

УДК 519.24

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ КУРСА ВАЛЮТ

Е. Л. Кулешов

*Дальневосточный федеральный университет,
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: kuleshov@letoi.phys.dvfu.ru*

Процесс формирования курса валют представляется суммой низкочастотного детерминированного тренда и высокочастотной стационарной случайной компоненты, для которой получены ковариационная функция, спектральная плотность и корреляционная функция приращений. Теоретические результаты хорошо согласуются с результатами обработки наблюдаемых данных. Модель объясняет появление волн Эллиотта на траекториях курса валют и порождает параметрическое семейство случайных процессов, которые по своим спектральным характеристикам занимают интервал от белого шума до процесса авторегрессии первого порядка.

Ключевые слова: случайный процесс, обменный курс, ковариационная функция, спектральная плотность, процессы авторегрессии, волны Эллиотта.

Введение. Колебания рыночной стоимости различных ценных бумаг, биржевых индексов, обменного курса валют и т. п. порождаются большим числом совершаемых на биржах покупок/продаж и моделируются обычно некоторым случайным процессом. На рис. 1 представлены примеры траекторий курса валют: график 1 — курс английского фунта (цена фунта в долларах США) за период с января 1993 по январь 2012 гг., 2 — его линейный тренд, 3 — курс швейцарского франка (цена доллара США во франках) и 4 — его гармонический тренд. Для выделения тренда использовался метод наименьших квадратов. Гармонический тренд франка имеет параметры: постоянная составляющая 1,213, амплитуда 0,305, период 28 лет, начальная фаза 7 лет (83,8 месяца). Можно интерпретировать тренд как гармоническую функцию со случайными параметрами и средним периодом, значительно бóльшим, чем длина интервала наблюдения. Причём с дальнейшим ростом интервала наблюдения эта гармоника совершит несколько периодов и траектория примет вид, характерный для реализации стационарного процесса, на которой периоды роста чередуются с периодами падения. Следует ожидать, что такую траекторию порождает пара устойчивых валют при условии, что рыночный обменный курс формируется большим числом относительно равнозначных игроков. Другая интерпретация тренда обусловлена наличием на рынке одного доминирующего игрока (США), для которого выгодно иметь монотонные тренды: убывающий для франка и возрастающий для фунта. Это связано с тем, что большое количество долларов используется как средство накопления. Так, при существующем тренде за период с 2000 по 2012 гг. доллар теряет половину своей покупательной способности по отношению к франку. Поскольку эти потери равны соответствующему доходу для США, то для них нет смысла менять ситуацию, пока где-то валютные резервы хранятся в долларах. Независимо от причин, порождающих тренд, траектории, представленные на рис. 1, оказываются слишком короткими для построения обоснованной статистической модели тренда на базе корреляционно-спектрального анализа.

В данной работе обменный курс рассматривается как случайный процесс $S_t = A_t + s_t$, представленный суммой относительно низкочастотного детерминированного тренда A_t и

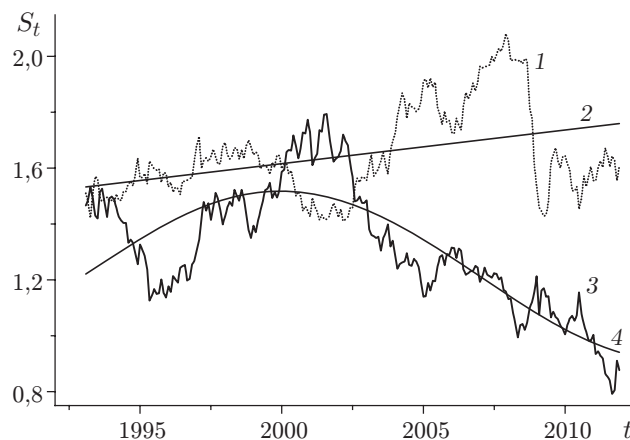


Рис. 1. Курсы валют и тренды

более высокочастотной (ВЧ) стационарной случайной компоненты s_t , статистические характеристики которой можно оценить с приемлемой точностью по наблюдаемым траекториям. Построена модель процесса s_t . Получены его ковариационная функция и спектральная плотность, а также корреляционная функция приращений, хорошо согласующихся с результатами обработки наблюдаемых траекторий. Модель объясняет появление волн Эллингтона на траекториях и порождает параметрическое семейство случайных процессов, занимающих по своим корреляционным и спектральным характеристикам интервал от белого шума до процесса авторегрессии первого порядка.

Статистические модели динамики цен. Вероятностное описание динамики стоимости акций, наверное, впервые было предложено Л. Башелье в 1900 г. В своей диссертации он рассматривал цену как случайный процесс $S_t = S_0 + \sum_{i=1}^t \xi_i$, где S_t — цена в момент времени t ; S_0 — цена в начальный момент времени $t = 0$; ξ_i — независимые одинаково распределённые случайные величины (приращения процесса S_t). В современной литературе процесс S_t называется процессом линейного броуновского движения. Существенный недостаток этой модели заключается в том, что S_t может принимать отрицательные значения. В работе [1] М. Кендалл приходит к выводу, что независимые величины $\xi_i = \ln S_i - \ln S_{i-1}$ есть приращения логарифмов цен, а не самих цен. Отсюда следует $S_t = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^t \xi_i\right)$ и, таким образом, в этой модели цена — величина неотрицательная.

Данный подход получил дальнейшее развитие в работе П. Самуэльсона [2], в которой вводится процесс S_t геометрического броуновского движения в предположении, что величина $\ln S_t - \ln S_0$ — это обобщённый броуновский процесс с ненулевым параметром сноса. Геометрическое броуновское движение является базовой моделью динамики цен финансовых инструментов и используется для построения более сложных экономических моделей и финансовых расчётов. Отметим следующие модификации моделей Башелье и Самуэльсона.

1. Процессы с непрерывным временем определяются как предел при условии, что шаг дискретизации стремится к нулю.

2. Пусть случайная величина ξ_i может принимать только два значения, тогда модель называется биномиальной [3]. Исследование такой модели сводится к анализу известной вероятностной схемы Бернулли [4]. Биномиальные модели Башелье и Самуэльсона в литературе называются арифметическим и геометрическим блужданием соответственно. На основе последней построена сравнительно простая биномиальная модель рынка Кокса —

Росса — Рубинштейна [5], позволяющая выполнить аналитические расчёты многих финансовых характеристик.

3. Замена броуновского движения фрактальным броуновским движением приводит к новому типу стохастических моделей [6]. Отметим, что проблема описания динамики цен различных финансовых инструментов далека от своего завершения и является предметом многочисленных исследований. Поэтому в литературе можно найти значительное количество разнообразных моделей ценообразования, многие из которых представлены в работе А. Н. Ширяева [6, 7].

Свойства траекторий. Для численного анализа свойств наблюдаемых траекторий обменного курса валют сформированы три временных ряда. Временные ряды 1 и 2 — это последовательности значений курса соответственно франка и фунта, представленные на рис. 1, с шагом дискретизации по времени 1 месяц, начиная с января 1993 и по январь 2012 гг. (всего 229 значений). Каждое значение равно цене открытия первой дневной свечи очередного месяца. Временной ряд 3 — это последовательность цены открытия часовых свечей английского фунта за период с 22 часов 27.11.1998 до 12 часов 23.05.2003 гг. Таким образом, имеется всего 28800 отсчётов с равномерным шагом дискретизации, равным 1 ч. На рис. 2 даны графики временного ряда 3 и его гармонического тренда с параметрами: постоянная составляющая 1,53, амплитуда гармоники 0,112, период гармоники 4,72 года, начальная фаза 2595 часов (0,41 года).

Анализ траекторий позволяет отметить следующие особенности процесса формирования курса валют.

1. Процесс имеет широкий спектр, что проявляется в наличии на траекториях как быстрых волн с малыми периодами (изменение курса валют зачастую происходит в течение секунды), так и медленных волн с периодами более, чем интервал наблюдения (19 лет). На траекториях часто проявляются волны, периоды которых соотносятся как 1 : 3, 1 : 5, 3 : 5, ... — волны Эллиотта [8]. Это обусловлено тем, что цена не может монотонно возрастать до бесконечности, и за интервалом её роста следует интервал снижения (коррекция цены), и наоборот: после относительно длительного падения цены следует её рост. Такое свойство характерно для интервалов любой длительности. Для пояснения этого феномена используем кусочно-линейную аппроксимацию траектории. Пусть на «большом» интервале длительности T цена растёт. В первом приближении ход цены можно описать её линейным трендом. Затем для более детального описания разобьём этот интервал на три «малых» интервала примерно одинаковой длительности, на каждом из которых найдём линейные тренды. Тогда часто возникает характерная для траектории цены конфигурация трендов «вверх-вниз-вверх», т. е. тренд на первом интервале растёт, на втором —

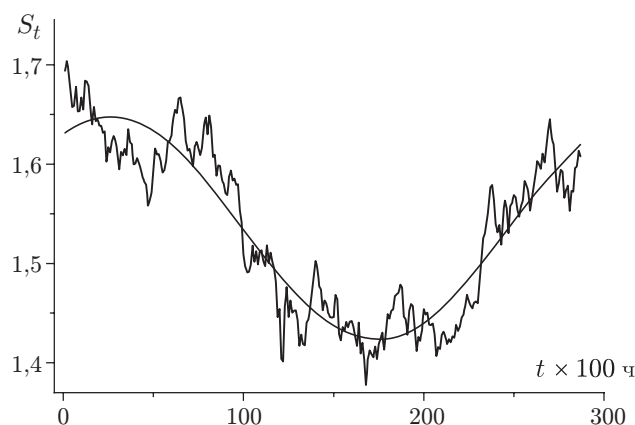


Рис. 2. Траектория курса фунта и его тренд за 1998–2003 гг.

убывает и на третьем — растёт. Пример такой конфигурации можно увидеть на траектории франка (см. рис. 1, график 3) для интервала [1996, 2002]. Если тренд по большому интервалу приближённо рассматривать как гармонику с периодом, пропорциональным T , то кусочно-линейная аппроксимация по трём малым интервалам добавляет гармонику с периодом, пропорциональным $T/3$. В некоторых случаях более точная аппроксимация получается при разбиении большого интервала на 5, 7, ... малых. Это приводит к соотношениям 1 : 5, 1 : 7, ... между периодами. Эллиотт в своей работе «Закон волн», изданной в 1938 г., предложил волновое объяснение движения цен на биржевых рынках. Термин «волна» понимается как линейный тренд по некоторому интервалу, а полный цикл движения цены состоит из пятиволновой движущей и трёхволновой коррекционной фаз. Использование данного подхода для прогноза на рынке осложняется многими неопределённостями и представляет собой, скорее, искусство, чем точный алгоритм принятия решений [9]. С точки зрения построения теории этот подход также неудовлетворителен, поскольку предположение о том, что движение цены обусловлено некоторыми распознаваемыми моделями, противоречит гипотезе эффективного рынка [6]. Динамика цены оказалась более сложным объектом, чем некоторая совокупность циклов Эллиотта. Для дальнейшего рассмотрения отметим: во-первых, волны Эллиотта достаточно часто наблюдаются на траекториях, и во-вторых, их периоды соотносятся как числа 1 : 3, 1 : 5, 3 : 5, ...

2. Во многих моделях ценообразования используется нормальный случайный процесс с независимыми приращениями, особенностью которого является линейный рост дисперсии с увеличением длительности интервала наблюдения. Пусть S_t — нормальный случайный процесс с математическим ожиданием a , дисперсией σ^2 и p_0 — вероятность случайного события $|S_t - a| > \sigma$, тогда несложно получить $p_0 \approx 0,32$. Таким образом, с вероятностью 0,32 траектория процесса S_t превысит значение $a + \sigma$ или станет меньше $a - \sigma$. Если σ^2 линейно растёт со временем, то неограниченно растёт и траектория процесса S_t . При этом также велика вероятность события $S_t < 0$. Модель геометрического броуновского процесса устраняет отрицательные значения траектории, но оставляет неограниченный рост дисперсии. Наблюдаемые траектории устойчивых валют (см. рис. 1, 2) не проявляют неограниченного роста. Поэтому в основу предлагаемой модели положим условие ограниченности траектории процесса формирования курса валют и его дисперсии. Очевидно, из условия ограниченности дисперсии процесса следует ограниченность дисперсии его ВЧ-компоненты.

3. Оценка ковариационной функции приращений процесса s_t определяется соотношением

$$b_\tau = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau-1} (s_t - s_{t+1})(s_{t+\tau} - s_{t+1+\tau}), \quad 0 \leq \tau \leq n-2, \quad (1)$$

где s_t — значение ВЧ-компоненты, полученное из временного ряда после вычитания низкочастотного тренда; n — длина временного ряда. На рис. 3 представлен график оценки коэффициента корреляции $k_\tau = b_\tau/b_0$ для временного ряда 2. При $n = 229$ ошибка оценки k_τ для малых τ равна $\sqrt{2/n} \approx 0,1$. Многие значения $|k_\tau|$ при $\tau \geq 1$ превышают ошибку, например $k_3 = 0,15$, $k_7 = -0,2$. Аналогичные результаты получены и для ряда 1. Временной ряд 3 содержит 28800 отсчётов, здесь ошибка оценки k_τ равна приблизительно 0,008 и многие значения $|k_\tau|$ при $\tau \geq 1$ также превышают ошибку: $k_1 = -0,031$, $k_3 = -0,012$, $k_9 = -0,012$, $k_{12} = -0,012$, $k_{15} = 0,015$ и др. Поэтому будем полагать, что корреляция приращений процесса s_t , хотя и небольшая, но отличная от нуля.

4. Оценивание ковариационной функции ВЧ-компоненты осложняется наличием на реализациях медленных волн значительной амплитуды с периодом порядка длины реали-

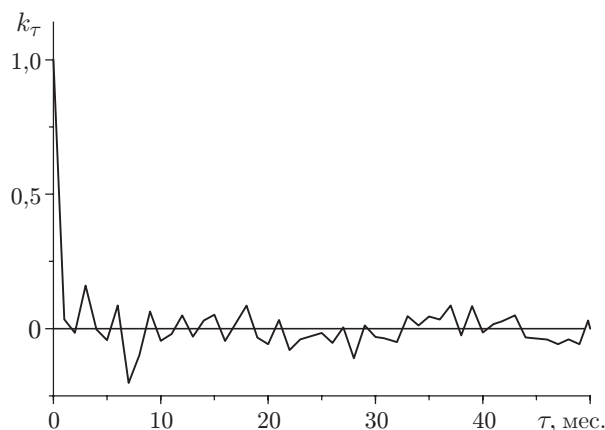


Рис. 3. Оценка коэффициента корреляции приращений (временной ряд 2)

зации. Поэтому такие реализации по классификации [10] являются короткими и несглаженная ковариационная оценка

$$c_\tau = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (s_t - a_0)(s_{t+\tau} - a_0), \quad |\tau| \leq n - 1, \quad (2)$$

(a_0 — оценка математического ожидания) может иметь большие ошибки. Для снижения ошибок применяется процедура сглаживания корреляционным окном. Исключая довольно сложный вопрос о выборе оптимального корреляционного окна [11], используем простой вариант построения сглаженной ковариационной оценки [12] в виде произведения $c_\tau h_\tau$, где $h_\tau = [1 + \cos(\pi\tau/L)]/2$ при $|\tau| \leq L$ и $h_\tau = 0$, если $\tau \geq L$ (окно Тьюки). Параметр L , называемый точкой отсечения, выберем равным $0,1n$. На рис. 4 представлен график нормированной оценки $r_\tau = c_\tau h_\tau / c_0$ для временного ряда 2. Величина r_τ снижается до 0,5 при $\tau \approx 8$ мес. Таким образом, имеется сильная корреляция между значениями процесса s_t , удалёнными на достаточно большие интервалы. Аналогичные результаты получаются и для временных рядов 1 и 3. Например, для ряда 3 функция r_τ снижается до 0,5 при $\tau \approx 500$ ч и до 0 при $\tau > 2000$ ч.

Рассмотренные свойства траекторий определяют основные положения модели ВЧ-компоненты как случайного процесса s_t , удовлетворяющего следующим условиям: про-

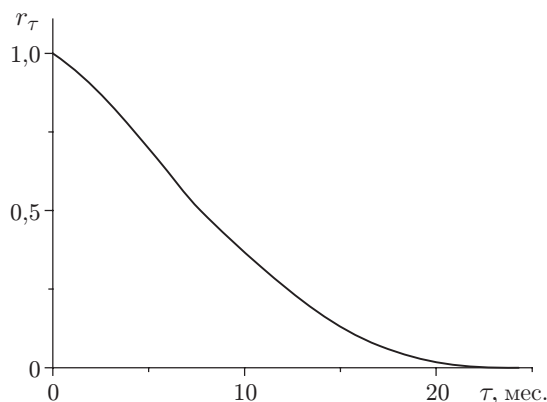


Рис. 4. Оценка коэффициента корреляции (временной ряд 2)

цесс является стационарным в широком смысле, имеет широкий спектр, малое значение корреляции приращений, но отличное от нуля, и большой интервал корреляции.

Анализ простых моделей. Рассмотрим две простейшие математические модели ценообразования: броуновское и геометрическое броуновское движения. Первая модель определяется выражением $S_t = S_0 + \sum_{i=1}^t \xi_i$. Пусть \mathbf{M} и \mathbf{D} — операторы математического ожидания и дисперсии. Обозначим $m = \mathbf{M}\xi_i$ — математическое ожидание и $d = \mathbf{D}\xi_i$ — дисперсию случайной величины ξ_i . Тогда $\mathbf{M}S_t = \mathbf{M}S_0 + mt$, а $\mathbf{D}S_t = \mathbf{D}S_0 + dt$. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ дисперсия неограниченно растёт и траектория процесса S_t может также неограниченно расти.

Вторую модель, очевидно, можно представить выражением $S_t = S_0 \prod_{i=1}^t \xi_i$. В отличие от первой модели здесь случайные величины $\xi_i > 0$. Несложно получить $\mathbf{M}S_t = m^t \mathbf{M}S_0$. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ величина $\mathbf{M}S_t \rightarrow \infty$ для $m > 1$ и $\mathbf{M}S_t \rightarrow 0$ для $m < 1$. Если положить $m = 1$, тогда $\mathbf{M}S_t$ — величина постоянная. Второй начальный момент процесса S_t будет иметь вид

$$\mathbf{M}S_t^2 = \mathbf{M}S_0^2 \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^t \xi_i\right)^2 = \mathbf{M}S_0^2 \mathbf{M}\prod_{i=1}^t \xi_i^2 = (d + m^2)^t \mathbf{M}S_0^2. \quad (3)$$

Отсюда дисперсия

$$\begin{aligned} \mathbf{D}S_t &= \mathbf{M}S_t^2 - (\mathbf{M}S_t)^2 = (d + m^2)^t [\mathbf{D}S_0 + (\mathbf{M}S_0)^2] - m^{2t} (\mathbf{M}S_0)^2 = \\ &= (d + m^2)^t \mathbf{D}S_0 + [(d + m^2)^t - m^{2t}] (\mathbf{M}S_0)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $d > 0$, то второе слагаемое в (4) положительно и $\mathbf{D}S_t > (d + m^2)^t \mathbf{D}S_0$. Если $m \geq 1$, то при $t \rightarrow \infty$ дисперсия $\mathbf{D}S_t$ неограниченно растёт. Таким образом, вторая модель порождает процесс, у которого при $m \neq 1$ математическое ожидание неограниченно растёт (или сходится к нулю) и при $m \geq 1$ неограниченно растёт дисперсия $\mathbf{D}S_t$, что допускает неограниченный рост траектории процесса S_t .

Стационарная модель ВЧ-компоненты. Пусть цена $S_t = A_t + s_t$, где A_t — детерминированный тренд и s_t — стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием $a = \mathbf{M}s_t$, ковариационной функцией $R_\tau = \mathbf{M}(s_t - a)(s_{t+\tau} - a)$, дисперсией R_0 . Известно, что если на вход линейной системы с постоянными параметрами и финитной импульсной реакцией поступает стационарный в широком смысле случайный процесс, то на выходе этой системы процесс также стационарный в широком смысле. Всегда можно выбрать характеристики входного процесса и системы так, что выходной процесс будет иметь заданные ковариационную функцию и спектральную плотность. Используя это свойство линейных систем, представим

$$s_{t+1} - a = \sum_{i=1}^N \alpha_i z_{t-i+1}. \quad (5)$$

Здесь входной процесс — это последовательность независимых случайных величин $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-N+1}$ с математическим ожиданием $\mathbf{M}z_i = 0$ и ковариационной функцией $\mathbf{M}z_i z_j = \delta_{ij}$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Последовательность чисел $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, задаёт импульсную реакцию линейной системы и определяет статистические характеристики процесса s_t .

Рассмотрим процесс

$$\hat{s}_{t+1} - a = \sum_{i=1}^N \gamma_i (s_{t-i+1} - a), \quad (6)$$

где входные величины — это цены $s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-N+1}$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ — последовательность независимых случайных величин с математическим ожиданием $\mathbf{M}\gamma_i = 0$ и ковариационной функцией $\mathbf{M}\gamma_i\gamma_j = \sigma_i^2\delta_{ij}$. Ковариационная функция процесса \hat{s}_{t+1} имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{M}\gamma_i\gamma_j R_{i-j+\tau} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i^2 \delta_{ij} R_{i-j+\tau} = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 R_\tau \quad (7)$$

и при условии $\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = 1$ совпадает с ковариационной функцией процесса s_t . Величину \hat{s}_{t+1} можно рассматривать как линейный прогноз цены s_{t+1} по её значениям s_t, s_{t-1}, \dots . С ростом i статистический вес коэффициентов γ_i должен снижаться (как вес линейного прогноза) и при $i > N$ согласно (6) полагается $\gamma_i = 0$. Идеальный прогноз \hat{s}_{t+1} должен быть близок к s_{t+1} . Поэтому можно считать, что с ростом i вес α_i также снижается, как и вес γ_i .

Ковариационная функция ВЧ-компоненты. Из соотношения (5) следует

$$\begin{aligned} R_\tau &= \mathbf{M}(s_{t+1} - a)(s_{t+\tau+1} - a) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \mathbf{M}z_{t-i+1} z_{t+\tau-j+1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \delta_{i-j+\tau, 0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вместо индексов i, j введём новые индексы суммирования j, k , причём $k = i - j$. Тогда на плоскости (j, k) суммирование выполняется в пределах параллелограмма со сторонами $k = 1 - j, k = N - j, j = 1, j = N$. Этот параллелограмм разобьём на два треугольника: $k \geq 0$ и $k < 0$. Тогда (8) можно представить в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое — это сумма по верхнему треугольнику, второе — сумма по нижнему треугольнику. Таким образом,

$$R_\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-k} \alpha_{j+k} \alpha_j \delta_{k+\tau, 0} + \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \sum_{j=1-k}^N \alpha_{j+k} \alpha_j \delta_{k+\tau, 0}. \quad (9)$$

Во втором слагаемом заменим индекс j новым индексом суммирования $r = j + k$, тогда

$$\begin{aligned} R_\tau &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k+\tau, 0} \sum_{j=1}^{N-k} \alpha_{j+k} \alpha_j + \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \delta_{k+\tau, 0} \sum_{r=1}^{N+k} \alpha_r \alpha_{r-k} = \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \delta_{k+\tau, 0} \sum_{j=1}^{N-|k|} \alpha_j \alpha_{j+|k|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда получаем $R_\tau = 0$, если $|\tau| > N - 1$, и

$$R_\tau = \sum_{j=1}^{N-|\tau|} \alpha_j \alpha_{j+|\tau|} \quad \text{при } |\tau| \leq N - 1. \quad (11)$$

Выбор весовых коэффициентов. Если в (11) ковариационную функцию R_τ заменить её оценкой, то полученное соотношение можно рассматривать как систему N уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Однако реализация этого подхода весьма сложна, поскольку система получается нелинейной, а при неточно заданной функции R_τ решение системы может быть неустойчивым. Поэтому рассмотрим простой вариант выбора коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ в виде $\alpha_i = \lambda \alpha^i$, где $\lambda > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Такой выбор позволяет выполнить аналитические вычисления в (11) и гарантирует снижение α_i с ростом i . При этом из (11) следует

$$R_\tau = \lambda^2 \sum_{j=1}^{N-|\tau|} \alpha^{2j+|\tau|} = \lambda^2 \alpha^{|\tau|+2} \sum_{j=0}^{N-|\tau|-1} \alpha^{2j} = \lambda^2 \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \alpha^{|\tau|} \left(1 - \frac{\alpha^{2N}}{\alpha^{2|\tau|}}\right), \quad |\tau| \leq N-1. \quad (12)$$

Отсюда дисперсия

$$R_0 = \lambda^2 \frac{\alpha^2(1-\alpha^{2N})}{1-\alpha^2} \quad (13)$$

и коэффициент корреляции

$$\frac{R_\tau}{R_0} = \frac{\alpha^{|\tau|}}{1-\alpha^{2N}} \left(1 - \frac{\alpha^{2N}}{\alpha^{2|\tau|}}\right). \quad (14)$$

Этот результат хорошо согласуется с полученными оценками коэффициента корреляции. Так, среднее отклонение на один отсчёт теоретической функции (14) от эмпирического коэффициента корреляции для временных рядов 2 и 3 составляет соответственно 0,02 и 0,01 при оптимальных параметрах $\alpha = 0,952$, $N = 17,6$ мес. и $\alpha = 0,853$, $N = 1533$ ч.

Ковариационная функция приращений. Пусть $u_t = s_{t+1} - s_t$ — приращение процесса s_t в момент времени t . Тогда ковариационная функция процесса u_t имеет вид

$$K_\tau = \mathbf{M}u_t u_{t+\tau} = \mathbf{M}(s_{t+1} - s_t)(s_{t+1+\tau} - s_{t+\tau}) = 2R_\tau - R_{\tau-1} - R_{\tau+1}. \quad (15)$$

Подставим (12) в (15), тогда

$$K_\tau = \lambda^2 \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left[2\alpha^{|\tau|} - \alpha^{|\tau-1|} - \alpha^{|\tau+1|} - \alpha^{2N} \left(\frac{2}{\alpha^{|\tau|}} - \frac{1}{\alpha^{|\tau-1|}} - \frac{1}{\alpha^{|\tau+1|}} \right) \right]. \quad (16)$$

Отсюда

$$K_0 = \lambda^2 \frac{2\alpha^2}{1+\alpha} (1 + \alpha^{2N-1}). \quad (17)$$

Поскольку K_τ — чётная функция, достаточно рассмотреть K_τ при $\tau \geq 1$. Из (16) следует

$$K_\tau = -\lambda^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha} \alpha^\tau \left(1 - \frac{\alpha^{2N}}{\alpha^{2\tau}}\right), \quad 1 \leq \tau \leq N-1. \quad (18)$$

Функция $|K_\tau|$ на интервале $[1, N]$ монотонно убывает от значения $|K_1|$ до $K_N = 0$. Из (17), (18) получим отношение

$$\frac{K_1}{K_0} = -\frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1-\alpha^{2N-2}}{1+\alpha^{2N-1}}. \quad (19)$$

Подстановка значений $\alpha = 0,952$, $N = 17,6$ приводит к результату $K_1/K_0 = -0,0164$, а для $\alpha = 0,853$, $N = 1533$ имеем $K_1/K_0 = -0,074$. Таким образом, модель (5) обеспечивает важнейшее свойство процесса — малое значение корреляции приращений.

Спектральная плотность. При $\alpha_i = \lambda\alpha^i$ преобразуем соотношение (5):

$$s_{t+1} - a = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha^i z_{t-i+1} = \lambda\alpha \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^j z_{t-j} = \lambda\alpha \left(z_t + \sum_{j=1}^N \alpha^j z_{t-j} - \alpha^N z_{t-N} \right), \quad (20)$$

следовательно,

$$s_{t+1} - a = \alpha(s_t - a) + \lambda\alpha z_t - \lambda\alpha^{N+1} z_{t-N} \quad (21)$$

— разностное уравнение для процесса s_t . Это уравнение определяет линейную систему, для которой z_t — входной сигнал и $s_t - a$ — выходной сигнал. Известно [12], что если на вход линейной системы (с постоянными параметрами) подать гармонический сигнал $z_t = e^{i2\pi f\tau_0 t}$ (непрерывный аргумент f — частота сигнала, τ_0 — шаг дискретизации по времени), то выходной сигнал $s_t - a = H(f)e^{i2\pi f\tau_0 t}$, где $H(f)$ — передаточная функция линейной системы, определённая на области $|f| \leq (2\tau_0)^{-1}$. Таким образом, из (21) следует

$$H(f)e^{i2\pi f\tau_0(t+1)} = \alpha H(f)e^{i2\pi f\tau_0 t} + \lambda\alpha e^{i2\pi f\tau_0 t} - \lambda\alpha^{N+1} e^{i2\pi f\tau_0(t-N)}. \quad (22)$$

Отсюда

$$H(f) = \lambda\alpha \frac{1 - \alpha^N e^{-i2\pi f\tau_0 N}}{e^{i2\pi f\tau_0} - \alpha}. \quad (23)$$

Если на вход линейной системы подан стационарный в широком смысле случайный процесс со спектральной плотностью $F_1(f)$, то выходной процесс имеет спектральную плотность [12]

$$F(f) = |H(f)|^2 F_1(f). \quad (24)$$

Для системы (5), (21) входной процесс z_t — это белый шум с дискретным временем, нулевым средним и единичной дисперсией. Поэтому его спектральная плотность $F_1(f) = \tau_0$, $|f| \leq (2\tau_0)^{-1}$. Из (23) и (24) следует, что на выходе системы (21) процесс s_t имеет спектральную плотность

$$\begin{aligned} F(f) &= \lambda^2 \alpha^2 \tau_0 \frac{|e^{i\pi f\tau_0 N} - \alpha^N e^{-i\pi f\tau_0 N}|^2}{|e^{i\pi f\tau_0} - \alpha e^{-i\pi f\tau_0}|^2} = \\ &= \lambda^2 \alpha^2 \tau_0 \frac{(1 - \alpha^N)^2 + 4\alpha^N \sin^2 \pi f\tau_0 N}{(1 - \alpha)^2 + 4\alpha \sin^2 \pi f\tau_0}, \quad |f| \leq 1/2\tau_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Соотношение (25) можно получить другим способом — по теореме Винера — Хинчина [12]

$$F(f) = \tau_0 \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} R_t e^{-i2\pi f t \tau_0}. \quad (26)$$

Подстановка (12) и последующие довольно громоздкие вычисления приводят к формуле (25).

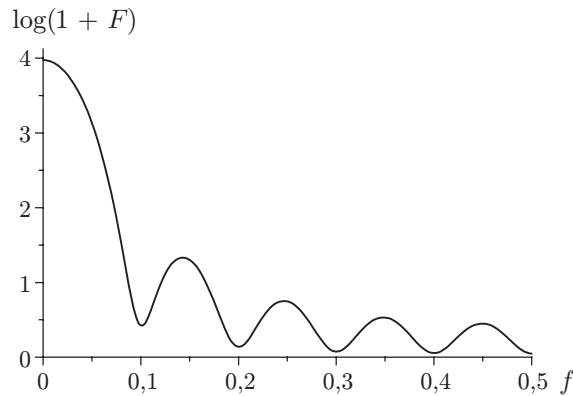


Рис. 5. Спектральная плотность процесса формирования курса валют

Зависимость спектральной плотности и ковариационной функции от параметра N . Из соотношений (12), (25) следует: при $N = 1$ ковариационная функция $R_\tau = \lambda^2 \alpha^2 \delta_{\tau_0}$ и спектральная плотность $F(f) = \lambda^2 \alpha^2 \tau_0$, т. е. процесс s_t является белым шумом с дисперсией $R_0 = \lambda^2 \alpha^2$. Поскольку $0 < \alpha < 1$, при $N \rightarrow \infty$ ковариационная функция определяется выражением $R_\tau = \lambda^2 \alpha^2 \alpha^{|\tau|} / (1 - \alpha^2)$, а спектральная плотность запишется как

$$F(f) = \frac{\lambda^2 \alpha^2 \tau_0}{(1 - \alpha)^2 + 4\alpha \sin^2 \pi f \tau_0}, \quad |f| \leq 1/2\tau_0. \quad (27)$$

Процесс s_t с данными характеристиками называется процессом авторегрессии первого порядка [12]. Таким образом, предлагаемая модель (5) для разных значений параметра N задаёт множество процессов в интервале от белого шума до авторегрессии первого порядка.

На рис. 5 представлен график спектральной плотности (25) для $\alpha = 0,94$ и $N = 10$. На частотах $f = f_k$, удовлетворяющих условию $\pi f_k \tau_0 N = k\pi/2$, $k = 1, 3, 5, \dots$, функция $\sin \pi f \tau_0 N$ принимает максимальное значение, а значит, на этих же частотах имеются локальные максимумы спектральной плотности (25). Частотам f_k соответствуют периоды $T_k = 1/f_k = 2\tau_0 N/k$. Следовательно, можно предположить, что на траектории процесса s_t существуют явно выраженные гармонические компоненты с периодами T_k . Эти свойства спектральной плотности $F(f)$ согласуются с наблюдаемой волновой структурой курса валют. В частности, широкий спектр наблюдаемой траектории процесса s_t объясняется медленным уменьшением членов последовательности $F(f_k)$ и большим значением параметра N . Также из (25) следует, что на траектории процесса с таким спектром наиболее часто проявляются волны, периоды которых соотносятся как 1 : 3, 1 : 5, 3 : 5 (волны Эллиотта). Возможны и другие соотношения периодов, например 1 : 7, 1 : 9, 3 : 7.

Заключение. На основе статистического анализа наблюдаемых траекторий в данной работе построена математическая модель курса валют в виде суммы относительно низкочастотного детерминированного тренда и более высокочастотной стационарной случайной компоненты, для которой получены ковариационная функция, спектральная плотность и корреляционная функция приращений. Эти результаты хорошо согласуются со свойствами наблюдаемых траекторий, в частности объясняют появление волн Эллиотта. Высокочастотная компонента представлена параметрическим случайным процессом, который по своим спектральным характеристикам занимает интервал от белого шума до процесса авторегрессии первого порядка. Результаты работы могут быть полезны для построения моделей ценообразования других финансовых инструментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kendall M. G.** The analysis of economic time-series. Pt. 1: Prices // Journ. Royal Statist. Soc. 1953. **116**, N 1. P. 11–25.
2. **Samuelson P. A.** Rational theory of warrant pricing // Industr. Manag. Rev. 1965. **6**, N 2. P. 13–31.
3. **Малыхин В. И.** Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 237 с.
4. **Нурминский Е. А., Ащепков Л. Т., Трифонов Е. В.** Математические основы теории финансовых рынков. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 2000. 112 с.
5. **Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.** Option pricing: a simplified approach // Journ. Financial Economics. 1979. **7**, N 3. P. 229–263.
6. **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
7. **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.
8. **Пректер Р., Фрост А.** Волновой принцип Эллиотта. Ключ к пониманию рынка. М.: Альпина Паблишер, 2012. 270 с.
9. **Лиховидов В. Н., Сафин В. И.** Представление данных и основные фигуры на рынке FOREX. М.: FXCLUB, 2001. 154 с.
10. **Кулешов Е. Л.** Повышение разрешающей способности непараметрических спектральных оценок на коротких реализациях // Автометрия. 1995. № 4. С. 90–99.
11. **Кулешов Е. Л.** Оптимальные сглаживающие окна в спектральном анализе случайных процессов // Автометрия. 1999. № 2. С. 44–52.
12. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 2012 г.
