

(П.1), (П.2) описывают возмущения, распространяющиеся относительно верхнего (нижнего) потока со скоростью, равной скорости звука в данном потоке. Область a включает возмущения дозвуковые относительно обоих потоков. Из рис. 5 видно, что для них существует максимальное число Маха M_s , которое отвечает точке пересечения (П.1), (П.2): $M_s = (1 + \sqrt{\kappa})/(1 - m)$.

Хорошо известно [6], что скорость нейтральных возмущений c_N в области a при больших Re определяется положением обобщенной точки перегиба:

$$c_N = U(y_c) \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right) \right|_{y=y_c} = 0.$$

Возмущения в области b сверхзвуковые по отношению к верхнему ($y > 0$) потоку, c — к нижнему, d — к обоим. Отметим, что возмущения последнего класса не были найдены в расчетах ни в данной, ни в других известных нам работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paramoschou D., Roshko A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 197.— P. 453.
2. Крайтон Д. Акустика как ветвь гидродинамики // Современная гидродинамика.— М.: Мир, 1984.
3. Tam C. K. W., Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. Pt 1. Two-dimensional mixing layers // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138.— P. 273.
4. Кудрявцев А. Н., Соловьев А. С. Устойчивость слоя сдвига сжимаемого газа // ПМТФ.— 1989.— № 6.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3.
6. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
7. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
8. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости.— М.: Наука, 1965.
9. Ragab S. A., Wu J. L. Instabilities in the free shear layer formed by two supersonic streams.— N. Y., 1988.— (Paper/AIAA; N 88—0038).
10. Grosch C. E., Salwen H. The continuous spectrum of the Orr—Sommerfeld equation. Pt 1. The spectrum and the eigenfunctions // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 87.— P. 33.
11. Chu V.-T., Kovaszny L. S. G. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 3, N 5.
12. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary layer transition // AIAA J.— 1975.— V. 13.— P. 278.
13. Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2 // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 74, N 2.
14. Jackson T. L., Grosch C. E. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer.— Wash., 1988.— (CR/NASA; 481671. Rep./ICASE; N 88—33).
15. Oertel H. Coherent structures producing Mach waves inside and outside of the supersonic jet // Structure of complex turbulent shear flow: Symp. IUTAM, Marseille, 1982.— Berlin e. a.: Springer, 1983.

г. Новосибирск

Поступила 20/X 1989 г.,
в окончательном варианте — 16/II 1990 г.

УДК 517.958, 551.324

С. И. Сенашев, В. А. Чугунов

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИНТОВОМ ДВИЖЕНИИ БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Для любых уравнений, а особенно для тех, которые описывают движение реальных сред, наряду с численными методами решения очень важны точные решения. Они позволяют выявить качественные особенности изучаемых явлений, построить асимптотические решения конкретных задач, а в некоторых ситуациях найти и сами

решения. В предлагаемой работе, основываясь на методах группового анализа дифференциальных уравнений, построены два класса точных решений и дана их механическая интерпретация. Причем второй класс точных решений используется для построения замкнутого решения задачи о винтовом движении бингамовской жидкости между двумя соосными цилиндрами.

1. Групповые свойства уравнений медленного стационарного изотермического течения вязкопластической среды. Система уравнений, описывающая медленное течение вязкопластической среды, может быть записана как [1, 2]

$$(1.1) \quad \nabla_i \tau^{hi} = \nabla^h H;$$

$$(1.2) \quad \nabla_i v^i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где v^i — компоненты вектора скорости; $\tau^{hi} = 2 \left(\eta + \frac{\tau_0}{h} \right) e^{hi}$; $e^{hi} = \frac{1}{2} \times (\nabla^h v^i + \nabla^i v^h)$; $h = \left[2 \sum_{k,i} (e^{ki})^2 \right]^{1/2}$; τ^{hi} — компоненты тензора напряжений; e^{hi} — компоненты тензора скоростей деформаций; H — приведенное давление; η — вязкость; τ_0 — предельное напряжение сдвига.

Пользуясь методикой [3, 4], найдем группу непрерывных преобразований, допускаемых системой (1.1), (1.2), после исключения из нее компонент тензора напряжений. Она порождается операторами

$$(1.3) \quad \begin{aligned} X_i &= \partial_{x_i}, \quad Y_i = \partial_{v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad S = \partial_H, \\ N &= x_i \partial_{x_i} + v^i \partial_{v_i}, \quad T_1 = x_2 \partial_{v_3} - x_3 \partial_{v_2}, \\ T_2 &= x_3 \partial_{v_1} - x_1 \partial_{v_3}, \quad T_3 = x_1 \partial_{v_2} - x_2 \partial_{v_1}, \\ Z_1 &= x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + v^2 \partial_{v_3} - v^3 \partial_{v_2}, \\ Z_2 &= x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3} + v^3 \partial_{v_1} - v^1 \partial_{v_3}, \\ Z_3 &= x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + v^1 \partial_{v_2} - v^2 \partial_{v_1}. \end{aligned}$$

Алгебра Ли (1.3) есть подалгебра специального вида алгебры Ли, допускаемой уравнениями пластичности с условием текучести Мизеса [5]. Это позволяет сразу строить решения, пользуясь таблицами, приведенными в [5].

2. Инвариантные решения. Построим инвариантное решение на подгруппе $X_3 + \alpha Y_3 + \beta T_3 + 2C_1 S$. После элементарных преобразований это решение приобретает следующую форму:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v^1 &= A(x_2^2 - x_1^2 - 2x_3^2) - 2Bx_1x_2 - Cx_1 + Dx_2x_3, \\ v^2 &= -2Ax_1x_2 + B(x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2) - Cx_2 - Dx_1x_3, \\ v^3 &= \psi(x_2, x_3) + 4Ax_1x_3 + 4Bx_2x_3 + 2Cx_3, \\ H &= f(x_1, x_2) + 2C_1x_3, \quad A, B, C, D, C_1 - \text{const.} \end{aligned}$$

Здесь функции ψ , f определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\eta + \frac{\tau_0}{h} \right) (Dx_2 + \psi_{,1}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\eta + \frac{\tau_0}{h} \right) (-Dx_1 + \psi_{,2}) \right] &= 2C_1, \\ h^2 &= [(4Ax_1 + 4Bx_2 + 2C)^2 + (Dx_2 + \psi_{,1})^2 + (-Dx_1 + \psi_{,2})^2], \\ f(x_1, x_2) &= \tau^{11}. \end{aligned}$$

Это решение можно использовать для анализа папряжепно-деформированного состояния вязкопластического стержня, который деформируется нагрузками, приложенными на концах и эквивалентными продольной силе, крутящему и изгибающему моментам.

Пусть $D = 0$, $\psi = \text{const}$, тогда поле скоростей имеет вид

$$\begin{aligned} v^1 &= A(x_2^2 - x_1^2 - 2x_3^2) - 2Bx_1x_2 - Cx_1, \\ v^2 &= -2Ax_1x_2 + B(x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2) - Cx_2, \\ v^3 &= Ax_1x_2 + Bx_2x_3 + Cx_3, \end{aligned}$$

а компоненты девиатора тензора напряжений равны

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \tau^{22} = -\eta(4Ax_1 + 4Bx_2 + 2C) - \tau_0\kappa/\sqrt{2}, \\ \tau^{33} &= -2\tau^{11}, H = \tau^{11} + 2C_1x_3 + \text{const} \\ (\kappa &= \text{sign}(4Ax_1 + 4Bx_2 + C)). \end{aligned}$$

В рассмотренном случае среда находится всюду в деформированном состоянии, исключая плоскость $2Ax_1 + 2Bx_2 + C = 0$, которая не деформируется. Поэтому эту плоскость можно принять за жесткую плиту, которая деформирует полупространство $2Ax_1 + 2Bx_2 + C < 0$.

Пусть теперь в решении (2.1) $A = B = D = 0$. В этом случае поле скоростей следующее:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v^1 &= -Cx_1, v^2 = -Cx_2, v^3 = 2Cx_3 + \psi(x_1, x_2), \\ H &= \tau^{11} + C_1x_3 + \text{const}, \end{aligned}$$

а функция ψ определяется из уравнения

$$(2.3) \quad \eta\Delta\psi + \tau_0 \operatorname{div} \frac{\nabla\psi}{\sqrt{1 + (\nabla\psi)^2}} = 2C_1,$$

где для удобства считаем $C = 1/\sqrt{6}$.

Пусть $\psi = \psi(x_1)$, тогда решение (2.2) обобщает решение Мясникова [6] о сдавливании вязкопластического слоя жесткими плитами на пространственный случай. Поскольку соответствующее исследование ничем принципиально не отличается от [6], то здесь оно не приводится.

Пусть $\psi = \psi(r)$, где r, θ — полярные координаты. Уравнение на искомую функцию имеет вид

$$Z'_r + \frac{1}{r}Z = 2C_1, \quad Z = \eta\psi' + \frac{\tau_0\psi'}{\sqrt{1 + (\psi')^2}},$$

из него для определения функции ψ' получим алгебраическое уравнение

$$(2.4) \quad \psi'^4 - 2\psi'^3K + \psi'^2(K^2 + 1 - S^2) - 2\psi'K + K^2 = 0$$

$$(K = C_2/(\eta r) + C_1r/\eta, C_2 = \text{const}, S = \tau_0/\eta).$$

Ясно, что нахождение решения уравнения (2.4) в явном виде затруднительно. Поэтому предположим, что $S \gg 1$, и будем искать решение этого уравнения, разлагая его по отрицательным степеням параметра S . Пусть $\psi' = A + BS^{-1} + O(S^{-2})$. Подставляя это соотношение в (2.4), находим решение

$$A = \frac{C_1r^2 + C_2}{\sqrt{r^2 - (C_1r^2 + C_2)^2}}, \quad B = \frac{A(1 + A^2)}{\sqrt{1 + A^2 + AK}},$$

которое можно использовать для описания вязкопластического течения в сжимающейся трубе.

Построим решение на двухпараметрической подгруппе $\langle X_3 + \beta S, Z_3 + \alpha S \rangle$. Его следует искать в виде $(r\theta z$ — цилиндрическая система координат)

$$H = \alpha\theta + \beta z + p(r), v_r = v_r(r), v_\theta = v_\theta(r), v_z = v_z(r).$$

Для простоты положим $v_r = 0$ и в результате имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r}, \quad \beta = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{1z}}{r},$$

отсюда вытекает

$$(2.5) \quad \tau_{r\theta} = \alpha + 2C_2 r^{-2}, \quad \tau_{rz} = \beta r + 2C_1 r^{-1}, \quad C_i = \text{const.}$$

Из (2.5) нетрудно найти выражения

$$(2.6) \quad v'_z(\eta + \tau_0/h) = -0,5\beta r + C_1 r^{-1}, \\ (v'_0 - v_0/r)(\eta + \tau_0/h) = -0,5\alpha + C_2 r^{-2} (h^2 = v'_z{}^2 + (v'_0 - v_0/r)^2).$$

Обозначая $\tau_{r\theta} = \lambda\tau_{rz}$, находим $\lambda v'_z = (v'_0 - v_0/r)$. Это соотношение подставляем в (2.6) и получаем квадратуру для определения v_z : $v'_z = -\frac{\tau_0}{\eta V \sqrt{1+\lambda^2}} - \frac{1}{\eta} \left(\frac{C_1}{r} - \frac{1}{2} \beta r \right)$, а v_0 находим из уравнения $v'_0 - v_0/r = \lambda v'_z$, которое легко интегрируется.

Воспользуемся полученными результатами для построения решения задачи о винтовом движении бингамовской жидкости между двумя соосными цилиндрами. Такая задача возникает, например, при гидродинамических исследованиях в бурении скважин [1, 7, 8].

3. Винтовое движение вязкопластической среды между двумя соосными цилиндрами. Рассмотрим следующую схему течения. Между двумя соосными вертикальными цилиндрами течет вязкопластическая жидкость, описываемая моделью Шведова — Бингама, под действием заданного перепада давления Δp . Внутренняя труба вращается с постоянной угловой скоростью ω .

В качестве системы отсчета выберем цилиндрическую систему координат. Ось z направим вдоль оси трубы, а r — по ее радиусу. Ограничимся исследованием ламинарных режимов течений. Тогда в данной системе координат составляющая скорости на ось r равна нулю, т. е. $v_r = 0$. Кроме того, в силу осевой симметрии искомые величины не зависят от угла θ . Будем полагать, что отношение радиуса внешнего цилиндра r_3 к длине труб L — величина малая, т. е. $\varepsilon = r_3/L \ll 1$. В частности, для бурящихся скважин это условие выполняется. Пользуясь методами теории подобия и анализа размерностей, можно показать, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ общая система уравнений, описывающая течение вязкопластической среды, запишется в виде

$$(3.1) \quad K_\tau \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = (1 + \text{И}) \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{\theta r}}{\partial R} + \frac{2\bar{\tau}_{\theta r}}{R} \right];$$

$$(3.2) \quad K_\tau \frac{\partial V_z}{\partial t} = (1 + \text{И}) \left[2 + \frac{\partial \bar{\tau}_{rz}}{\partial R} + \frac{\bar{\tau}_{rz}}{R} \right];$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{(r_0 \omega)^2 \rho}{\Delta H} \frac{V_\theta^2}{R}.$$

Здесь $V_\theta = v_\theta/r_0\omega$; $V_z = v_z/v_0$; $H = (p + \rho g z)/(p_0 - p_1 - \rho g L)$;

$$t = \frac{\tau}{t_0}, \quad \bar{\tau}_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{T_{rz}}, \quad \bar{\tau}_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{T_{r\theta}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad d = r_3 - r_0;$$

$$h_0^2 = \left(\frac{v_0}{d} \right)^2 + \left(\frac{\omega r_0}{d} \right)^2; \quad \Delta H = p_0 - p_1 - \rho g L;$$

$$T_{rz} = \frac{\eta v_0}{d} (1 + \text{И}); \quad T_{r\theta} = \frac{r_0 \omega \eta}{d} (1 + \text{И});$$

p_0, p_1 — давления на входе и выходе канала; r_0, r_3 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров; ρ — плотность среды; t_0 — временной масштаб; τ — время; v_0 — масштаб для продольной скорости, определяемый из уравнения

$$(3.4) \quad WR_0 = K_0 \sqrt{1 - (1 - K_0)^2 La^2 / (1 - K_0)},$$

где $R_0 = r_0/d$; $La = \Delta Hd/(2\tau_0 L)$ — критерий Лагранжа; $W = \omega\eta/\tau_0$ — безразмерная угловая скорость; $K_v = v_0/\omega_0$; $\omega_0 = \Delta Hd^2/(2\eta L)$ — характерная скорость течения в случае, когда предельное напряжение сдвига $\tau_0 = 0$; g — ускорение свободного падения; $I = d\tau_0/\eta \sqrt{v_0^2 + (\omega r_0)^2}$ — критерий Ильюшина; $K_\tau = d^2\rho/\eta t_0$. Величина $d^2\rho/\eta$ характеризует время перестройки скоростных профилей в потоке. Если она значительно меньше характерного времени процесса t_0 , то $K_\tau \ll 1$ и можно считать процесс стационарным. В частности, это условие выполняется при течении бурового раствора в процессе бурения.

Рассмотрим ситуацию, когда $K_\tau \ll 1$. Тогда, очевидно, что система (3.1)–(3.3) совпадает с фактор-системой для инвариантного решения $\langle X_3 + \beta S, Z_3 + \alpha S \rangle$, если в последней положить $\alpha = 0$ и $\beta = -2$. Таким образом, рассматриваемое инвариантное решение можно использовать для описания стационарного течения вязкопластической жидкости между двумя соосными цилиндрами, когда внутренний вращается с постоянной угловой скоростью.

Для отыскания соответствующих постоянных, входящих в инвариантное решение, необходимо задать граничные условия, вид которых зависит от типа течения. Будем различать два вида течения, которые отличаются друг от друга наличием жесткого ядра, где напряжения не превышают τ_0 .

Рассмотрим сначала течение, в котором существует ядро. В этом случае граничные условия можно записать в виде

$$(3.5) \quad R = R_0, V_\theta = 1, V_z = 0;$$

$$(3.6) \quad R = R_3, V_\theta = 0, V_z = 0;$$

$$(3.7) \quad R = R_1, |\tau| = \tau_0 \Leftrightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} = \frac{\partial V_z}{\partial R} = 0;$$

$$(3.8) \quad R = R_2, |\tau| = \tau_0 \Leftrightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} = \frac{\partial V_z}{\partial R} = 0;$$

$$(3.9) \quad \left. \frac{V_\theta}{R_1} \right|_{R=R_1} = \left. \frac{V_\theta}{R_2} \right|_{R=R_2}, \quad V_z|_{R=R_1} = V_z|_{R=R_2};$$

$$(3.10) \quad (R_2^2 - R_1^2) = -R_1 \bar{\tau}_{rz} - R_2 \bar{\tau}_{rz};$$

$$(3.11) \quad R_1^2 \bar{\tau}_{\theta r} = R_2^2 \bar{\tau}_{\theta r}$$

($R_1 = r_1/d$, $R_2 = r_2/d$, r_1, r_2 — радиусы ядра). Интегрируя полученные в п. 2 уравнения для скоростей и находя из граничных условий соответствующие постоянные, имеем

$$(3.12) \quad V = -\frac{R^2 - R_0^2}{2} + R_1^2 m \ln \frac{R}{R_0} - \frac{R_1^2}{2} J_z \left[\left(\frac{R}{R_1} \right)^2, \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right], \quad R_0 \leq R \leq R_1;$$

$$(3.13) \quad V = -\frac{R^2 - R_3^2}{2} + R_1^2 m \ln \frac{R}{R_3} - \frac{R_1^2}{2} J_z \left[\left(\frac{R}{R_1} \right)^2, \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^2 \right], \quad R_2 \leq R \leq R_3;$$

$$(3.14) \quad V_\theta = \frac{R}{R_0} + \left\{ \frac{1}{2} R_1^2 \left(\frac{R}{R_0^2} - \frac{1}{R} \right) - \frac{R}{2} J_\theta \left[\left(\frac{R}{R_1} \right)^2, \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \right\} \frac{\cos \alpha}{WR_0},$$

$$R_0 \leq R \leq R_1;$$

$$(3.15) \quad V_\theta = \left\{ \frac{1}{2} R_1^2 \left(\frac{R}{R_3^2} - \frac{1}{R} \right) - \frac{R}{2} J_\theta \left[\left(\frac{R}{R_1} \right)^2, \left(\frac{R_3}{R_1} \right)^2 \right] \right\} \frac{\cos \alpha}{WR_0}, \quad R_2 \leq R \leq R_3,$$

где $m = x + 1 - \sqrt{\frac{1+x(1+La_1^2)}{La_1^2}}$; $La_1 = La R_0$;

$$J_z[u, v] = \int_v^u \frac{(m - \xi) d\xi}{\sqrt{La_1^2 (m - \xi)^2 \xi + \cos^2 \alpha}};$$

$$J_0[u, v] = \int_v^u \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\text{La}_1^2 (m - \xi)^2 \xi + \cos^2 \alpha}};$$

$$V = V_z / (1 + \text{И}); \sin \alpha = (m - 1) \text{La}_1; \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

а размеры ядра находятся из двух трансцендентных уравнений:

$$(3.16) \quad 1 + \frac{K_R - 1}{y} - x + m \ln \frac{x}{K_R} + J_z \left(1, \frac{1}{y} \right) - J_z \left(x, \frac{K_R}{y} \right) = 0;$$

$$(3.17) \quad W = \frac{\cos \alpha}{2} \left\{ 1 - y \frac{K_R - 1}{K_R} - \frac{1}{x} + J_\epsilon \left[1, \frac{1}{y} \right] - J_\epsilon \left[x, \frac{K_R}{y} \right] \right\}.$$

Здесь $K_R = (R_3/R_0)^2$; $x = (R_2/R_1)^2$; $y = (R_1/R_0)^2$.

При заданном перепаде давлений La увеличение скорости вращения W влечет рост напряжений в потоке, а следовательно, ширина ядра $\delta = R_2 - R_1$ убывает. Таким образом, теоретически возможен такой режим течения, когда жесткое ядро отсутствует.

В этом случае нетрудно получить

$$(3.18) \quad V = -\frac{R^2 - R_0^2}{2} + R_0^2 x_0 \ln \frac{R}{R_0} - \frac{(\sqrt{K_R} - 1)}{2\text{La}} J_z^0 \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^2, 1 \right];$$

$$(3.19) \quad V_0 = \frac{R}{R_0} + \frac{\text{La} y_0}{2W} \left(R - \frac{R^2}{R} \right) - \frac{y_0 R}{2WR_0} J_\Omega^0 \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^2, 1 \right], \quad R_0 \leq R \leq R_3,$$

$$\text{где } J_z^0[u, v] = \int_v^u \frac{(x_0 - \xi) d\xi}{\sqrt{(x_0 - \xi)^2 \xi + y_0^2}}; \quad J_\Omega^0[u, v] = \int_v^u \frac{d\xi}{\xi \sqrt{(x_0 - \xi)^2 \xi + y_0^2}};$$

x_0, y_0 — неизвестные параметры, определяемые уравнениями

$$(3.20) \quad \text{La} = \frac{(\sqrt{K_R} - 1)}{(1 - K_R + x_0 \ln K_R)} J_z^0[K_R, 1];$$

$$(3.21) \quad W = 0,5 y_0 \{ J_\Omega^0[K_R, 1] - \text{La} (\sqrt{K_R} + 1) / K_R \}.$$

Отметим, что формулы (3.18)–(3.21) имеют место только тогда, когда выполняется неравенство $\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left[x_0 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right]^2 + y_0^2 > \frac{1}{(\text{La} R_0)^2}$.

Последнее означает, что во всех точках потока напряжение превышает предельное напряжение сдвига.

4. Влияние вращения внутреннего цилиндра на коэффициент гидравлического сопротивления. Пользуясь формулами (3.12), (3.13), нетрудно найти выражение для коэффициента гидравлического сопротивления кольцевой трубы для структурного режима течения:

$$\xi = \frac{64}{\text{Re}} f(R_0, R_3, R_1, R_2, W),$$

$$f = (R_3 + R_0) / (R_1^4 \Omega), \quad \text{Re} = \beta \bar{v}_z (2d) / \eta,$$

$$\Omega = \left(\frac{K_R}{y} - x \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{y} + 1 - 2x \right) + 2m \left(x \ln \frac{K_R}{x} - 1 + \frac{1 - K_R}{y} + x \right) + 2 \left\{ J_\Omega \left[\frac{K_R}{y}, x \right] - J_\Omega \left[\frac{1}{y}, 1 \right] - J_z \left[1, \frac{1}{y} \right] (x - 1) \right\},$$

$$J_\Omega[u, v] = \int_v^u \frac{(t - v)(m - t) dt}{\sqrt{\text{La}_1^2 (m - t)^2 t + \cos^2 \alpha}}.$$

Аналогично получим выражение для ξ , ξ/ξ^* когда жесткого ядра нет:

$$\xi = (64/\text{Re})f(R_0, R_3, W),$$

$$f = (R_3 + R_0)/(R_0^4 \Omega),$$

$$\Omega = -(K_R - 1)^2 + 2x_0(K_R \ln K_R - K_R + 1) -$$

$$\frac{2(\sqrt{K_R} - 1)}{\text{La}} \int_1^{K_R} \frac{(K_R - t)(x_0 - t) dt}{\sqrt{(x_0 - t)^2 + y_0^2}}.$$

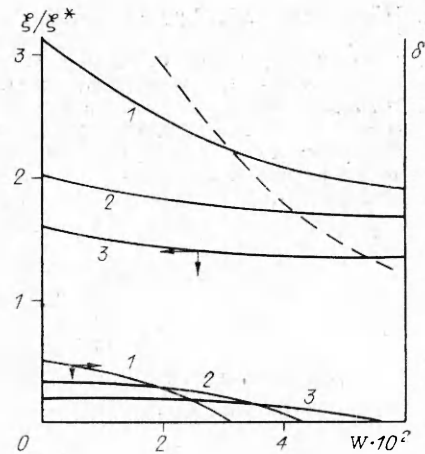
По найденным формулам были проведены расчеты. Результаты представлены при $(R_3/R_0)^2 = 1,23$ на рисунке, где $\delta = R_2 - R_1$,

$$\xi^* = \frac{64}{\text{Re}} \frac{(R_3 - R_0)^2}{[R_3^2 + R_0^2 + (R_3^2 - R_0^2)/\ln(R_0/R_3)]},$$

ξ^* — коэффициент гидравлического сопротивления ньютоновской жидкости в кольцевом канале, линии 1—3 отвечают $\text{La} = 2, 3, 5$, штриховая линия — границе структурного режима течения. Видно, что в случае структурного или ламинарного режима течения коэффициент гидравлического сопротивления только убывает с ростом скорости вращения внутреннего цилиндра. Это означает, что при заданном расходе, если реализуется структурный или ламинарный режим течения, перепад давлений должен убывать с ростом скорости вращения. Отметим, что чем больше скорость вращения, тем ближе коэффициент гидравлического сопротивления бингамовской жидкости к соответствующему коэффициенту ньютоновской жидкости. Таким образом, можно заключить, что большие скорости вращения приближают поведение бингамовской жидкости к ньютоновской. Это связано с тем, что с увеличением угловой скорости вращения внутреннего цилиндра растет общее напряжение в потоке, которое становится значительно больше предельного напряжения сдвига.

Сделанный вывод позволяет также объяснить наблюдаемое [2, 8] повышение давления с ростом скорости вращения. Следует подчеркнуть, что эти объяснения надо искать из анализа турбулентного режима течения бингамовской жидкости. Анализируя зависимость ξ от Re и критерия Хендстрема $\text{He} = \text{ViRe}$ (Vi — критерий Бингама), приведенную в [8], замечаем, что при $\text{He} < 5 \cdot 10^5$ коэффициент гидравлического сопротивления меньше, чем у ньютоновской жидкости, и наоборот при $\text{He} > 5 \cdot 10^5$. Значит, если указанный механизм сближения свойств бингамовской и ньютоновской жидкостей сохраняется и при турбулентном режиме, то становится очевидным тот факт, что перепад давлений при турбулентном режиме течения может возрастать и убывать с увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра. Так, если жидкость характеризуется $\text{He} < 5 \cdot 10^5$, то рост скорости вращения увеличивает коэффициент гидравлического сопротивления, а значит, и перепад давлений. Если же $\text{He} > 5 \cdot 10^5$, то происходит все наоборот: рост скорости вращения способствует уменьшению перепада давлений.

Интересно также отметить нетривиальное поведение размеров ядра потока. С повышением продольного перепада давлений, как и следовало ожидать, уменьшается толщина ядра. Однако при этом структурный режим течения сохраняется при больших скоростях.



ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. — Баку, 1959.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1984. — Т. 2.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
5. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашев С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности.— Новосибирск: Наука, 1985.
6. Мясников В. П. О сдавливании вязкопластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. Мех. и машиностроение.— 1963.— № 4.
7. Мовсумов А. А. Гидродинамические основы совершенствования технологии проводки глубоких скважин.— М.: Недра, 1976.
8. Маковей Н. Гидравлика бурения.— М.: Недра, 1986.

г. Красноярск, г. Казань

Поступила 26/III 1990 г.

Г. Ю. Степанов

**О СТАТЬЕ Б. А. ЛУГОВЦОВА
«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ
В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ
СОХРАНЕНИЯ» [1]**

Б. А. Луговцов рассматривает схему течения идеальной несжимаемой жидкости через центробежную форсунку с цилиндрическим насадком, изображенную на рис. 1, который с незначительными изменениями повторяет рис. 3 из [1]. Стенки 1—1 и 2—2 удалены в бесконечности, закрутка потока потенциальна ($v_\varphi = \Gamma/(2\pi r)$, $\Gamma = \text{const}$), параметр закрутки $A = R\Gamma/(2Q) = \text{const}$, свободная поверхность полого ядра вихря с давлением $p_2 = \text{const} = 0$ в меридиональном сечении монотонна (без стоячих волн).

Из интеграла Бернулли (который в [1] неверно назван интегралом энергии) на свободной поверхности при $z = -\infty$ и $z = \infty$

$$v_{1\varphi}^2/2 = v_{2\varphi}^2/2 + v_{2z}^2/2 = B = \text{const}$$

можно найти коэффициент расхода $\mu = Q/(\pi \bar{R}^2 \sqrt{2B})$ и $\bar{R}_1 \equiv R_1/R = A\mu$ как функции A и $\bar{R}_2 = R_2/R$. Вторая из них изображена на рис. 2 сплошными кривыми. Однако в опытах наблюдаются однозначные зависимости μ , \bar{R}_1 и \bar{R}_2 от A . На рис. 2 и 4 ∇ — максимумы на кривых.

В 1943 г. Г. Н. Абрамович и независимо в 1948 г. Дж. Тейлор предположили, что при каждом заданном параметре A реализуется течение с максимальным коэффициентом расхода $\mu(\bar{R}_2)$ (принцип максимума расхода (ПМР))*.

$$2\bar{R}_2^4 - A^2(1 - \bar{R}_2^2)^3 = 0, \quad \mu = (1 - \bar{R}_2^2)^{3/2}(1 + \bar{R}_2^2)^{-1/2}.$$

Как известно из гидравлической теории водослива с широким порогом и линейной задачи о разрушении плотины на горизонтальном основании, ПМР соответствует критическому течению и следует из уравнений Эйлера и неразрывности. Можно показать, что аналогично в предположениях малой толщины h слоя жидкости в насадке форсунки и близости поверхности ядра вихря к цилиндрической в выходном сечении должно быть критическое течение с числом Фруда

$$\begin{aligned} Fr \equiv v_{2z} / \sqrt{h v_{2\varphi}^2 / R} &= 1 + O(\bar{h}^{3/2}), \quad \bar{h} \equiv h/R \equiv 1 - \bar{R}_2^2 = \\ &= (2A)^{-2/3} + O(A^{-4/3}), \end{aligned}$$

чему при заданном параметре A отвечает с точностью до величин порядка $\bar{h}^{5/2}$ максимальный коэффициент расхода μ .

При реальных достаточно больших параметрах закрутки ($A \geq 2$) ПМР имеет бесспорные в гидравлическом приближении теоретические основания и многочисленные экспериментальные подтверждения и яв-

* Решением № 389 от 18.10.90 Госкомизобретений ПМР признан входящим в открытие Г. Н. Абрамовича, Л. А. Клячко, И. И. Новикова и В. И. Скобелкина «Закономерность расхода жидкости в закрученном потоке» с приоритетом в январе 1948 г.