

17. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строит. пром-сть.— 1943.— № 1—2.
 18. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек.— М.: Наука, 1983.
 19. Koopman D. C., Lance R. H. On linear programming and plastic limit analysis // J. Mech. Phys. Solids.— 1965.— V. 13, N 2.

Поступила 15/IV 1987 г.

УДК 539.375

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ
 ОСТРОУГОЛЬНОГО КЛИНА
 ПРИ ПРЕДЕЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СДВИГУ,
 СРЕДНЕМУ РАСТЯГИВАЮЩЕМУ НАПРЯЖЕНИЮ И ОТРЫВУ**

И. Т. Артемьев, Д. Д. Ивлев
 (Чебоксары)

Упругопластическое состояние плоской деформации бесконечного клина, нагруженного равномерным давлением по одной грани, рассматривалось в [1, 2] и др., где состояние несжимаемого идеально пластического материала соответствует условию сопротивления максимальному касательному напряжению

$$(1) \quad \tau_{\max} = (1/2) |\sigma_1 - \sigma_2| \leq k, \quad k = \text{const} > 0.$$

В плоскости главных напряжений σ_1, σ_2 (1) интерпретируется полосой $A_1A_2B_1B_2$ (рис. 1).

В [3, 4] кроме предела сопротивления сдвигу учитывается предел сопротивления отрыву (максимальному растягивающему напряжению) [5, 6]. Такой подход позволяет ограничить сверху область расчетных нормальных напряжений ломаной A_1AMB_1 , так как (1) дополняется условием сопротивления отрыву

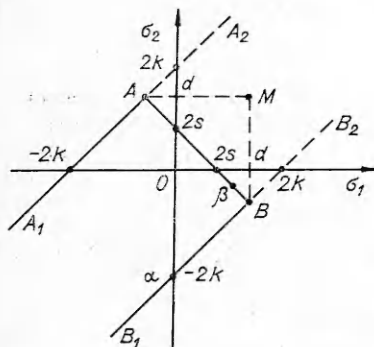
$$(2) \quad \sigma_{\max} = \sigma_i \leq d \quad (i = 1, 2), \quad d = \text{const} > 0.$$

В [7, 8] дано описание состояния пластической среды при предельном сопротивлении среднему растягивающему напряжению, которое соответствует условию

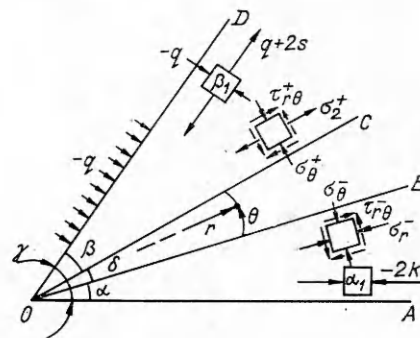
$$(3) \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \leq s, \quad s = \text{const} > 0.$$

Исходя из условий сопротивления сдвигу (1) и отрыву (2), можно минимизировать область допустимых напряжений A_1AMB_1 при фиксированных точках A и B , рассматривая (1) совместно с (3) при $s = d - k$ и соблюдая условие невогнутости [6] области A_1ABB_1 . Область, в которой максимальные компоненты напряжений не достигли предельных значений, будем считать упругой.

Настоящая работа посвящена анализу предельного состояния упругопластического клина в области напряжений (1), (3), т. е. при предель-



Р и с . 1



Р и с . 2

ном сопротивлении сдвигу и среднему растягивающему напряжению. Определены три характерных значения предельной нагрузки q_1, q_2, q_3 . В интервале $0 < q < q_1$ клин полностью находится в упругом состоянии. При $q_1 \leq q < q_2$ возникает зона предельного сопротивления (2) или (3) согласно принятой модели. В интервале $q_2 \leq q < q_3$, кроме того, осуществляется условие (1) в зоне предельного сопротивления сдвигу. При $q = q_3$ происходит вырождение упругой зоны в линию разрыва напряжений. Нагрузка q_3 определяет предел несущей способности упругопластического клина. Приводится сравнение решений при условиях (1)–(3).

В общем случае клин разделен на три зоны α, β, δ (рис. 2). Для равномерного нагружения нагрузкой q вдоль грани OA будем строить решение, исходя из наличия зон α и β с прямолинейными границами AOB и DOC и однородными напряженными состояниями. Обозначим компоненты напряжений в этих зонах верхними индексами минус и плюс. В зоне α , подверженной сжатию, осуществляется однородное напряженное состояние предельного сопротивления сдвигу

$$(4) \quad \sigma_1^- = 0, \quad \sigma_2^- = -2k, \quad \tau_{\max}^- = (\sigma_1^- - \sigma_2^-)/2 = k.$$

В зоне β , подверженной растяжению в одном из главных направлений, осуществляется условие предельного сопротивления среднему растягивающему напряжению

$$(5) \quad \sigma^+ = (\sigma_1^+ + \sigma_2^+)/2 = s, \quad \sigma_2^+ = -q, \quad \sigma_1^+ = 2s + q.$$

На рис. 1 состояниям (4), (5) отвечают в плоскости главных напряжений точки α и β , на рис. 2 им соответствуют элементы α_1, α_2 , на рис. 3 напряженные состояния (4), (5) интерпретируются диаграммами Мора α и β .

Введем полярную систему координат r, θ с полюсом в вершине клина O . Компоненты напряжения в данной системе координат в зоне α при r , направленном вдоль OB , определяются соотношениями

$$(6) \quad \sigma_r^-, \sigma_\theta^- = -k(1 \pm \cos 2\alpha), \quad \tau_{r\theta}^- = k \sin 2\alpha.$$

В зоне β при r , направленном вдоль границы OC , компоненты напряжения в полярной системе координат находятся из соотношений

$$(7) \quad \sigma_r^+, \sigma_\theta^+ = s \pm \rho \cos 2\beta, \quad \tau_{r\theta}^+ = \rho \sin 2\beta, \quad \rho = s + q.$$

В зоне δ имеем задачу о бесконечном упругом клине BOC , нагруженном вдоль граней OB и OC давлениями с компонентами (6) и (7) соответственно. Следуя [9, 1], напряжения в упругой зоне запишем в форме

$$(8) \quad \sigma_r(\theta), \sigma_\theta(\theta) = A - 2D\theta \pm (B \sin 2\theta + C \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta}(\theta) = D + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta.$$

Условимся угол θ отсчитывать так, что на границе OB $\theta = 0$, а на OC $\theta = \delta$. Тогда условия непрерывности компонент напряжения на границах упругой зоны можно записать в виде шести уравнений:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_r(0) &= \sigma_r^-, \quad \sigma_\theta(0) = \sigma_\theta^-, \quad \tau_{r\theta}(0) = \tau_{r\theta}^-, \\ \sigma_r(\delta) &= \sigma_r^+, \quad \sigma_\theta(\delta) = \sigma_\theta^+, \quad \tau_{r\theta}(\delta) = \tau_{r\theta}^+. \end{aligned}$$

Из четырех условий сопряжения для нормальных компонент напряжения с учетом (6)–(9) нетрудно определить четыре постоянные:

$$(10) \quad A = -k, \quad C = -k \cos 2\alpha, \quad D = -(k + s)/2\delta, \quad B = (\rho \cos 2\beta + k \cos 2\alpha \cos 2\delta) / \sin 2\delta.$$

Из оставшихся двух условий сопряжения касательных компонент (9) с учетом (6)–(10) получим

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi(\delta) &= \rho \cos 2\beta + k \cos 2(\alpha + \delta), \\ \varphi(\delta) &= k \cos 2\alpha + \rho \cos 2(\beta + \delta), \end{aligned}$$

где $\varphi(\delta) = (k + s)(2\delta)^{-1} \sin 2\delta$. Уравнения (11) следует дополнить геометрическим условием

$$(12) \quad \gamma = \alpha + \beta + \delta$$

($\alpha, \beta, \delta, \gamma$ — угловые размеры клина и трех его зон (рис. 2)). Система (11), (12) полностью определяет зависимость между нагрузкой и угловыми размерами.

Произведем замену переменных

$$(13) \quad 2\alpha = \gamma - \delta - \chi, \quad 2\beta = \gamma - \delta + \chi,$$

которая тождественно удовлетворяет условию (12), причем $\chi = \beta - \alpha$. Вычитая почленно выражения (11), после преобразований имеем

$$(14) \quad \operatorname{tg} \chi = (k - \rho)(k + \rho)^{-1} \operatorname{tg} \gamma.$$

Складывая почленно (11) и учитывая (14), находим

$$(15) \quad \psi^2(\delta) = k^2 + \rho^2 + 2k\rho \cos 2\gamma,$$

где $\psi(\delta) = (k + s)\delta^{-1} \sin \delta$. Поскольку $\rho = s + q$, то (15) определяет зависимость углового размера δ упругой зоны от приложенной нагрузки q при заданных параметрах k, s, γ . При расчетах удобнее пользоваться явной зависимостью $q(\delta)$, полученной из (15):

$$(16) \quad q = -s - k \cos 2\gamma + \sqrt{\psi^2(\delta) - k^2 \sin^2 2\gamma}.$$

Очевидно, при $\rho = k$ в зоне β возникает условие предельного сопротивления сдвигу. Из (15) при этом вытекает

$$(17) \quad q = 2k [1 - \delta (\sin \delta)^{-1} \cos \gamma].$$

Последняя зависимость приведена в [1] для предельного сопротивления упругопластического клина только сдвигу.

При $\delta \rightarrow 0$ имеем $\psi(\delta) \rightarrow k + s$. Из (16) получим, что при нагрузке

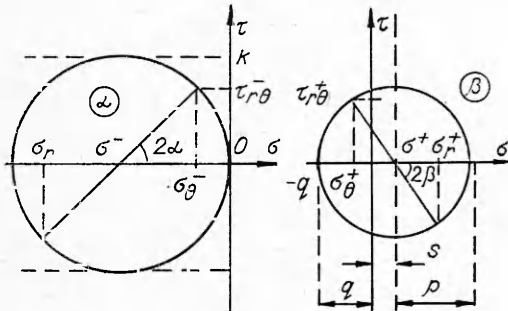
$$(18) \quad q_3 = -s - k \cos 2\gamma + \sqrt{(k + s)^2 - k^2 \sin^2 2\gamma}$$

упругая зона δ вырождается в линию, разделяющую зоны предельного сопротивления сдвигу α и предельного сопротивления среднему растягивающему напряжению β , причем $\alpha + \beta = \gamma$.

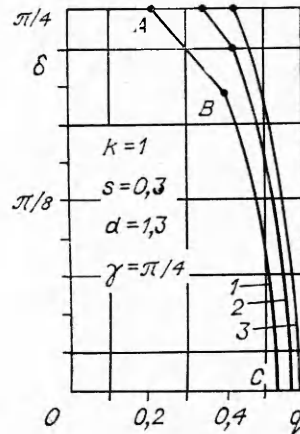
Исходя из (8), (10), определим разности компонент напряжений на границах $\theta = 0, \theta = \delta$:

$$(19) \quad \begin{aligned} \tau_{r\theta}(\delta) - \tau_{r\theta}(0) &= (k \cos 2\alpha - \rho \cos 2\beta) \operatorname{tg} \delta, \\ \sigma_\theta(\delta) - \sigma_\theta(0) &= (k + s) - (k \cos 2\alpha + \rho \cos 2\beta), \\ \sigma_r(\delta) - \sigma_r(0) &= (k + s) + (k \cos 2\alpha + \rho \cos 2\beta). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\delta \rightarrow 0$ касательная компонента напряжения остается



Р и с. 3



Р и с. 4

непрерывной, так как $\tau_{r\theta}(\delta) - \tau_{r\theta}(0) \rightarrow 0$. Из (11) вытекает, что $k \cos 2\alpha + \rho \cos 2\beta \rightarrow k + s$. Нормальная компонента напряжения σ_θ также остается непрерывной, так как $\sigma_\theta(\delta) - \sigma_\theta(0) \rightarrow 0$. Очевидно, компонента σ_r терпит разрыв:

$$(20) \quad [\sigma_r] = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\sigma_r(\delta) - \sigma_r(0)] = 2(k + s).$$

Таким образом, упругая зона δ при нагрузке (18) вырождается в линию разрыва напряжений. Соотношения (19), (20) и связанные с ними выводы имеют место также при предельном сопротивлении отрыву [4]. На плоскости q, δ (рис. 4) такому состоянию соответствует точка C : $\delta = 0, q = q_3$.

Обратимся к формуле (14). По смыслу условий (1)–(3) имеем $\rho \leq k$. Следовательно, $\chi \geq 0$, а из (13) устанавливаем, что $\alpha \leq \beta$, т. е. размер зоны α не превосходит размер зоны β . В предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ из (12) имеем $\beta + \delta \rightarrow \gamma$. Линия $\theta = 0$ становится свободной границей клина. Выражения (8) с учетом (10) приводятся к виду

$$(21) \quad \begin{aligned} \sigma_r(0), \sigma_\theta(0) &= (-k) \pm (-k), \\ \tau_{r\theta}(0) &= -(k + s)(2\delta)^{-1} + (\rho \cos 2\beta + k \cos 2\delta) \sin^{-1} 2\delta. \end{aligned}$$

Учитывая первое из соотношений (11), устанавливаем, что на свободной границе выполняются условия

$$\sigma_r = -2k, \sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad (\alpha = 0).$$

Указанное состояние осуществляется при нагрузке $q = q_2$, которую определим ниже. Дальнейшее исследование проводится для параметров, имеющих значения

$$(22) \quad \alpha = 0, \delta + \beta = \gamma, \chi = \beta, \sigma_r(0) = \kappa < k.$$

Неравенство $\kappa < k$ соответствует тому, что на свободной границе клина OA не осуществляется состояние предельного сопротивления сдвигу. В клине имеют место только две зоны β и δ , примыкающие друг к другу и к граням OD, OA . Учитывая (22), находим из (14) соотношение

$$(23) \quad \kappa = \omega\rho \quad (\omega = (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)/(\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta), \beta = \gamma - \delta).$$

Из (15) с учетом (22), (23) получим квадратное уравнение относительно параметра ρ

$$(24) \quad a\rho^2 - 2b\rho - c = 0,$$

где $a = 1 + \omega^2(1 - g^2) + 2\omega \cos 2\gamma$; $b = \omega s g^2$; $c = s^2 g^2$, $g = \delta^{-1} \sin \delta$. Учитывая, что по физическому смыслу $\rho > 0$, из (24) найдем

$$(25) \quad q = \rho - s = (b + \sqrt{b^2 + ac})/a - s.$$

Характерному случаю $\kappa = k$ отвечает момент образования условия предельного сопротивления сдвигу на свободной границе. Такое состояние возникает при некотором значении нагрузки $q = q_2$. Это значение как бы соединяет интервалы нагрузок, определяемые формулами (16) и (25), для состояний клина с тремя зонами α, β, δ и с двумя зонами β, δ соответственно. Поэтому для определения значения q_2 необходимо совместно решить уравнения (16) и (25), т. е. определить координаты q_2, δ_2 точки пересечения B кривых (16), (25) на плоскости q, δ (см. рис. 4).

Рассмотрим предельный случай $\beta = 0, \delta = \gamma$. Согласно (23), имеем $\omega = 1, \kappa = \rho$. Весь клин находится в упругом состоянии; лишь на нагруженной грани осуществляется состояние предельного сопротивления среднему растягивающему напряжению $q = q_1, \sigma_r(\delta) = q_1 + 2s$. Коэффициенты в (24) принимают значения: $a = 4 \cos^2 \gamma - g^2, b = s g^2, c = s^2 g^2, g = \gamma^{-1} \sin \gamma$. Из (25) найдем характерную нагрузку

$$(26) \quad q_1 = \rho_1 - s \quad (\rho_1 = s(2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1)^{-1}),$$

которой отвечает точка A на рис. 4. Если среднее напряжение на нагру-

женной грани меньше предела сопротивления среднему напряжению ($\sigma < s$), то на этой грани

$$(27) \quad \rho = \sigma(2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1)^{-1} < \rho_1.$$

Таким образом, в интервале нагрузок $0 < q < q_1$ клин полностью находится в упругом состоянии. В интервале $q_1 \leq q < q_2$ имеют место две зоны: упругая δ и предельная β . При нагрузке $q_2 \leq q < q_3$ осуществляются три качественных состояния материала клина: упругое в зоне δ , предельное сопротивление в зоне сдвига α и в зоне среднего напряжения β .

Зависимость углового размера упругой зоны, характеризующего несущую способность клина, от приложенной нагрузки $\delta(q)$ определяется формулами (16), (25). На рис. 4 пример такой зависимости иллюстрируется линией 1.

Заметим, что если предел сопротивления среднему напряжению удовлетворяет условию $s \geq k(2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1)$, то, согласно (27), параметр ρ при увеличении q и σ достигнет при $\sigma = k(2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1)$ предельного значения k сопротивления сдвигу, и поскольку $\rho = \kappa$ в упругом клине при $\delta = \gamma$, то на обеих гранях одновременно возникнут условия предельного сопротивления сдвигу. При дальнейшем увеличении нагрузки эти условия распространяются в глубь клина. Этот случай подробно рассмотрен в [1]. Если же $0 < s < k(2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1)$, то, согласно (26), всегда можно указать предельную нагрузку q_1 , при которой возникает состояние предельного сопротивления среднему растягивающему ($s > 0$) напряжению. Однако для углов, удовлетворяющих условию $\gamma \operatorname{ctg} \gamma < 1/2$, выражение $2\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1 < 0$ приводит к $0 < s < 0$. Значит, условие предельного сопротивления среднему растягивающему напряжению неприемлемо для клина с достаточно большим углом раствора: $\gamma^{-1} \operatorname{tg} \gamma > 2$. Здесь возможно использование условия сопротивления отрыву [4].

В [3, 4, 10] дан аналогичный анализ предельного сопротивления упругопластического клина отрыву. Отметим, что для исследования предельного сопротивления отрыву можно применять приведенные в данной работе соотношения (14), (15), в которых следует учесть, что $s = d - \rho$. Из соотношения (15) следует зависимость [4, 10]

$$(28) \quad \delta^{-1} \sin \delta = (k + d - \rho)^{-1} \sqrt{k^2 + \rho^2 + 2k\rho \cos 2\gamma}.$$

Преобразуем (28) к виду

$$(29) \quad a\rho^2 + 2b\rho + c = 0,$$

где $a = 1 - g^2$; $b = \lambda g^2 + k \cos 2\gamma$; $c = k^2 - \lambda^2 g^2$; $g = \delta^{-1} \sin \delta$; $\lambda = k + d$. Из корней уравнения (29) выберем положительное значение ρ и определим зависимость между размерами упругой зоны δ и нагрузкой q в интервале $q_2 < q < q_3$ для предельного сопротивления сдвигу и отрыву

$$(30) \quad q = 2\rho - d = 2(-b + \sqrt{b^2 - ac})/a - d.$$

При предельной нагрузке $q_1 < q < q_2$ в случае сопротивления отрыву имеем $\alpha = 0$, $\beta = \gamma - \delta$, $\sigma_r^- = -2\kappa$ (κ определяется так же, как и в (23)). Из уравнения (15) получим

$$(31) \quad a\rho^2 - 2b\rho - c = 0.$$

Здесь $a = 1 + \omega^2 + 2\omega \cos 2\gamma - (\omega - 1)^2 g^2$; $b = (\omega - 1)dg^2$; $c = d^2 g^2$; $g = \delta^{-1} \sin \delta$.

Определяя из (31) положительный корень ρ , найдем зависимость между нагрузкой q и размером упругой зоны для интервала $q_1 < q < q_2$ при предельном сопротивлении отрыву:

$$(32) \quad q = 2\rho - d = 2(b + \sqrt{b^2 + ac})/a - d.$$

Линия 2 на рис. 4 — функция $\delta(q)$, задаваемая формулами (30) и (32), для предельного сопротивления клина сдвигу и отрыву, линия 3 — зависимость $\delta(q)$ для предельного сопротивления только сдвигу по формуле

(17). Сравнение графиков показывает, что учет предельного сопротивления среднему растягивающему напряжению может понизить расчетную нагрузку в большей мере, чем учет предельного сопротивления отрыву. На кривых 1 и 2 имеют место характерные точки A, B, C , соответствующие предельным нагрузкам q_1, q_2, q_3 , при которых происходят качественные изменения в предельном состоянии упругопластического клина, описанные выше, а также в [4, 10] при предельном сопротивлении отрыву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро Г. С. Упругопластическое равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности // ПММ.— 1952.— Т. 16.— Вып. 1.
2. Наир Е., Рыхлевский Я., Шапиро Г. С. К вопросу об упругопластическом состоянии бесконечного клина // Бюл. ПАН. Сер. техн. наук.— 1966.— Т. 14, № 9.
3. Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 1.
4. Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // ПМТФ.— 1986.— № 1.
5. Ивлев Д. Д. К теории разрушения твердых тел // ПММ.— 1959.— Т. 23, вып. 3.
6. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности.— М.: Наука, 1966.
7. Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д. Об одной предельной модели сплошной среды // ДАН СССР.— 1983.— Т. 273, № 5.
8. Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложения.— Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1985.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости/Под ред. Г. С. Шапиро.— М.: Наука, 1979.
10. Артемьев И. Т. Развитие зон отрыва и сдвига в упругом клине.— Чебоксары, 1985.— Деп. в ВИНТИ 20.03.85, № 2005—85.

Поступила 6/V 1987 г.