

УДК 533.06

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построен новый класс точных решений, обладающих функциональным произволом и описывающих пространственные движения политропного газа, на основе инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа. В полученных решениях скорость является линейной функцией части пространственных координат. Решения описывают как непрерывный разлет газа, так и движения с коллапсом плотности в конечный момент времени.

Введение. Инвариантные подмодели ранга 2 уравнений газовой динамики эволюционного типа описывают точные решения, зависящие от двух независимых переменных: времени и некоторой комбинации пространственных координат. Эти подмодели задаются замкнутой системой дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве искомых функций в них выступают инвариантные компоненты вектора скорости, а также плотность и давление. Для уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния имеется 10 существенно различных инвариантных подмоделей рассматриваемого типа, в частности подмодель одномерных движений газа. В [1] построены канонические формы этих 10 подмоделей, в [2] изучены их групповые свойства.

В то же время конкретные решения указанных подмоделей исследованы недостаточно полно. Для выявления особенностей, присущих каждой подмодели, был выбран класс решений с линейной зависимостью одной из инвариантных компонент вектора скорости от инвариантной независимой переменной. Такие решения для подмодели одномерных движений газа являются классическими [3]. Для остальных девяти подмоделей можно дать следующую общую характеристику полученных решений. Во всех случаях интегрирование сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. В исходных “физических” переменных этим решениям соответствуют движения с линейной зависимостью компонент вектора скорости от части пространственных переменных (в общем случае такие движения изучались в [4]). Решения описывают непрерывный разлет газа, коллапс плотности в конечный момент времени, колебательные режимы движения. Ниже описаны траектории отдельных частиц на полученных решениях, что позволяет получить представление о характере движения, задаваемого подмоделями. Среди решений выделяются два основных класса: движения, в которых траектории частиц являются плоскими кривыми, и движения с закруткой. Более подробное описание этих классов приведено ниже.

1. Предварительные сведения. Уравнения газовой динамики записываются в стандартных обозначениях вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, давления p и плотности ρ . Все функции зависят от пространственных координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и времени t . Функция $A(p, \rho)$

задает уравнение состояния газа

$$\begin{aligned} D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + A(p, \rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ D = \partial_t + u \partial_x + v \partial_y + w \partial_z. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Известно, что все инвариантные подмодели эволюционного типа ранга 2 для уравнений газовой динамики могут быть записаны в следующем каноническом виде [5]:

$$\begin{aligned} U_t + UU_\lambda + b(t)\rho^{-1}p_\lambda = a_1, \quad V_t + UV_\lambda = a_2, \quad W_t + UW_\lambda = a_3, \\ \rho_t + U\rho_\lambda + \rho U_\lambda = \rho a_4, \quad p_t + Up_\lambda + A(p, \rho)U_\lambda = A(p, \rho)a_4. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{U} = (U, V, W)$ — инвариантный вектор скорости; t, λ — инвариантные независимые переменные. Правые части a_1, \dots, a_4 зависят от t, λ и \mathbf{U} . Величины λ, \mathbf{U} , а также правые части a_1, \dots, a_4 выражаются через исходные переменные в каждой подмодели [1]. Анализ групповых свойств всех рассматриваемых подмоделей проведен в работе [2].

Ниже полностью описан класс решений подмоделей (1.2), в которых компонента U инвариантного вектора скорости \mathbf{U} линейно зависит от переменной λ . Конструктивное описание этого класса решений возможно при выборе уравнения состояния политропного газа.

2. Интегрирование подмоделей. В уравнениях (1.2) делается переход к лагранжевым координатам t, ξ (ξ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\xi_t + U\xi_\lambda = 0$). С использованием функции $M = \partial\lambda/\partial\xi$ при переходе к лагранжевым переменным производные пересчитываются следующим образом: $h_t + Uh_\lambda \rightarrow h_t, h_\lambda \rightarrow M^{-1}h_\xi$. Компонента скорости в новых переменных есть $U = \lambda_t$. Переписывая (1.2) в лагранжевых переменных, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{tt} + b(t)p_\xi/(\rho M) = \tilde{a}_1, \quad V_t = \tilde{a}_2, \quad W_t = \tilde{a}_3, \\ \rho_t + M^{-1}\rho M_t = \rho \tilde{a}_4, \quad p_t + M^{-1}A(p, \rho)M_t = A(p, \rho)\tilde{a}_4. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Правые части $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_4$ есть записанные в лагранжевых переменных функции a_1, \dots, a_4 . Ниже предполагается, что газ удовлетворяет политропному уравнению состояния: $A(p, \rho) = \gamma p$ (γ — показатель адиабаты). Из уравнений (2.1) следует

$$(\ln \rho M)_t = \tilde{a}_4, \quad (\ln p M^\gamma)_t = \gamma \tilde{a}_4. \quad (2.2)$$

Второе и третье уравнения в (2.1), а также (2.2) с конкретными функциями в правых частях для всех девяти подмоделей интегрируются в явном виде. Далее используем предположение о линейности зависимости $U(\lambda)$. В лагранжевых переменных это означает, что $M = M(t)$:

$$\lambda = M(t)\xi, \quad U = \dot{M}\xi. \quad (2.3)$$

Здесь и далее точка и штрих обозначают дифференцирование функций, зависящих только от t и ξ соответственно.

Замечание 1. Неоднородная зависимость $\lambda = M(t)\xi + h(t)$ сводится к однородной, так как действием группы непрерывных преобразований, допускаемой (1.1), во всех подмоделях можно добиться $h(t) \equiv 0$.

Подставляя (2.3) в первое уравнение (2.1), получим ключевое уравнение

$$\ddot{M}\xi + b(t)\rho^{-1}M^{-1}p_\xi = \tilde{a}_1. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) после подстановки функций V, W, p, ρ , определенных из (2.1) и (2.2), имеет следующую структуру:

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(\xi) = 0, \quad (2.5)$$

где векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3, 4$). Отметим, что уравнения вида (2.5) характерны для задач, связанных с исследованием переопределенных систем дифференциальных уравнений (групповой классификации, частично инвариантных решений, дифференциальных связей, априорных предположений о виде решения). Основная идея, позволяющая произвести в (2.5) разделение переменных, предложена в [6, с. 144] при исследовании конкретного соотношения, возникающего в задаче групповой классификации уравнений газовой динамики. В общем виде лемма о разделении переменных в уравнении (2.5) публикуется здесь впервые с согласия ее автора.

Лемма Л. В. Овсянникова. *Соотношение (2.5) выполняется, если и только если существуют число k ($0 \leq k \leq n$), разбиения векторов $\mathbf{a} = (\mathbf{a}', \mathbf{a}'')$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}', \mathbf{b}'')$ ($\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{R}^k$; $\mathbf{a}'', \mathbf{b}'' \in \mathbb{R}^{n-k}$) и постоянная $((n-k) \times k)$ -матрица C , для которых*

$$\mathbf{a}'' = C\mathbf{a}', \quad \mathbf{b}' = -C^T\mathbf{b}'', \quad (2.6)$$

где C^T — транспонированная матрица C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть линейная оболочка $\mathcal{L}\{\mathbf{a}(t)\}$ имеет размерность k , $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)^T$; тогда найдутся такие k точек t_j ($j = 1, \dots, k$), что $(n \times k)$ -матрица $M = (a^i(t_j))$ (i — номера строк) будет иметь ранг k . Предположим, что ее ранговый минор дается $(k \times k)$ -матрицей A ($\det A \neq 0$), а остальные строки образуют $((n-k) \times k)$ -матрицу B . Пусть \mathbf{a}' — те строки матрицы M , которые дают A , и \mathbf{a}'' — остальные строки. Дополнение матрицы M столбцом $(a^i(t))$ не меняет ее ранга. Поэтому найдется такой вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^k$, для которого

$$\mathbf{a}' = A\mathbf{r}, \quad \mathbf{a}'' = B\mathbf{r}$$

и, значит, $\mathbf{r} = A^{-1}\mathbf{a}'$. Отсюда следует первое соотношение (2.6) с $((n-k) \times k)$ -матрицей $C = BA^{-1}$. Тогда (2.5) принимает вид $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' + (C\mathbf{a}') \cdot \mathbf{b}'' = 0$ или $\mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' + C^T\mathbf{b}'') = 0$, откуда в силу $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}') = k$ следует (2.6). Достаточность (2.6) очевидна.

При решении классификационных задач приходится перебирать возможные значения $k = 0, \dots, n$, разбиения векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} и матрицы C с неопределенными элементами.

Ниже подмодели разбиваются на три типа в зависимости от размерности допускаемой группы непрерывных преобразований. К первому типу относятся подмодели 2.21, 2.22, 2.24 и 2.25 (сохранена нумерация из работы [1]). Бесконечномерная часть допускаемой ими группы содержит две произвольные функции лагранжевой переменной. Ко второму типу относятся подмодели 2.8, 2.9, 2.10, для которых допускаемая группа содержит одну произвольную функцию. Наконец, подмодели 2.20, 2.23 допускают лишь конечномерную группу. Оказывается, что изначально формальное разбиение подмоделей по типам подтверждается сходством физических характеристик получаемых решений.

3. Подмодели первого типа. ПОДМОДЕЛЬ 2.21. Анализ данной подмодели проведен в [7]. Представление решения:

$$u = U, \quad v = \frac{V + z + t(W + y)}{t^2 + 1}, \quad w = \frac{-W - y + t(V + z)}{t^2 + 1}, \quad \lambda = x.$$

В (1.2) $b = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = -2t/(t^2 + 1)$. Из второго и третьего уравнений в (2.1), а также из (2.2) следует

$$V = V_0(\xi), \quad W = W_0(\xi), \quad \rho = \frac{f(\xi)}{M(t^2 + 1)}, \quad p = \frac{P(\xi)}{M^\gamma(t^2 + 1)^\gamma}. \quad (3.1)$$

Здесь и далее V_0, W_0, P, f — произвольные функции. Разделяя с использованием леммы переменные в (2.4), получаем для M уравнение типа уравнения Эмдена — Фаулера

$$\ddot{M}M^\gamma(t^2 + 1)^{\gamma-1} = \alpha, \quad \alpha = \text{const} \quad (3.2)$$

и следующее ограничение на функции P и f : $P'(\xi) = \alpha \xi f(\xi)$. Траектория частицы, стартовой в начальный момент $t_0 = 0$ из точки с координатами (x_0, y_0, z_0) , определяется формулами

$$x = x_0 M(t), \quad y = y_0 + tz_0 + tV_0(x_0), \quad z = z_0 - ty_0 - tW_0(x_0).$$

Здесь и далее будем использовать произвол в выборе α для выполнения начального условия $M(t_0) = 1$.

ПОДМОДЕЛЬ 2.22. Представление решения:

$$u = U, \quad v = V + y/t, \quad w = W + z/t, \quad \lambda = x.$$

Для этой подмодели в (1.2) $b = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -V/t$, $a_3 = -W/t$, $a_4 = -2/t$. После интегрирования уравнений (2.1) с учетом (2.2) находим

$$V = V_0(\xi)/t, \quad W = W_0(\xi)/t, \quad \rho = f(\xi)/(Mt^2), \quad p = P(\xi)/(M^\gamma t^{2\gamma}). \quad (3.3)$$

Для функции M имеем обобщенное уравнение Эмдена — Фаулера

$$\ddot{M} M^\gamma t^{2\gamma-2} = \alpha, \quad \alpha = \text{const}. \quad (3.4)$$

Ограничение на P и f следующее: $P'(\xi) = \alpha \xi f(\xi)$. Уравнение (3.4) имеет частное решение $M = t^k$, $k = (4 - 2\gamma)/(1 + \gamma)$. Траектории частиц определяются формулами (здесь $t_0 = 1$)

$$x = x_0 M(t), \quad y = t(y_0 + V_0(x_0)) - V_0(x_0), \quad z = t(z_0 + W_0(x_0)) - W_0(x_0). \quad (3.5)$$

ПОДМОДЕЛЬ 2.24. Представление решения:

$$u = V + (x - \beta y)/t, \quad v = W, \quad w = U, \quad \lambda = z.$$

Для этой подмодели в (1.2) $b = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -V/t + \beta W/t$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1/t$. Интегрируя (2.1) с учетом (2.2), находим

$$V = V_0(\xi)/t + \beta W_0(\xi), \quad W = W_0(\xi), \quad \rho = f(\xi)/(Mt), \quad p = P(\xi)/(M^\gamma t^\gamma). \quad (3.6)$$

Уравнение для M имеет вид

$$\ddot{M} M^\gamma t^{\gamma-1} = \alpha, \quad \alpha = \text{const}. \quad (3.7)$$

Ограничение на P и f следующее: $P'(\xi) = \alpha \xi f(\xi)$. Уравнение (3.7) имеет частное решение $M = t^k$ с $k = (3 - \gamma)(1 + \gamma)^{-1}$. Траектории частиц определяются формулами ($t_0 = 1$)

$$x = tx_0 + (1 - t)(\beta y_0 - V_0(z_0)), \quad y = y_0 - (1 - t)W_0(z_0), \quad z = z_0 M(t).$$

ПОДМОДЕЛЬ 2.25. Представление решения:

$$u = V + z, \quad v = U, \quad w = W, \quad \lambda = y.$$

Для этой подмодели в (1.2) $b = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -W$, $a_3 = a_4 = 0$. Интегрируя (2.1) с учетом (2.2), находим

$$V = V_0(\xi) - tW_0(\xi), \quad W = W_0(\xi), \quad \rho = f(\xi)/M, \quad p = P(\xi)/M^\gamma. \quad (3.8)$$

Уравнение для M имеет вид

$$\ddot{M} M^\gamma = \alpha, \quad \alpha = \text{const}. \quad (3.9)$$

Ограничение для P и f следующее: $P'(\xi) = \alpha \xi f(\xi)$. Уравнение (3.7) имеет частное решение $M = t^{2/(1+\gamma)}$. Уравнения траекторий частиц имеют вид ($t_0 = 0$)

$$x = x_0 + t(z_0 + V_0(y_0)), \quad y = y_0 M(t), \quad z = z_0 + tW_0(y_0).$$

4. Описание движения. В случае движения первого типа траектории частиц являются плоскими кривыми. Наклон и положение плоскости в пространстве определяется

начальным положением частицы. Движения в разных плоскостях подобны и определяются видом функции $M(t)$. При $M(t) \neq 0$ траектории различных частиц не пересекаются. Напротив, выполнение $M(t_*) = 0$ при некотором t_* означает наступление коллапса: плотность возрастает до бесконечности, а все частицы приходят на плоскость $\lambda = 0$.

Движение частиц газа в совокупности удобно трактовать следующим образом. Рассмотрим слой газа, заключенный между неподвижной плоской стенкой $\lambda = 0$ и подвижным поршнем $\lambda_p = \lambda_0 M(t)$, давление на котором зависит только от времени и меняется по закону, определенному формулами (3.1), (3.3), (3.6), (3.8) с $P(\xi) = P(\lambda_0) = \text{const}$. Если $M(t)$ возрастает при $t > t_0$, то поршень удаляется от стенки $\lambda = 0$ и происходит разрежение газа. В противном случае при $M(t) \rightarrow 0$ поршень приближается к стенке, что приводит к неограниченному росту плотности и давления. Эволюция слоя газа происходит следующим образом. Помимо равномерного растяжения или сжатия слоя в направлении λ , определяемом функцией $M(t)$, он претерпевает изменения и в ортогональном направлении λ плоскости. Так, в подмодели 2.21 с течением времени весь слой газа поворачивается вокруг оси λ на угол $\arctg t$ против часовой стрелки (если смотреть из начала координат) и растягивается по закону $r = r_0 \sqrt{t^2 + 1}$ (r — расстояние от точки до оси λ ; $r_0 = r(t_0)$). В остальных подмоделях поворот отсутствует; растяжение происходит в плоскости $\lambda = \text{const}$ вдоль прямых, проходящих через ось λ в подмодели 2.22, и вдоль положительного направления оси Ox в подмоделях 2.24, 2.25 линейно по времени. Функции $V_0(\xi)$, $W_0(\xi)$ задают относительное смещение плоскостей $\lambda = \text{const}$ внутри слоя. Их использование для управления геометрией движения газа покажем на примере подмодели 2.22.

В случае движения, задаваемого подмоделью 2.22, рассмотрим множество частиц, лежащих в начальный момент $t = 1$ на прямой, параллельной оси λ : $y = y_0$, $z = z_0$. Деформация этой прямой при $t > 1$ определяется функциями $V_0(x_0)$ и $W_0(x_0)$. В частности, эти функции можно выбрать так, чтобы частицы, лежащие в начальный момент $t = 1$ на прямой $y = y_0$, $z = z_0$, в момент коллапса t_* ($M(t_*) = 0$) образовывали заранее заданную кривую $y = h(s)$, $z = k(s)$ на плоскости коллапса $x = 0$:

$$V_0(x_0) = \frac{h(x_0) - t_* y_0}{t_* - 1}, \quad W_0(x_0) = \frac{k(x_0) - t_* z_0}{t_* - 1}. \quad (4.1)$$

Замечание 2. Полный прообраз точки, занимающей при $t = t_*$ на плоскости коллапса $x = 0$ положение $y = y_*$, $z = z_*$, при отображении, определяемом формулами (3.5) с функциями V_0 , W_0 из (4.1), есть

$$y = y_0 + (y_* - h(x))/t_*, \quad z = z_0 + (z_* - k(x))/t_*, \quad -\infty < x < +\infty.$$

5. Анализ уравнения для функции M . С целью построения классов точных решений уравнений (3.2), (3.4), (3.7), (3.9) для каждого из них проведена групповая классификация по показателю адиабаты γ . При этом из физических соображений рассматривались только значения $\gamma > 1$. Найденные симметрии использовались для полного или частичного интегрирования уравнений.

ПОДМОДЕЛЬ 2.21. Нетривиальный оператор $(t^2 + 1)\partial_t + tM\partial_M$ допускается лишь при $\gamma = 5/3$. В этом случае заменой $M = N(\tau)\sqrt{t^2 + 1}$, $\tau = \arctg t$ и однократным интегрированием уравнение (3.2) приводится к виду

$$\dot{N}^2 = \beta - 3\alpha N^{-2/3} - N^2 \equiv h(N), \quad \beta = \text{const}. \quad (5.1)$$

Начальное условие наследуется из условия для M $N(0) = M(0) = 1$. Поведение функции $h(N)$, стоящей в правой части (5.1), определяется знаком α . При $\alpha < 0$ функция $h(N)$ монотонно убывает на полуоси $N > 0$ и имеет единственный корень $N_{\max} > 0$. При $\alpha > 0$

функция h положительна, только если $\beta > 4\alpha^{3/4}$. В этом случае имеется два положительных простых корня: $h(N_l) = h(N_r) = 0$, $h'(N_l) > 0$, $h'(N_r) < 0$; $h(N) > 0$, $N \in (N_l, N_r)$. Решение уравнения (5.1) записывается в терминах функции

$$J(a, b) = \int_a^b \frac{d\eta}{\sqrt{\beta - 3\alpha\eta^{-2/3} - \eta^2}}.$$

В случае $\alpha > 0$, $\beta > 4\alpha^{3/4}$ уравнение (5.1) имеет периодические по τ решения [8]. Полупериод решения $T = J(N_l, N_r)$. Зависимость $N(\tau)$ при $\tau \in [0, T]$ определяется неявно соотношением $J(N_l, N) = \tau$ и распространяется на все значения τ как четная периодическая функция. Для того чтобы выполнялось начальное условие $N(0) = 1$, полученную функцию необходимо сдвинуть по оси τ на величину $J(N_l, 1)$ либо $J(1, N_r)$ в зависимости от знака производной $\dot{M}(0)$. График функции $N(\tau)$ показан на рис. 1 (сплошная линия).

При $\alpha < 0$ решение строится аналогичным образом. Функция $N(\tau)$ на промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$ при $\tau_0 = J(0, N_{\max})$ определяется неявно уравнением $J(0, N) = \tau$. Затем она продолжается четным образом на весь интервал $[-\tau_0, \tau_0]$ и сдвигается по оси τ , для того чтобы выполнялось начальное условие. Гладкое решение существует лишь на конечном интервале $\tau \in (0, \tau_*)$, причем $\dot{N}(\tau_*) = \infty$ (штриховая линия на рис. 1). Соответствующая ей функция $M(t)$ обращается в нуль при конечном t , если $\tau_* < \pi/2$, и неограниченно возрастает в противном случае.

Подмодели 2.22, 2.24, 2.25. Большое количество точных решений обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера, частными случаями которого являются (3.4), (3.7), (3.9), имеется в [9]. При произвольном γ они допускают лишь оператор растяжения $X_1 = t\partial_t + \sigma M\partial_M$, где $\sigma = (4 - 2\gamma)(1 + \gamma)^{-1}$ для (3.4) и $\sigma = (3 - \gamma)(1 + \gamma)^{-1}$ для (3.7). Уравнение (3.9) при произвольном γ помимо оператора X_1 при $\sigma = 2(1 + \gamma)^{-1}$ допускает перенос по времени $X_2 = \partial_t$. При специальном показателе адиабаты $\gamma = 5/3$ для (3.4), $\gamma = 2$ для (3.7) и $\gamma = 3$ для (3.9) допускаемая алгебра расширяется проективным оператором $X_3 = t^2\partial_t + tM\partial_M$.

В случае произвольного γ уравнения (3.4), (3.7) заменой $M = t^\sigma N(\tau)$, $\tau = \ln |t|$ приводятся к автономному виду

$$\ddot{N} + (2\sigma - 1)\dot{N} + \sigma(\sigma - 1)N = \alpha N^{-\gamma}.$$

Уравнение (3.9) интегрируется:

$$\dot{M}^2 = \beta - 2\alpha(\gamma - 1)^{-1}M^{1-\gamma}, \quad \beta = \text{const}. \quad (5.2)$$

Для специальных показателей адиабаты уравнения (3.4), (3.7) заменой $M = tN(\tau)$, $\tau = t^{-1}$ и однократным интегрированием сводятся к уравнениям

$$(\dot{N})^2 = \beta - 3\alpha N^{-2/3}, \quad \beta = \text{const}; \quad (5.3)$$

$$(\dot{N})^2 = \beta - 2\alpha N^{-1}, \quad \beta = \text{const} \quad (5.4)$$

соответственно. Уравнение (3.9) при $\gamma = 3$ интегрируется явно:

$$\beta M^2 = \beta^2(t - t_0)^2 + \alpha. \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) задает семейство эллипсов и гипербол на плоскости (t, M) . Для уравнений (5.2)–(5.4) имеется классификация типов решений в зависимости от знака констант α , β [3]. Существует три типа $N(\tau)$ (в уравнении (5.2) подразумевается, что $M \equiv N$, $\tau \equiv t$):

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае функция $N(\tau)$ выпукла вниз ($\ddot{N} > 0$) и имеет единственную точку минимума $N = N_{\min}$ при $\tau = \tau_*$. При $\tau \rightarrow \pm\infty$ производная стремится к постоянному значению $\dot{N} \rightarrow \pm\sqrt{\beta}$. График функции приведен на рис. 2 (жирная линия).

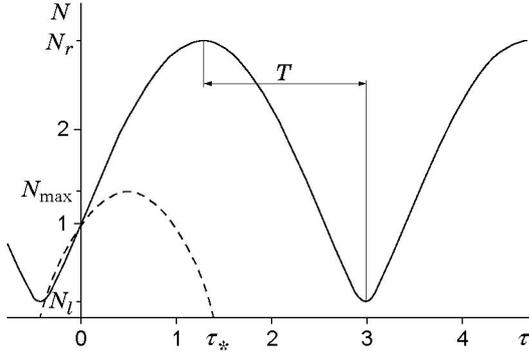


Рис. 1

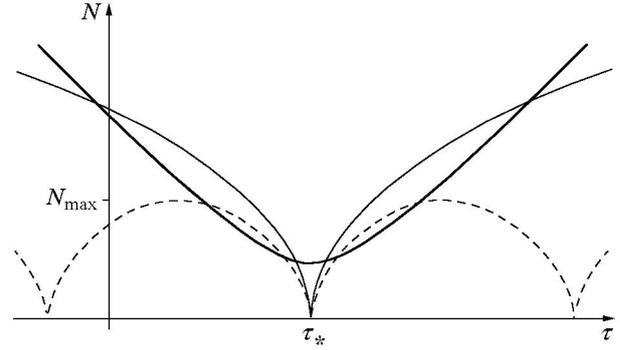


Рис. 2

2. $\alpha < 0$, $\beta > 0$. В этом случае функция $N(\tau)$ выпукла вверх ($\ddot{N} < 0$) и имеется единственная точка коллапса $\tau = \tau_*$, в которой $N(\tau_*) = 0$, $\dot{N}(\tau_*) = \infty$. При этом $\dot{N} \rightarrow \pm\sqrt{\beta}$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$ (тонкая линия на рис. 2).

3. $\alpha < 0$, $\beta < 0$. В этом случае имеют место пульсации с коллапсом, функция $N(\tau)$ выпукла вверх и не превышает значения N_{\max} . Гладкое решение существует лишь на конечном интервале по τ , на границе которого $N(\tau_*) = 0$, $\dot{N}(\tau_*) = \infty$. График функции приведен на рис. 2 (штриховая линия).

6. Подмодели второго типа. Подмодель 2.8. Представление решения в цилиндрической системе координат (x, r, θ) :

$$u_c = V + x/t, \quad v_c = U, \quad w_c = W, \quad \lambda = r.$$

Здесь и далее u_c, v_c, w_c — осевая, радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости. В этой подмодели $b = 1$, $a_1 = W^2/\lambda$, $a_2 = -V/t$, $a_3 = -UW/\lambda$, $a_4 = -(U/\lambda + 1/t)$. Интегрируя (2.1) с учетом (2.2), находим

$$V = V_0(\xi)/t, \quad W = W_0(\xi)/M(t), \quad \rho = f(\xi)/(M^2t), \quad p = P(\xi)/(M^{2\gamma}t^\gamma). \quad (6.1)$$

Как и выше, функции V_0, W_0, f, P произвольны. При разделении переменных в уравнении (2.4) в силу леммы имеют место два случая. При $\gamma = 3/2$ функция M определяется явно: $M = \alpha\sqrt{t}$. При этом имеется ограничение на произвольные функции $W_0^2(\xi) = \alpha\xi P'(\xi)/f(\xi) - \alpha^4\xi^2/4$. Во втором случае γ произвольно, а функция M удовлетворяет уравнению

$$\ddot{M}M^3 + \alpha t^{1-\gamma}M^{4-2\gamma} = \beta^2, \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (6.2)$$

Для данной подмодели $P'(\xi) = \alpha\xi f(\xi)$, $W_0 = \beta\xi$. Траектории частиц с $t_0 = 1$ определяются формулами

$$x = (x_0 + V_0(r_0))t - V_0(r_0), \quad r = r_0M(t), \quad \theta = \theta_0 + \frac{W_0(r_0)}{r_0} \int \frac{dt}{M^2}.$$

Подмодель 2.9. Представление решения:

$$u_c = V + \beta\theta, \quad v_c = U, \quad w_c = W, \quad \lambda = r.$$

Для данной подмодели $b = 1$, $a_1 = W^2/\lambda$, $a_2 = -\beta W/\lambda$, $a_3 = -UW/\lambda$, $a_4 = -U/\lambda$. Интегрируя (2.1) с учетом (2.2), находим

$$V = -\frac{\beta W_0(\xi)}{\xi} \int \frac{dt}{M^2} + V_0(\xi), \quad W = \frac{W_0(\xi)}{M(t)}, \quad \rho = \frac{f(\xi)}{M^2}, \quad p = \frac{P(\xi)}{M^{2\gamma}}. \quad (6.3)$$

При разделении переменных в (2.4) имеют место два случая. В первом случае $M \equiv 1$, $U = 0$, $V = -\beta W_0(r)t + V_0(r)$, $W = W_0(r)$, $\rho = f(r)$, $p = P(r)$, $P'(r) = f(r)W_0(r)$.

Это решение определяет осесимметричное сдвиговое течение. Траектория каждой частицы представляет собой спираль, намотанную на круговой цилиндр. Второй случай определяет более сложные движения газа. Функция M удовлетворяет уравнению

$$\ddot{M}M^3 + \alpha M^{4-2\gamma} = \sigma^2, \quad \alpha, \sigma = \text{const}. \quad (6.4)$$

Кроме того, $P'(\xi) = \alpha\xi f(\xi)$, $W_0 = \sigma\xi$. Траектории частиц с $t_0 = 0$ определяются формулами

$$x = x_0 + (\beta\theta_0 + V_0(r_0))t, \quad r = r_0M(t), \quad \theta = \theta_0 + \frac{W_0(r_0)}{r_0} \int \frac{dt}{M^2}.$$

Подмодель 2.10. Анализ данной подмодели проведен в [10]. Представление решения:

$$u_c = V - (\theta - x)/t, \quad v_c = U, \quad w_c = W, \quad \lambda = r.$$

Для этой подмодели $b = 1$, $\tilde{a}_1 = W^2/\lambda$, $\tilde{a}_2 = (W - \lambda V)/(t\lambda)$, $\tilde{a}_3 = -UW/\lambda$, $\tilde{a}_4 = -(U/\lambda + 1/t)$. Интегрируя (2.1) с учетом (2.2), находим

$$V = \frac{W_0(\xi)}{t\xi} \int \frac{dt}{M^2} + \frac{V_0(\xi)}{t}, \quad W = \frac{W_0(\xi)}{M(t)}, \quad \rho = \frac{f(\xi)}{M^2t}, \quad p = \frac{P(\xi)}{M^{2\gamma}t^\gamma}. \quad (6.5)$$

Ключевое уравнение (2.4) в этой подмодели совпадает с ключевым уравнением в подмодели 2.8. Поэтому для функции M в этой подмодели также возможны два случая и имеют место такие же ограничения на W_0 , P и f . Траектории частиц с $t_0 = 1$ определяются формулами

$$x = x_0t + (\theta_0 - V_0(r_0))(1 - t), \quad r = r_0M(t), \quad \theta = \theta_0 + \frac{W_0(r_0)}{r_0} \int \frac{dt}{M^2}.$$

7. Описание движения. Движение частиц на решениях второго типа можно представить следующим образом. Вдоль траектории осевая координата x во всех трех решениях линейно зависит от времени t . Следовательно, траекторию каждой частицы можно параметризовать координатой x вместо t . Тогда закон изменения радиальной координаты частицы задает в пространстве (x, r, θ) поверхность вращения с образующей $M(x)$. Траектория частицы является спиралью, намотанной на эту поверхность в соответствии с законом изменения θ . Отметим, что если $M(t_*) = 0$ при некотором t_* , то в случае такого движения все частицы в момент времени t_* приходят на ось Ox .

Для описания движения частиц газа в совокупности рассмотрим газ, заключенный внутри цилиндра $r = r_0M(t)$. Давление на поверхности цилиндра одинаково во всех точках и определяется формулами (6.1), (6.3), (6.5), где $P(\xi) = P(r_0) = \text{const}$. Если функция $M(t)$ возрастает, то происходит разрежение газа, при $M(t) \rightarrow 0$, напротив, газовый цилиндр сжимается и превращается в прямую, а плотность и давление возрастают до бесконечности. Частицы газа движутся вдоль оси цилиндра и вращаются вокруг нее. При этом они совершают конечное число оборотов вокруг оси, если интеграл $\int M^{-2}dt$ сходится, и бесконечное число оборотов в противном случае.

Функция $V_0(\xi)$ задает прообраз точки на многообразии коллапса. Так, в подмодели 2.8 прообразом точки $x = x_*$ при $t = t_*$ ($M(t_*) = 0$) является поверхность вращения

$$x = t_*^{-1}(x_* + (1 - t_*)V_0(r)), \quad 0 \leq r < +\infty.$$

В подмоделях 2.9 (при $\beta \neq 0$) и 2.10 непрерывного во всем пространстве решения быть не может, так как компонента скорости u линейно зависит от полярного угла θ . В то же время возможно движение с контактным разрывом вдоль бесконечной поверхности с кромкой на оси Ox . Начальное положение поверхности разрыва задается произвольно в

координатах x_0, r_0, θ_0 при $t = 1$. В дальнейшем ее форма и положение вычисляются по формулам, определяющим траектории частиц.

Замечание 3. Во всех построенных решениях функции $V_0(\xi)$ и $W_0(\xi)$ могут иметь разрывы первого рода. Им соответствуют решения с контактным разрывом вдоль поверхностей $\lambda = \lambda_0 M(t)$.

8. Анализ уравнения для функции M . ПОДМОДЕЛИ 2.8, 2.10. Уравнение (6.2) при произвольном γ не допускает непрерывных точечных преобразований.

При $\gamma = 5/3$ допускается проективный оператор $X = t^2 \partial_t + tM \partial_M$. В этом случае заменой $M = tN(\tau)$, $\tau = t^{-1}$ и однократным интегрированием уравнение (6.2) приводится к виду

$$(\dot{N})^2 = \sigma + 3\alpha N^{-4/3}/2 - \beta^2 N^{-2} \equiv h(N, \sigma), \quad \sigma = \text{const}. \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) имеет периодические по τ решения. Для доказательства необходимо установить существование промежутка $[N_1, N_2]$ такого, что

$$h(N_1, \sigma) = h(N_2, \sigma) = 0, \quad h_N(N_1, \sigma) > 0, \quad h_N(N_2, \sigma) < 0 \quad (8.2)$$

($h_N \equiv \partial h / \partial N$) [8]. Существование такого промежутка обеспечивается наличием при $\alpha > 0$ точки с координатами $N_* = (\beta^2/\alpha)^{3/2}$, $\sigma_* = -2\alpha/(9\beta^2)$, в которой

$$\begin{aligned} h(N_*, \sigma_*) &= 0, & h_N(N_*, \sigma_*) &= 0, \\ h_{NN}(N_*, \sigma_*) &= -(4/3)(\beta^2/\alpha)^{-6} < 0, & h_\sigma(N_*, \sigma_*) &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Периодическая функция $N(\tau)$ принимает значения $0 < N_1 \leq N \leq N_2 \leq \infty$. График функции $M(t)$ расположен между прямыми $M = N_1 t$ и $M = N_2 t$ и совершает между ними бесконечное число колебаний в окрестности $t = 0$. При этом $M(0) = 0$, а производная $M'(t)$ терпит разрыв второго рода в точке $t = 0$ (рис. 3).

При $\gamma = 3/2$ уравнение (6.2) допускает оператор растяжения $X = 2t \partial_t + M \partial_M$. Замена $M = N(\tau)\sqrt{t}$, $\tau = \ln |t|$ и однократное интегрирование приводят (6.2) к виду

$$(\dot{N})^2 = \sigma + N^2/4 + 2\alpha N^{-1} - \beta^2 N^{-2} \equiv h(N, \sigma), \quad \sigma = \text{const}. \quad (8.3)$$

Для доказательства существования периодических решений уравнения (8.3) докажем существование отрезка $[N_1, N_2] \subset (0, \infty)$, удовлетворяющего условиям (8.2). Нули функции $h(N, \sigma)$ совпадают с нулями полинома $Q(N) = (1/4)N^4 + \sigma N^2 + 2\alpha N - \beta^2$. Применяя теорему Штурма, получаем, что при $\alpha > 0$, $\sigma < 0$ полином $Q(N)$ имеет один отрицательный и три положительных корня. В силу $Q(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$ два первых положительных корня $Q(N)$ являются искомыми границами отрезка $[N_1, N_2]$. Периодическому решению $N(\tau)$ соответствует функция $M(t)$, график которой расположен между кривыми $M = N_1 \sqrt{t}$, $M = N_2 \sqrt{t}$ и совершает бесконечное число колебаний между ними в окрестности точки $t = 0$. При этом $M(0) = 0$, $M'(0) = +\infty$ (рис. 4).

При $\gamma = 2$ уравнение (6.2) допускает оператор $(4\beta^2 t^2 - 4\alpha t) \partial_t + (4\beta^2 t - \alpha) M \partial_M$. Заменой $M = t^{1/4}(\alpha - t\beta^2)^{3/4} N(\tau)$, $\tau = \ln |\beta^2 - \alpha/t|$ (6.2) приводится к автономному виду

$$8\alpha^2 N^3 (2\ddot{N} + \dot{N}) = 3\alpha^2 N^4 - 16.$$

ПОДМОДЕЛЬ 2.9. Для произвольного γ уравнение (6.4) допускает лишь перенос по времени $X = \partial_t$. Однократным интегрированием оно приводится к виду

$$\dot{M}^2 = \delta - \sigma^2 M^{-2} - \alpha M^{2-2\gamma} / (1 - \gamma) \equiv h(M, \delta). \quad (8.4)$$

При $\alpha > 0$ существует точка с координатами $M_* = k^{1/(4-2\gamma)}$, $\delta_* = \gamma \sigma^2 (\gamma - 1)^{-1} k^{1/(\gamma-2)}$, $k = \sigma^2/\alpha$, в которой

$$h(M_*, \delta_*) = 0, \quad h_M(M_*, \delta_*) = 0,$$

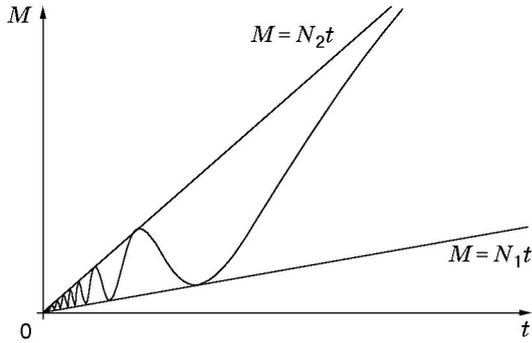


Рис. 3

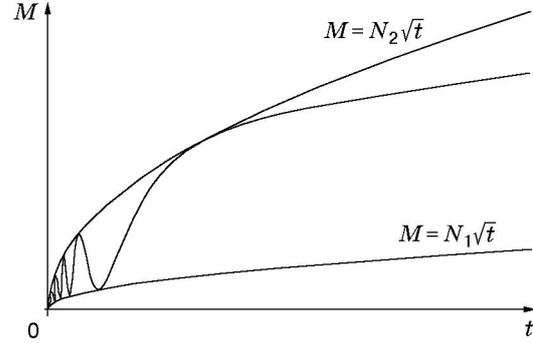


Рис. 4

$$h_{MM}(M_*, \delta_*) = (\gamma - 2)\alpha^{-1}k^{\gamma/(\gamma-2)}, \quad h_\delta(M_*, \delta_*) = 1 > 0.$$

Таким образом, при $1 < \gamma < 2$ для уравнения (8.4) выполнены условия существования периодического решения. При $\beta = 0$ это решение есть “газовый маятник” [11]. При $\beta \neq 0$ получается решение, обладающее так называемой фазовой периодичностью по времени [8] (по истечении периода восстанавливается общая картина течения, но частицы газа не возвращаются в начальное положение). В случае $\gamma = 2$ уравнение (6.4) интегрируется в явном виде:

$$\delta M^2 = \delta^2(t - t_0)^2 + \sigma^2 - \alpha. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.5) задает семейство эллипсов или гипербол на плоскости (t, M) .

9. Подмодели третьего типа. В подмоделях третьего типа приходится отступать от канонической формы их представления и иначе выбирать инвариантные функции.

Подмодель 2.20. Представление решения:

$$u = U - \frac{(\beta\sigma - \alpha t)(\tau V + tW)}{(t^2 - \sigma\tau)^2} + \frac{(\alpha\tau - \beta t)(tV + \sigma W)}{(t^2 - \sigma\tau)^2},$$

$$v = \frac{\tau V + tW}{t^2 - \sigma\tau} + \frac{ty - \tau z}{t^2 - \sigma\tau}, \quad w = -\frac{tV + \sigma W}{t^2 - \sigma\tau} + \frac{tz - \sigma y}{t^2 - \sigma\tau},$$

$$\rho = \rho(t, \lambda), \quad p = p(t, \lambda), \quad \lambda = x + \frac{\beta\sigma - \alpha t}{t^2 - \sigma\tau} y + \frac{\alpha\tau - \beta t}{t^2 - \sigma\tau} z.$$

Уравнения подмодели имеют вид

$$DU + \frac{t^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\sigma\tau)t^2 - 2\alpha\beta(\sigma + \tau)t + \beta^2\sigma^2 + (\alpha^2 + \sigma^2)\tau^2}{(t^2 - \sigma\tau)^2} p_\lambda =$$

$$= -2 \frac{\beta t^3 - 3\alpha\tau t^2 + 3\beta\sigma\tau t - \alpha\sigma\tau^2}{(t^2 - \sigma\tau)^3} V - 2 \frac{-\alpha t^3 + 3\beta\sigma t^2 - 3\alpha\sigma\tau t + \beta\sigma^2\tau}{(t^2 - \sigma\tau)^3} W,$$

$$DV + \frac{\beta t^2 + \alpha(\sigma - \tau)t - \beta\sigma^2}{(t^2 - \sigma\tau)\rho} p_\lambda = 0, \quad D = \partial_t + U\partial_\lambda,$$

$$DW + \frac{-\alpha t^2 + \beta(\sigma - \tau)t + \alpha\tau^2}{(t^2 - \sigma\tau)\rho} p_\lambda = 0,$$

$$D\rho + \rho U_\lambda = -\frac{2t\rho}{t^2 - \sigma\tau}, \quad Dp + A(p, \rho)U_\lambda = -A(p, \rho)\frac{2t}{t^2 - \sigma\tau}.$$

Далее будем считать, что газ удовлетворяет политропному уравнению состояния $A(p, \rho) = \gamma p$. В лагранжевых координатах t, ξ после интегрирования находим

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{f(\xi)}{M(t^2 - \sigma\tau)}, & p &= \frac{P(\xi)}{M\gamma(t^2 - \sigma\tau)^\gamma}, \\ V &= (\beta J_2 + \alpha(\sigma - \tau)J_1 - \beta\sigma^2 J_0)P'(\xi)/f(\xi) + V_0(\xi), \\ W &= (-\alpha J_2 + \beta(\sigma - \tau)J_1 + \alpha\tau^2 J_0)P'(\xi)/f(\xi) + W_0(\xi). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь $J_0 = \int \frac{dt}{(t^2 - \sigma\tau)^\gamma M^\gamma}$; $J_1 = \int \frac{t dt}{(t^2 - \sigma\tau)^\gamma M^\gamma}$; $J_2 = \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - \sigma\tau)^\gamma M^\gamma}$. В оставшееся уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{M}\xi + \frac{t^4 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\sigma\tau)t^2 - 2\alpha\beta(\sigma + \tau)t + \beta^2\sigma^2 + (\alpha^2 + \sigma^2)\tau^2}{(t^2 - \sigma\tau)^{1+\gamma}M^\gamma} \frac{P'(\xi)}{f(\xi)} + \\ + 2 \frac{\beta t^3 - 3\alpha\tau t^2 + 3\beta\sigma\tau t - \alpha\sigma\tau^2}{(t^2 - \sigma\tau)^3} V + 2 \frac{-\alpha t^3 + 3\beta\sigma t^2 - 3\alpha\sigma\tau t + \beta\sigma^2\tau}{(t^2 - \sigma\tau)^3} W = 0 \end{aligned}$$

необходимо подставить выражения для V и W из (9.1) и разделить в нем переменные в соответствии с леммой. При этом получаются громоздкие формулы, которые здесь не приводятся.

Подмодель 2.23. Представление решения:

$$\begin{aligned} u &= U(\lambda) + z + \alpha V(\lambda) + tW(\lambda), & v &= V(\lambda), & w &= W(\lambda), \\ p &= p(\lambda), & \rho &= \rho(\lambda), & \lambda &= x - \alpha y - tz. \end{aligned}$$

Уравнения подмодели имеют вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_\lambda + (t^2 + \alpha^2 + 1)p_\lambda/\rho &= -2W, \\ V_t + UV_\lambda - \alpha p_\lambda/\rho &= 0, & W_t + UW_\lambda - tp_\lambda/\rho &= 0, \\ \rho_t + U\rho_\lambda + \rho U_\lambda &= 0, & p_t + Up_\lambda + A(p, \rho)U_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Далее рассматривается политропный газ ($A(p, \rho) = \gamma p$). В лагранжевых координатах t, ξ после интегрирования находим

$$\rho = \frac{f(\xi)}{M}, \quad p = \frac{P(\xi)}{M^\gamma}, \quad V = \frac{\alpha P'(\xi)}{f(\xi)} \int \frac{dt}{M^\gamma} + V_0(\xi), \quad W = \frac{P'(\xi)}{f(\xi)} \int \frac{t dt}{M^\gamma} + W_0(\xi).$$

Оставшееся уравнение подмодели принимает вид

$$\ddot{M}\xi + \left(\frac{t^2 + \alpha^2 + 1}{M^\gamma} + 2 \int \frac{t dt}{M^\gamma} \right) \frac{P'(\xi)}{f(\xi)} + 2W_0(\xi) = 0.$$

В соответствии с леммой возможно два случая:

а) $\gamma = 2$, $M = t^2 + \alpha^2 + 1$, $W_0 = -\xi$;

б) $\ddot{M} + a \left(\frac{t^2 + \alpha^2 + 1}{M^\gamma} + 2 \int \frac{t dt}{M^\gamma} \right) + 2b = 0$, $P'(\xi) = a\xi f(\xi)$, $W_0 = b\xi$.

Заключение. Построен новый класс точных решений, описывающий пространственные движения политропного газа. Решения описывают как непрерывный разлет, так и неограниченное сжатие газа за конечный или бесконечный интервал времени. Их источником служат инвариантные подмодели ранга 2 эволюционного типа. В полученных решениях скорость линейно зависит от части пространственных координат. Решения содержат произвол в три функции одной переменной. Интегрирование подмоделей сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Все подмодели

делятся на два типа. Подмодели первого типа описывают сжатие или разлет плоского слоя газа. Траектории частиц являются плоскими кривыми, наклон и положение плоскости в пространстве определяются начальным положением частицы. В движениях с коллапсом плотности прообразом точки на плоскости коллапса является некоторая пространственная кривая, начальную конфигурацию которой можно выбирать достаточно свободно в силу имеющегося произвола в решении. Подмодели второго типа описывают разлет или сжатие газа, заполняющего цилиндр, радиус которого меняется со временем. Двигаясь вдоль оси цилиндра, частицы совершают конечное или бесконечное число витков вокруг нее. В случае движения с коллапсом плотности цилиндр сжимается и превращается в прямую. Показано существование колебательных режимов движения газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мамонтов Е. В.** Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
2. **Мамонтов Е. В.** Групповые свойства 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 33–39.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
4. **Сидоров А. Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34–40.
5. **Овсянников Л. В.** Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики. Новосибирск, 1997. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 3-97).
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Головин С. В.** Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–10.
8. **Овсянников Л. В.** О периодических движениях газа // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 4. С. 567–577.
9. **Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.** Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1993.
10. **Мустаев А. Ф., Хабиров С. В.** Винтовые движения газа, инвариантные относительно равномерного движения системы отсчета // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 5. С. 854–861.
11. **Овсянников Л. В.** Газовый маятник // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 115–119.

Поступила в редакцию 26/II 2002 г.