sin n\beta(x_0 - L) \sin \omega t + \omega \cos n\beta(x_0 - L) \cos \omega t]}{(\omega^2 - n^2\beta^2 c^2)(\omega_m^2 - \omega_n^2)}.$$

Волновое сопротивление в данной задаче (согласно (2.8), (2.10), (2.11)) $W = W_0 + W_1$, где

$$W_0 = \frac{4\rho P^2}{\pi g} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin n\beta l \cdot \sin n\beta(x_0 - ct - L),$$

$$W_1 = 2gP \sum_{m=1}^{\infty} N_m \sin m\beta l \cdot \sin m\beta(x_0 - ct - L).$$

В дополнение к этим характеристикам течения исследуем также поведение давления на дне, которое определяется из соотношения $D = = \rho^{-1} p|_{y=-H_0} = -\Phi t|_{y=-H_0}$. Для жидкости с ровным дном

$$D_0 = \frac{lP}{L} + \frac{2P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n\beta(x+L),$$

$$R_n = \frac{\sin n\beta l}{n \operatorname{ch} n\beta H_0 (\omega_n^2 - n^2\beta^2 c^2)} [\omega_n^2 \cos \omega_n t \cos n\beta(x_0 - L) - n^2\beta^2 c^2 \cos n\beta(x_0 - L - ct) + n\beta c \omega_n \sin \omega_n t \sin n\beta(x_0 - L)].$$

В приближении малой неровности к слагаемому D_0 добавляется

$$(2.12) \quad D_1 = \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos m\beta(x+L),$$

$$V_m = \frac{2P}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta l D_{nm}}{\operatorname{ch} n\beta H_0} \left\{ (gm\beta - \omega_n^2 \operatorname{th} m\beta H_0) [G(\omega_m) - G(\omega_n)] + \frac{n^2\beta^2 c^2 (n^2\beta^2 c^2 \operatorname{th} m\beta H_0 - gm\beta)}{(\omega_n^2 - n^2\beta^2 c^2)(\omega_m^2 - n^2\beta^2 c^2)} \cos n\beta(x_0 - L - ct) \right\}.$$

Значительный интерес представляет также изучение влияния неровности дна на стационарный туг воли. В этом случае решения для $\varphi_0(x, t)$ и $\eta_0(x, t)$ равны подчеркнутым слагаемым в (2.4), (2.5) и в подвижной системе координат $x_* = x - ct$ описывают волновые возмущения, создаваемые постоянно действующим давлением, приложенным к свободной поверхности равномерного потока. Решение этой задачи хорошо известно (см., например, [3]). Значение функции $Z(x, t)$ определяется подчеркнутым слагаемым в (2.7). Согласно [3], при $c > \sqrt{gH_0}$ функция $Z(x_*)$ четная

по x_* и экспоненциально быстро убывает по мере удаления от области внешних давлений. При $c < \sqrt{gH_0}$ наряду с этим слагаемым появляется второе, которое отлично от нуля только при $x_* < 0$ и представляет собой периодическую волну. Скорость убывания функции $Z(x_*)$ с удалением от области давлений при $x_* > 0$ позволяет найти то минимальное расстояние от донной неровности, на котором она еще не оказывает существенного влияния. Начиная же с тех моментов времени, когда поверхностное давление попадает в зону неровности, функция донного возбуждения $A(x, t)$ становится периодической по времени, и исследуемая задача будет во многом аналогична задаче о генерации волн периодическими подвижками дна. Решение для $\varphi_1(x, t)$ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{c}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 f(k) dk}{\operatorname{ch} kH_0 [k^2 c^2 - \omega^2(k)]} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\operatorname{ch} \xi H_0 [\omega^2(\xi) - k^2 c^2]} \times \\ & \times \left\{ [\omega^2(\xi) \operatorname{sh} \xi y + g\xi \operatorname{ch} \xi y] \left[F_1 \cos \omega(\xi) t + kcF_2 \frac{\sin \omega(\xi) t}{\omega(\xi)} \right] - \right. \\ & \left. - (k^2 c^2 \operatorname{sh} \xi y + g\xi \operatorname{ch} \xi y) (F_1 \cos kct + F_2 \sin kct) \right\}. \end{aligned}$$

3. Алгоритм численного решения задач, рассмотренных выше, составлен на основе метода конечных разностей для слоя жидкости конечной ширины. Использована замена переменных $x' = x$, $y' = -y/H(x)$, переводящая область течения $Q = \{|x| \leq L, -H(x) \leq y \leq 0\}$ в прямоугольник $\Pi = \{|x'| \leq L, 0 \leq y' \leq 1\}$. В результате этой замены уравнение (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3), (1.12), (2.1) принимают вид (здесь и далее штрихи у новых переменных опущены)

$$(3.1) \quad u_x + v_y = 0;$$

$$(3.2) \quad u = 0 \text{ при } |x| = L, \quad v = 0 \text{ при } y = 1;$$

$$(3.3) \quad \eta_t = -v, \quad \varphi_t = -g\eta - p_a/\rho \text{ при } y = 0;$$

$$(3.4) \quad u = (\varphi_x + \beta v)/\gamma, \quad v = (\varphi_y + \beta u)/H(x), \\ \beta = -yH_x, \quad \gamma = (1 + \beta^2)/H(x).$$

Начальные условия (1.5), (2.2) остаются прежними. После записи эволюционных уравнений (3.3) в дискретном виде по схеме Кранка — Николсона [4] задачи на нахождение φ и η легко разделяются (в пределах одного шага по времени). Из соотношений (3.1), (3.2), (3.4) и граничного условия

$$(3.5) \quad \varphi - g\tau^2 v/4 = a \text{ при } y = 0$$

вычисляются значения φ , u , v , после чего прямым счетом по $\eta = -\tau v/2 + b$ при $y = 0$ находится положение свободной поверхности. Здесь τ — шаг по времени, через a и b обозначены все слагаемые, известные по предыдущему временному шагу (либо по начальным данным) и заданной функции $p_a(x, t)$:

$$a^{n+1} = \varphi^n + g\tau^2 v^n/4 - \tau [g\eta^n + (p_a^{n+1} + p_a^n)/2\rho], \quad b^{n+1} = \eta^n - \tau v^n/2$$

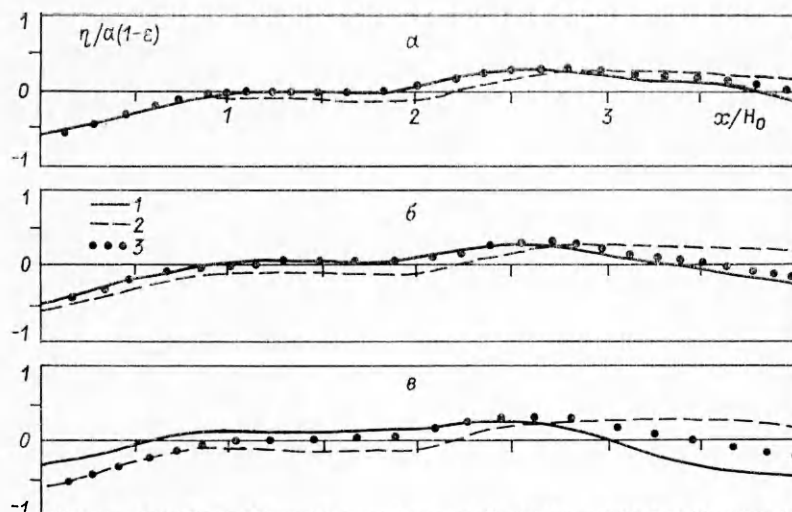
(индекс сверху — номер шага по t). Задача (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) рассчитывается по итерационной схеме расщепления, построенной по принципу метода стабилизирующей поправки [5] с учетом дивергентного вида уравнения (3.1):

$$(\varphi^{h+1/2} - \varphi^h)/\omega = u_x^h + v_y^{h+1/2}, \quad v^{h+1/2} = (\varphi_y^{h+1/2} + \beta u^h)/H(x),$$

$$\varphi^{h+1/2} - g\tau^2 v^{h+1/2}/4 = a \text{ при } y = 0, \quad v^{h+1/2} = 0 \text{ при } y = 1;$$

$$(\varphi^{h+1} - \varphi^{h+1/2})/\omega = u_x^{h+1} - u_x^h, \quad u^{h+1} = (\varphi_x^{h+1} + \beta v^{h+1/2})/\gamma,$$

$$u^{h+1} = 0 \text{ при } |x| = L$$



Р и с. 1

(ω — итерационный параметр, верхний индекс — номер итерации). Схема реализуется на «шахматной» сетке с расположением узлов φ в центрах ячеек сетки, узлов u в серединах боковых граней, узлов v в серединах верхних и нижних граней. Для аппроксимации производных используются только симметричные разности. Построенная схема имеет второй порядок аппроксимации по всем переменным, абсолютно устойчива, консервативна.

4. При конкретных расчетах задачи, рассмотренной в п. 1, форма донной неровности задавалась в виде $h(x) = \alpha \cos(\pi x/2x_1)$ при $|x| \leq x_1$, $h(x) = 0$ при $|x| > x_1$. Были рассмотрены случаи как конечной, так и бесконечной ширины слоя жидкости. Сопоставление с численными расчетами данной задачи конечно-разностным методом, описанным в п. 3, выполнено для слоя жидкости конечной ширины $L/H_0 = 4$ при начальном возвышении свободной поверхности $f_0(x) = a[\cos(\pi x/2x_0) - \varepsilon]$ при $|x| \leq x_0$, $f_0(x) = -a\varepsilon$ при $|x| > x_0$ ($\varepsilon = 2x_0/\pi L$). Численное решение получено на сетке 72×12 с шагом по времени $\tau\sqrt{g/H_0} = 0,02$.

На рис. 1 представлены зависимости η для момента времени $t\sqrt{g/H_0} = 30$ при $x_0/H_0 = 1$, $x_1/H_0 = 2$, $\alpha/H_0 = 0,2$ (а), $x_1/H_0 = 3$, $\alpha/H_0 = 0,2$ (б), $x_1/H_0 = 3$, $\alpha/H_0 = 0,3$ (в). Кривыми 1–3 обозначены соответственно численное решение, решение (1.11) для ровного дна и приближенное решение (1.9) для малой неровности, полученное с использованием (1.11), (1.12). Видно, что приближенное решение удовлетворительно совпадает с численным лишь при $\alpha/H_0 \leq 0,2$. Следует отметить, что при наличии вертикальных стенок за счет отражения от них влияние донной неровности сказывается значительно сильнее, чем в безграничной жидкости.

Для выполнения расчетов задачи, рассмотренной в п. 2, использовались неровности дна двух типов:

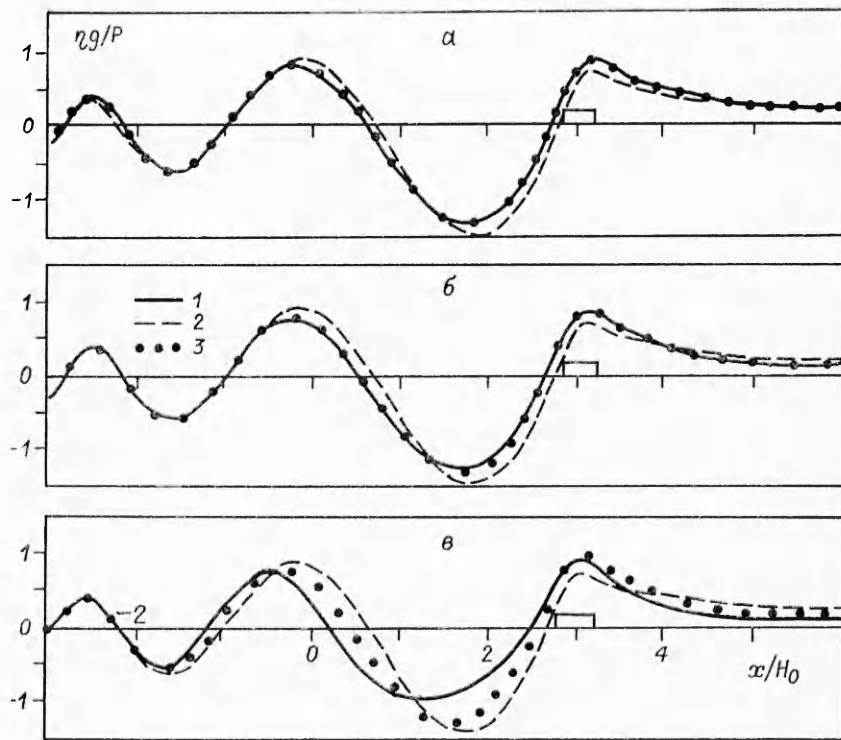
$$(4.1) \quad h(x) = \alpha \cos(\pi(x - x_1)/2x_2) \text{ при } |x - x_1| \leq x_2,$$

$$h(x) = 0 \text{ при } |x - x_1| > x_2;$$

$$(4.2) \quad h(x) = \alpha \sin(\pi(x_1 - x)/x_2) \text{ при } |x - x_1| \leq x_2,$$

$$h(x) = 0 \text{ при } |x - x_1| > x_2.$$

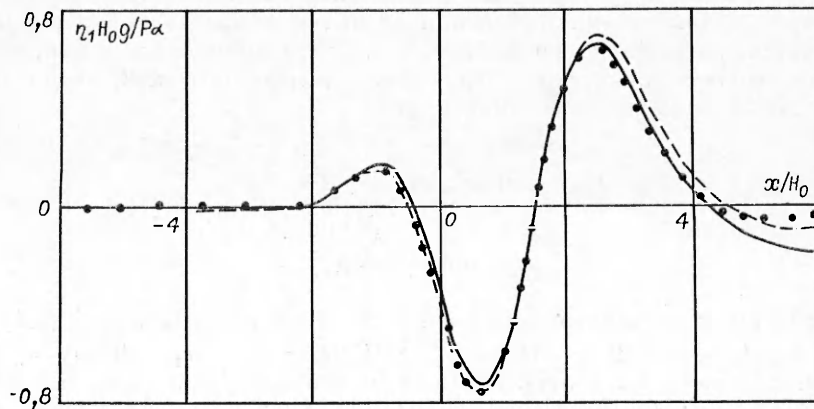
Сопоставление с численным решением выполнено для неровности (4.1) при $L/H_0 = 6$, $l/H_0 = 0,25$, $x_0/H_0 = 5$, $c/\sqrt{gH_0} = 0,8$, $x_1 = 0$, $x_2/H_0 = 3$. На рис. 2 приведены вертикальные смещения свободной поверхности в момент времени $t\sqrt{g/H_0} = 10$ при $\alpha/H_0 = 0,2$ (а), $\alpha/H_0 = 0,3$ (б), $\alpha/H_0 = 0,5$ (в). Численные расчеты выполнены на сетке 100×10 с шагом по



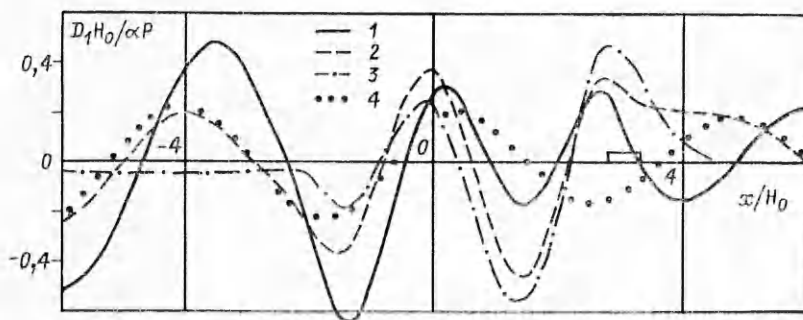
Р и с. 2

времени $\tau\sqrt{g/H_0} = 0,02$. Кривые 1—3 аналогичны рис. 1, прямоугольник — положение области давления в данный момент времени. Поведение функции η_1 , найденной из (2.11) при $t\sqrt{g/H_0} = 10$, показано на рис. 3, где кривая 1 соответствует неровности (4.1) с параметрами для рис. 2, 2 — то же, но $L/H_0 = 20$, 3 — неровности (4.2) ($L/H_0 = 20$, $x_1/H_0 = 3$, $x_2/H_0 = 6$, остальные параметры прежние). Поведение функции η_1 при $L/H_0 = 20$ для данного момента времени практически совпадает со случаем безграничной жидкости. Видно, что изменение ширины слоя жидкости и формы неровности лишь незначительно отразилось на поведении свободной поверхности. Однако поведение давления на дне в этих же случаях резко отличается.

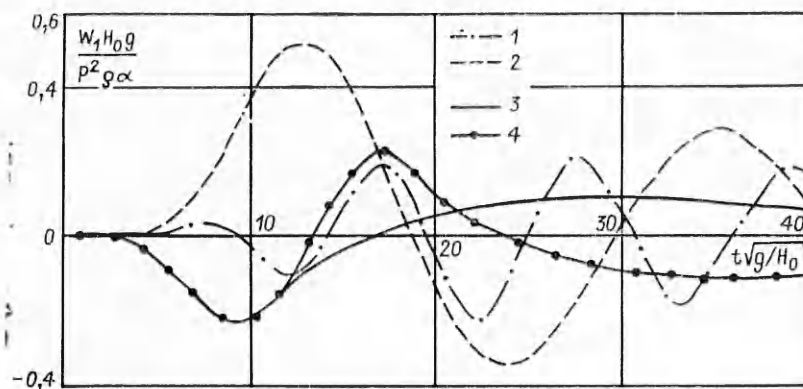
На рис. 4 представлены значения D_1 , вычисленные из (2.12). Кривые 1—3 аналогичны рис. 3, а 4 отвечает неровности (4.1), расположенной левее начального положения области давления ($L/H_0 = 20$, $x_1/H_0 = -9$,



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

$x_2/H_0 = 3$, остальные параметры прежние). Видно, что неровность дна вызывает существенные возмущения давления, в то время как изменения вертикальных смещений при данных условиях пренебрежимо малы (максимальные значения $|\eta_1|gH_0/\alpha P < 0,04$). Это вызвано тем, что в результате мгновенного разгона области давления возникают возмущения, описываемые функцией $Z(x, t)$ в (2.7) и распространяющиеся в сторону как положительных, так и отрицательных значений x .

Влияние неровности дна на поведение волнового сопротивления показано на рис 5, где представлены функции W_1 для безграничной жидкости, определенные из (2.9). Кривые 1—3 отвечают неровности вида (4.1) с параметрами, используемыми для рис. 3, и различными скоростями движения области давления: $c/\sqrt{gH_0} = 0,4; 0,6; 0,8$. Линия 4 приведена для неровности (4.2) с теми же параметрами, которые использованы для кривой 3 на рис. 3 ($c/\sqrt{gH_0} = 0,8$). Видно, что наличие неровности дна меняет волновое сопротивление не только для тех моментов времени, которые соответствуют прохождению области давления над неровностью, но также и для значительно более поздних моментов. При этом функция W_1 представляет собой затухающую волну, период которой определяется только скоростью движения области давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доценко С. Ф., Чересов Л. В. О дифракции поверхностной гравитационной волны на малой неровности дна // ИММ.— 1979.— Т. 43, № 4.
2. Wehausen J. V., Laitone E. V. Surface waves // Handbuch der Physik.— Berlin, 1960.— Bd IX. Strömungsmechanik III.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.

Поступила 19/X 1987 г.